Partie 2

Chapitre 6

Variables aléatoires réelles

Plan du chapitre

❊	**Activités préliminaires**	
❊	**Cours**	
	❖	Variable aléatoire réelle
	❖	Loi de probabilité d'une variable aléatoire
	❖	La loi binomiale
	❖	Exemples de lois continues : La Loi uniforme La Loi exponentielle
❊	**Résumé du cours**	
❊	**Avec L'ordinateur**	
❊	**Exercices et Problèmes**	
❊	**Aperçu Historique**	

ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

1 Deux machines M_1 et M_2 produisent respectivement 200 et 300 objets.
M_1 produit 3% et M_2 produit 5% de pièces défectueuses.
Quelle est la probabilité pour qu'un objet défectueux ait été fabriqué par la machine M_1 ?

2 Un sac contient 7 jetons :
quatre blancs numérotés 1, 2, 2, 2
et trois noirs numérotés 1, 1, 2.
1) On tire successivement et avec remise 3 jetons. Calculer la probabilité de chacun des évènements :
A : «Obtenir 3 jetons blancs» ;
B: «Obtenir, parmi les 3 jetons tirés, deux jetons qui portent le n°1».
2) On remet tous les jetons dans le sac et on tire successivement 3 jetons de la manière suivante :
Si le jeton tiré porte le n°1 , il est remis dans le sac, s'il porte le n°2 , il n'est pas remis dans le sac.
Calculer la probabilité de chacun des évènements
A' : «Obtenir 3 jetons blancs »
et B' : «Obtenir, parmi les 3 jetons tirés, deux jetons qui portent le n°1».

* Dans le cas d'une « équiprobabilité », on a $p(A) = \dfrac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$, pour tout évènement A.

* Si A et B sont deux événements tels que p (B) ≠ 0 alors on a :

$$p\left(A \cap B\right) = p(B)\,.\,p\left(A / B\right)$$

* Soient A et B sont deux événements tels que p(B)≠0, p(B)≠1 et p(A)≠0.
On a la formule de Bayes :

$$p\left(B/A\right) = \frac{p(B).p\left(A / B\right)}{p(B).p\left(A/B\right) + p\left(\overline{B}\right).p\left(A/\overline{B}\right)}$$

3 Soit $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} . \left(\frac{2}{3}\right)^{k} = 1$

4 On dispose d'un dé cubique parfait dont les faces portent les nombres : -1, -1, 0, 0, 1, 1.
On lance ce dé deux fois de suite. On désigne par a le nombre apparu sur la face supérieure au premier lancer et par b le nombre apparu sur la face supérieure au deuxième lancer.
a) Déterminer la probabilité de chacun des évènements :
A : « Obtenir une somme (a +b) nulle »
B : « Obtenir un produit (ab) nul »
b) Sachant que le produit des deux nombres apparus est non nul, quelle est la probabilité pour que leur somme soit nulle ?

COURS

Dans tout le chapitre, Ω est un univers, $\wp(\Omega)$ est l'ensemble des parties de Ω et p est une probabilité sur $\wp(\Omega)$.

Variable Aléatoire Réelle

Définition et loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle

Activité 1

Une urne contient six boules : 3 rouges, 1 noire et 2 blanches (toutes les boules sont indiscernables au toucher). Un joueur tire, au hasard, une boule et note sa couleur ; si elle est rouge il gagne 1 dinar tunisien ; si elle est noire il gagne 2dinars ; si elle est blanche il perd 3 dinars. On désigne par Ω, l'ensemble des couleurs possibles et par X l'application de Ω vers $\mathbb{R}$, qui à chaque élément de Ω associe le gain algébrique (positif si le joueur gagne, négatif si le joueur perd).

a) Quelles sont les valeurs prises par X ? On notera $X(\Omega)$ l'ensemble de ces valeurs.

b) Pour chaque valeur x_i de $X(\Omega)$, on désigne par $(X= x_i)$ l'ensemble des éléments de Ω ayant pour image x_i par l'application X. Calculer les probabilités des évènements suivants : $(X = 2)$, $(X = 1)$ et $(X = -3)$.

c) Vérifier que $\sum_{x_i \in X(\ )} p(X= x_i) = 1$

Définition

Soit un univers Ω fini.
On appelle variable aléatoire réelle (ou aléa numérique) définie sur l'univers Ω, toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.
$(X = x)$ désigne l'ensemble des éventualités ayant la même image x par X.
C'est-à-dire :
$(X = x) = \{\omega \,;\, \omega \in \Omega \text{ et } X(\omega) = x\}$

Définition

Soit un univers Ω fini.
Soit X une variable aléatoire réelle définie sur l'univers Ω. On appelle loi de probabilité de X ou distribution des probabilités de X, l'application qui à chacune des valeurs x_i prises par X, fait correspondre la probabilité $p_i = p(X = x_i)$.

D'une façon générale, si on a $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ alors on dit que X est **discrète** (ou **discontinue**). La donnée des nombres $p_i = p(X = x_i)$ pour $i \in \{1, 2, ..., n\}$ détermine parfaitement la loi de probabilité de la variable aléatoire X qu'on peut résumer dans un tableau appelé tableau de la loi de probabilité de X :

x_i	x_1	x_2	...	x_n	Total
$p_i = p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n	$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Activité 2

On tire, au hasard et simultanément, trois articles dans une boîte contenant 12 articles dont 3 sont défectueux. On note X le nombre d'articles défectueux observés.
1) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire réelle X.
2) Calculer $p(X \leq 1)$ et interpréter le résultat obtenu.

Activité 3

On considère le jeu suivant :
Le joueur paie 3 Dinars pour participer au jeu puis il lance une pièce de monnaie deux fois et il reçoit en Dinars le triple du nombre de piles obtenus. On désigne par Y le gain net du joueur. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire réelle Y.

Conseil :
Lorsqu'on détermine la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X, il est conseillé de vérifier que :

$$\sum_{x_i \in X(\ )} p(X = x_i) = 1$$

Activité 4

Un sac contient neuf jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à 9.
On tire, au hasard, successivement et sans remise, trois jetons du sac.
On appelle X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de numéros impairs figurant parmi les trois numéros d'un tirage. Déterminer la loi de probabilité de X.

Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Activité 1

On lance une fois un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on observe la face visible supérieure à l'immobilisation. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre inscrit sur cette face.
On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :
$F(x) = p(X \leq x)$ où $(X \leq x)=\{\omega \in \Omega \ ; X(\omega) \leq x\}$.
1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Calculer F(x) pour x appartenant à chacun des intervalles suivants :
$]-\infty,1[$, $[1,2[$, $[2,3[$, $[3,4[$, $[4,5[$, $[5,6[$ et $[6,+\infty[$
3) Construire, dans un repère orthogonal, la représentation graphique de la fonction F.
4) a) Quel est le sens de variation de F ?
b) Justifier que F est continue à droite en tout $x_i \in X(\Omega)$.

Définition

Soit un univers Ω fini et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire.
La fonction de répartition de X est l'application $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ définie pour tout réel x par : $F(X) = p(X \leq x)$.
Pour le réel x, F(x) est la probabilité de l'évènement $\{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) \leq x\}$.

Propriétés

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un univers fini Ω .
Soit F la fonction de répartition de X. On a :
- F est une fonction en escalier, continue à droite en tout $x_i \in X(\Omega)$.
- F est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si les éléments x_i de X(Ω) sont ordonnés : $x_1 < x_2 < \ldots x_n$ et si $p(X = x_i) = p_i$

pour $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ alors F est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty , x_1[\\ p_1 & \text{si } x \in [x_1 , x_2[\\ p_1 + p_2 & \text{si } x \in [x_2 , x_3[\\ \vdots & \\ p_1+p_2+\ldots+p_i & \text{si } x \in [x_i , x_{i+1}[\\ \vdots & \\ 1 & \text{si } x \in [x_n , +\infty[\end{cases}$$

Activité 3 **(résolue)**

On dispose d'un dé cubique parfait dont les faces portent les nombres : -1, 0, 0, 1, 1, 2.
On lance ce dé deux fois de suite. On désigne par a le nombre apparu sur la face supérieure au premier lancer et par b le nombre apparu sur la face supérieure au deuxième lancer.
Soit Y la variable aléatoire qui à chaque couple (a, b) associe la somme (a + b).
1) Déterminer la loi de probabilité de Y.

2) a) Déterminer la fonction de répartition F de Y.
   b) Représenter graphiquement F dans un repère orthogonal du plan.
3) a) Calculer $p(0 < Y \leq 3)$ et comparer le résultat avec le réel $(F(3) - F(0))$.
   b) Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}$ on a : $p(Y > x) = 1 - F(x)$
   c) Montrer que pour tous réels a et b tels que $a < b$, on a : $p(a < Y \leq b) = F(b) - F(a)$

Solution :

1) L'expérience aléatoire est le lancer du dé cubique deux fois de suite, on a donc : card $\Omega = 6^2 = 36$. (36 couples (a,b))

Soit Y la variable aléatoire qui à chaque élément de Ω associe la somme des points obtenus.

Pour déterminer la loi de probabilité de Y, on pourra utiliser le tableau suivant :

+	-1	0	0	1	1	2
-1	-2	-1	-1	0	0	1
0	-1	0	0	1	1	2
0	-1	0	0	1	1	2
1	0	1	1	2	2	3
1	0	1	1	2	2	3
2	1	2	2	3	3	4

On a $Y(\Omega) = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$

Le tableau suivant donne la loi de probabilité associée à Y.

x_i	-2	-1	0	1	2	3	4
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$

2) a) La fonction de répartition F de Y est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$F(x) = 0$ si $x \in \left]-\infty, -2\right[$;

$F(x) = p_1 = \frac{1}{36}$ si $x \in \left[-2, -1\right[$;

$F(x) = p_1 + p_2 = \frac{5}{36}$ si $x \in \left[-1, 0\right[$;

$F(x) = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{13}{36}$ si $x \in \left[0, 1\right[$;

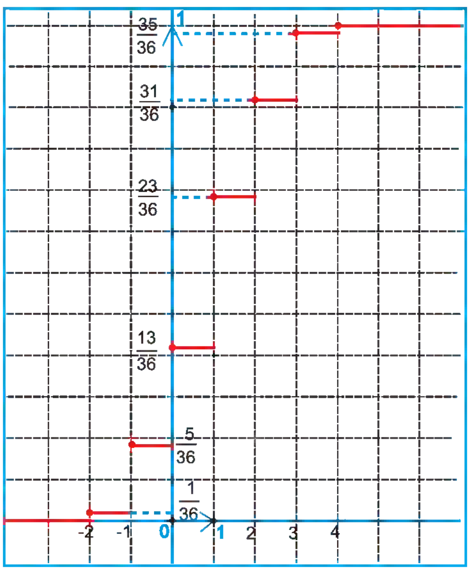
$F(x) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{23}{36}$ si $x \in \left[1, 2\right[$;

$F(x) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = \frac{31}{36}$ si $x \in \left[2, 3\right[$;

$F(x) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = \frac{35}{36}$ si $x \in \left[3, 4\right[$;

$F(x) = \frac{36}{36} = 1$ si $x \in \left[4, +\infty\right[$

b) Représentation graphique de F :



3) a) $p(0 < Y \leq 3) = p(Y=1) + p(Y=2) + p(Y=3) = \frac{22}{36}$ et on a : $F(3) - F(0) = \frac{35}{36} - \frac{13}{36} = \frac{22}{36}$
D'où $p(0 < Y \leq 3) = F(3) - F(0)$.

b) Montrons que $\forall\, x \in \mathbb{R}$ on a $p(Y > x) = 1 - F(x)$. Les évènements $(Y \leq x)$ et $(Y > x)$ sont contraires donc pour tout réel x, on a :
$p(Y > x) = 1 - p(Y \leq x) = 1 - F(x)$.

c) Pour tous réels a et b tels que a < b on a :
$(Y \leq a) \subset (Y \leq b)$ et $(a < Y \leq b) = (Y \leq b) \setminus (Y \leq a)$

Donc $p(a < Y \leq b) = p(Y \leq b) - p(Y \leq a) = F(b) - F(a)$

Remarque :

A partir de F on peut retrouver la loi de probabilité de Y : en effet on a : $p_1 = F(x_1)$ et pour tout $i \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$, $p(Y = x_{i+1}) = p_{i+1} = F(x_{i+1}) - F(x_i)$.

Exemple : $p(Y = x_3) = p(Y = 0) = p_3 = F(0) - F(-1) = \frac{13}{36} - \frac{5}{36} = \frac{8}{36}$

Activité 4

Une urne contient 3 boules rouges, 2 boules noires et 1 boule verte.
L'expérience consiste à tirer successivement sans remise trois boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la première boule est rouge ou verte, 0 si non.
1) Dresser le tableau de la loi de probabilité de X.
2) Déterminer la fonction de répartition F de X et construire sa représentation graphique dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

Espérance mathématique d'une variable aléatoire

Activité 1

On considère le jeu suivant où le joueur lance un dé cubique parfait dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et reçoit autant de dinars tunisiens que le nombre de points inscrits sur la face supérieure du dé lorsque ce nombre est pair et perd autant de dinars tunisiens que le nombre de points obtenus si celui-ci est impair.
On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur le gain algébrique du joueur.
1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Montrer que $p(X < 0) = p(X > 0)$. En déduire qu'il est aussi probable de gagner que de perdre au jeu.
a) Calculer le gain moyen du jeu (c'est-à-dire $\sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i p(X = x_i)$)
b) En moyenne gagne-t-on en dinars autant que ce que l'on perd ?

Définition

Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs x_i avec les probabilités respectives p_i pour $i \in \{1, 2, ..., n\}$.
On appelle espérance mathématique de X, ou valeur moyenne de X, que l'on note E(X) ou $\overline{X}$, le réel défini par : $E(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k.x_k = p_1.x_1 + p_2.x_2 + ... + p_n.x_n$

Activité 2

Amor envisage d'investir dans les actions d'une entreprise spécialisée dans les nouvelles technologies pour une période d'un an. Les rendements possibles sont précisés dans le tableau suivant :

Rendement	6%	8%	10%	12%
Probabilité	0.2	0.3	0.35	0.15

1) Quel est le rendement le plus probable ?
2) Quel est le rendement moyen espéré ?

Activité 3

Un investisseur doit choisir entre les deux options suivantes :
Option A : investir pour un an à un taux d'intérêt fixe de 8%.
Option B : être actionnaire d'une société inscrite en bourse dont les rendements sont donnés avec leurs probabilités dans le tableau ci-dessous :

Rendement	-10%	0%	10%	20%
Probabilité	0.1	0.4	a	b

Déterminer les valeurs de a et b pour que l'option B soit plus favorable.

Variance et écart-type d'une variable aléatoire

Définitions

Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs x_i avec les probabilités respectives p_i pour $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

La variance de X, que l'on note V(X), est le réel positif défini par la formule :
$$V(X) = \left(x_1 - \overline{X}\right)^2.p_1 + \left(x_2 - \overline{X}\right)^2.p_2 + ... + \left(x_n - \overline{X}\right)^2.p_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2.p_i$$
L'écart- type de X, que l'on note $\sigma(X)$, est le réel positif $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Si X est une variable aléatoire discrète prenant les valeurs x_i avec les probabilités respectives p_i pour $i \in \{1, 2, ..., n\}$, alors on a :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

Activité 1

Soit $\overline{X} = E(X)$

En développant les carrés $(x_i - \overline{X})^2$ pour $i \in \{1, 2, ..., n\}$, montrer que :

$$V(X) = (x_1 - \overline{X})^2 . p_1 + (x_2 - \overline{X})^2 . p_2 + ... + (x_n - \overline{X})^2 . p_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - (E(X))^2$$

Remarques :

* L'écart- type est un paramètre de dispersion qui donne une idée de la dispersion des valeurs prises par la variable aléatoire autour de son espérance mathématique.

* L'écart- type est exprimé dans la même unité que la variable aléatoire.

Activité 2

On a placé dans une urne cinq boules indiscernables au toucher. Trois sont noires et deux sont blanches. On tire au hasard une à une toutes les boules de cette urne et on note R le rang de la première boule blanche tirée.
1) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire R.
2) Calculer l'espérance mathématique E(R) et l'écart-type $\sigma(R)$.

Activité 3

Une urne contient quatre boules blanches numérotées : 1, 1, 1, 1 ; deux boules noires numérotées : 2, 1 et une boule rouge numérotée : 2.
Une épreuve consiste à tirer successivement 3 boules de l'urne de la manière suivante :
Si la boule tirée porte le numéro 1 on la remet dans l'urne et on tire la boule suivante.
Si non on la garde à l'extérieur de l'urne et on tire la boule suivante.
1) Calculer les probabilités des évènements suivants :
A : "Obtenir 3 boules blanches" ; B : "Obtenir exactement 2 boules portant le numéro 1".
2) Soit la variable aléatoire X qui prend la valeur 0 si aucune boule tirée n'est noire, si non le rang de la première boule noire tirée.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer l'écart-type de X.
   c) Tracer, dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction de répartition de X.

Activité 4 **(résolue)**

Une urne contient quatre boules rouges portant le nombre 1, cinq boules vertes portant le nombre -1 et trois boules blanches portant le nombre 0.
On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
Soit X l'application qui à chaque tirage associe la somme des nombres marqués sur les boules tirées.

1) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.
2) Déterminer la loi de probabilité de X.
3) a) Calculer l'espérance mathématique E(X). Interpréter le résultat obtenu.
   b) Calculer la variance V(X).
   c) Calculer l'écart-type $\sigma(X)$.
4) Tracer la représentation graphique de la fonction de répartition F de X.

Solution :

1) Les sommes possibles des nombres marqués sur les deux boules tirées sont -2, -1, 0, 1 et 2.
L'ensemble des valeurs prises par X noté $X(\Omega)$ est donc $X(\Omega) = \{ -2, -1, 0, 1, 2 \}$ et card $\Omega = C_{12}^2 = 66$

2) L'évènement $\{ w \in \Omega \,/\, X(w) = -2 \}$ est noté (X = -2) on a donc :

* (X = -2) : "Tirer deux boules vertes".

$$p(X=-2) = \frac{C_5^2}{66} = \frac{10}{66}$$

* (X = -1) : "Tirer une boule verte et une boule blanche".

$$p(X=-1) = \frac{C_5^1 \,.\, C_3^1}{66} = \frac{15}{66}$$

* (X = 0) : "Tirer deux boules blanches ou Tirer une boule rouge et une boule verte ".

$$p(X=0) = \frac{C_3^2 + C_4^1 \,.\, C_5^1}{66} = \frac{23}{66}$$

* (X = 1) : "Tirer une boule rouge et une boule blanche".

$$p(X=1) = \frac{C_3^1 \,.\, C_4^1}{66} = \frac{12}{66}$$

* (X = 2) : "Tirer deux boules rouges".

$$p(X=2) = \frac{C_4^2}{66} = \frac{6}{66}$$

La Loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

La Loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i Valeurs prises par X	-2	-1	0	1	2
$p_i = p(X = x_i)$	$\frac{10}{66}$	$\frac{15}{66}$	$\frac{23}{66}$	$\frac{12}{66}$	$\frac{6}{66}$

On remarque que $\sum_{i=1}^{5} p(X = x_i) = 1$, on dit que les évènements $(X = x_i)$ forment un système complet d'évènements.

3) a) L'espérance mathématique de X est le réel noté E(X), défini par :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{i=5} x_i .\, p(X=x_i)$$

$$=(-2)\times\frac{10}{66} + (-1)\times\frac{15}{66} + 0\times\frac{23}{66} + 1\times\frac{12}{66} + 2\times\frac{6}{66}$$

$$=-\frac{1}{6} < 0 \text{ donc le jeu est perdant.}$$

Remarque :

Si X indique le gain algébrique (positif ou négatif) réalisé dans un jeu, alors on dit que:
- Le jeu est favorable ou gagnant si et seulement si $E(X) > 0$.
- Le jeu est défavorable ou perdant si et seulement si $E(X) < 0$.
- Le jeu est équitable si et seulement si $E(X) = 0$.

b) La variance de X est le réel positif noté V(X) défini par :

$$V(X) = E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2$$

$$= \left[(-2)^2\times\frac{10}{66} + (-1)^2\times\frac{15}{66} + (0)^2\times\frac{23}{66} + (1)^2\times\frac{12}{66} + (2)^2\times\frac{6}{66} \right] - \left(-\frac{1}{6}\right)^2$$

$$= \frac{91}{66} - \frac{1}{36} \simeq 1,35$$

c) L'écart-type de X est le réel noté $\sigma(X)$ défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$\simeq \sqrt{1,35}$$

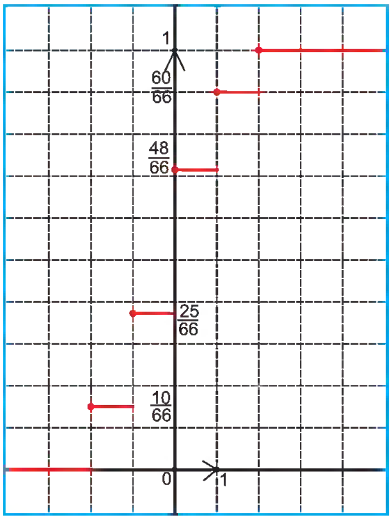
$$\simeq 1,16.$$

4) La fonction de répartition de X est l'application F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F : \mathbb{R} \to [0,1]$$
$$x \mapsto F(x) = p(X \le x)$$

L'évènement $(X \leq x)$ désigne $\{ w \in \Omega / X(w) \leq x \}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, -2[\\ \dfrac{10}{66} & \text{si } x \in [-2, -1[\\ \dfrac{10}{66} + \dfrac{15}{66} = \dfrac{25}{66} & \text{si } x \in [-1, 0[\\ \dfrac{10}{66} + \dfrac{15}{66} + \dfrac{23}{66} = \dfrac{48}{66} & \text{si } x \in [0, 1[\\ \dfrac{10}{66} + \dfrac{15}{66} + \dfrac{23}{66} + \dfrac{12}{66} = \dfrac{60}{66} & \text{si } x \in [1, 2[\\ 1 & \text{si } x \in [2, +\infty[\end{cases}$$



La Loi Binomiale

Activité 1

On lance une pièce de monnaie parfaite trois fois de suite.
Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A : " Obtenir deux fois pile "
B : " Obtenir trois fois face "
C : " Obtenir au moins deux fois pile "
D : " Obtenir pile pour la première fois au $3^{\text{ème}}$ lancer ".

Epreuve de Bernoulli- Schéma de Bernoulli

* Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p est une épreuve dont l'univers Ω possède exactement deux issues, l'une est appelée succès notée S de probabilité p et l'autre est appelée échec notée E de probabilité $q = 1 - p$.

* On peut définir, sur cette épreuve, une variable aléatoire X, prenant la valeur 1 lorsque la première issue S est réalisée, $p(X=1)=p$ et 0 si non, $p(X=0) = 1 - p$. Cette variable est **une variable de Bernoulli** de paramètre p et sa loi est la **loi de Bernoulli.**

* Un **schéma de Bernoulli** est la répétition d'une même épreuve de Bernoulli de paramètre p un certain nombre n de fois ($n > 1$) en supposant que les épreuves sont deux à deux indépendantes.

Loi binomiale

* Si X est une variable aléatoire égale au nombre de succès au cours de n épreuves de Bernoulli de paramètre p, alors on dit que X suit **une loi binomiale** de paramètres n et p.
* La loi de probabilité de X (qu'on note $\mathscr{B}$ (n, p)) est définie par :
pour tout $k \in X(\Omega) = \{0, 1, ..., n\}$ on a : $p(X = k) = C_n^k . p^k . (1-p)^{n-k}$.
* L'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X sont donnés par :
$E(X) = n.p$; $V(X) = n.p.(1-p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{n.p.(1-p)}$.

Activité 2

I- 1) Un dé a la forme d'un tétraèdre régulier (pyramide à base triangulaire) dont les faces sont numérotées :1, 2, 3 et 4.
Les faces 1, 2 et 3 sont équiprobables et la probabilité de la face 4 est le double de celle de chacune des autres faces.
Quelle est la probabilité de chaque face ?
2) On considère un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Quelle est la probabilité de chaque face ?

II- 1) Soit E l'épreuve qui consiste à lancer, simultanément, les deux dés précédents une fois. Quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 7 ?
2) On répète l'épreuve E quatre fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de fois où on obtient une somme égale à 7.
a) Définir la loi de probabilité de X et calculer E(X) et V(X).
b) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois "la somme égale à 7"?
c) Quelle est la probabilité d'obtenir "la somme égale à 7" pour la première fois à la troisième répétition ?

Activité 3

Quatre chasseurs tirent en même temps sur un lapin. Chacun d'eux a une chance sur quatre d'atteindre le lapin. Calculer la probabilité pour que le lapin soit atteint.

Activité 4 (résolue)

Une urne contient quatre boules rouges et six boules noires indiscernables au toucher.
1) On tire successivement et avec remise trois boules. Calculer la probabilité de l'évènement M : « la première boule tirée est noire et les deux autres boules tirées sont rouges »
2) On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne. Calculer la probabilité de l'évènement : «la première boule tirée est noire et les deux autres boules tirées sont rouges»

3) Soit E l'épreuve qui consiste à tirer simultanément trois boules de l'urne. On désigne par A l'évènement : "Obtenir une boule noire et deux boules rouges".

a) Montrer que la probabilité de l'évènement A est égale à $\frac{3}{10}$.

b) On répète l'épreuve E cinq fois de suite en remettant les trois boules dans l'urne après chaque épreuve et on désigne par X la variable aléatoire réelle qui prend pour valeur le nombre de fois où l'évènement A est réalisé. Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

d) Calculer la probabilité de l'évènement : $(1 < X \leq 3)$

(D'après Bac Tunisien 2001)

Solution :

1) et 2) On tire successivement trois boules.

L'évènement M :« Obtenir une boule noire au premier tirage et 2 boules rouges aux tirages suivants » est égal à l'ensemble des triplets de la forme (N,R, R).

Type de tirages	1) successif avec remise	2) successif sans remise
p(M)	$\frac{6}{10}\times\frac{4}{10}\times\frac{4}{10}=0,096$	$\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}=0,1$

3) Tirage simultané de 3 boules :

a) Soit l'évènement A : «Obtenir {N,R, R}» alors $p(A)=\frac{C_6^1\times C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}=0,3$

b) On répète l'épreuve E, 5 fois de suites. X = nombre de fois où l'évènement A est réalisé.

Nous sommes donc, devant un schéma de Bernoulli de paramètres n = 5 et p = 0,3.
Donc X suit une loi binômiale de paramètres n = 5 et p = p(A) = 0,3.

Par suite, $x(\Omega\}=\{0,1,2,3,4,5\}$ et pour $k\in\{0,1,2,3,4,5\}$ on a $p(X=k)=C_5^k\,(0.3)^k\,.\,(0,7)^{5-k}$.

c) $E(X)=n.p=1,5$; $V(X)=n.p.(1-p)=1,05$ et $\sigma(X)=\sqrt{n.p.(1-p)}=\sqrt{1,05}\simeq 1,025$

d) $p(1 < X \leq 3) = p(X = 2) + p(X = 3) = 0,441$.

Activité 5

Un appareil électronique envoie à une imprimante un code formé de 4 chiffres, chaque chiffre ne pouvant prendre que les valeurs 0 ou 1 (par exemple : 1101).

a) Combien l'appareil peut-il fabriquer de codes distincts ?

On suppose que tous ces codes ont la même probabilité d'être produits.

b) Soit X la variable aléatoire discrète qui prend pour valeur le nombre de 1 figurant dans le code. Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

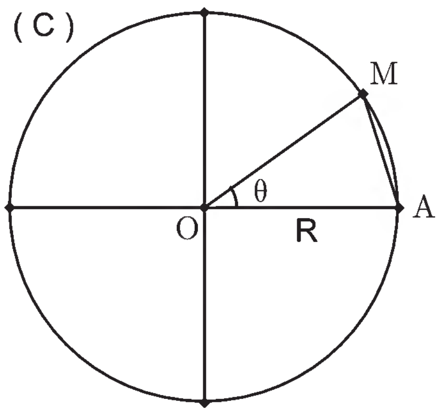
Exemples de variables aléatoires réelles continues

1) Introduction et définition

Supposons qu'on étudie la taille des individus d'une population. Si on veut déterminer la probabilité qu'un individu pris au hasard ait une taille 1,79m ; il est clair que même si on dispose des instruments de mesure les plus performants, cette taille n'est jamais atteinte (c'est un évènement «quasi-impossible») et par conséquent la probabilité cherchée est nulle. Mais on pourra calculer la probabilité que la taille de l'individu appartienne à l'intervalle [1,785 ; 1,795] par exemple, en fonction de la précision demandée.

Activité

Dans la figure ci-contre, (C) désigne un cercle de centre O et de rayon R = OA.
On choisit un point M au hasard sur ce cercle, on note $\theta = \widehat{AOM}$ et on désigne par X la variable aléatoire réelle prenant pour valeur la longueur de la corde [AM].
a) Préciser l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire.
b) Calculer AM en fonction de θ.
c) Déterminer $X(\Omega)$.
d) Quelle est la probabilité de l'évènement $\left(X = \frac{R}{7}\right)$?



Solution et commentaires :

a) L'univers Ω correspondant à cette expérience est égal au cercle (C) qui n'est pas un ensemble fini comme c'est le cas pour une variable aléatoire discrète.

b) À chaque point M de (C) on associe, par X, le réel $AM = 2R.\sin\frac{\theta}{2}$ (sous entendu $\theta \in [0,\pi]$).

c) La fonction $u : x \mapsto 2R.\sin\frac{x}{2}$ est continue et croissante sur l'intervalle $[0,\pi]$.
Par conséquent, $X(\Omega) = u([0,\pi]) = [0, 2R]$.

d) $p\left((X = \frac{R}{7})\right) = 0$. En effet $\left(X = \frac{R}{7}\right)$ est un évènement « quasi-impossible » car il correspond aux points M du cercle (C) tels que $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{14}$ où $\theta = \widehat{AOM}$ (ces points M sont tels qu'il est presque impossible de les choisir sur le cercle (C)).

La variable aléatoire X est définie sur un univers Ω non fini et on a $X(\Omega)$ est un intervalle non réduit à un point. On dit alors, que X est une variable aléatoire réelle continue.

Lorsqu'une variable aléatoire réelle X définie sur un univers Ω vérifie : $X(\Omega) = I$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, nous dirons que cette variable aléatoire est continue et on a : $p(X \in I) = 1$, $p(X \notin I) = 0$ et $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $p(X = a) = 0$.

En particulier, si $X(\Omega) = [a,b]$ alors $p(X \in [a,b]) = 1$ et $p(X \notin [a,b]) = 0$.
Donc il n'est pas possible de définir une loi de probabilité pour une telle variable aléatoire continue comme on l'a fait pour une variable aléatoire discrète. Par contre, on cherchera à exprimer la probabilité que les valeurs de la variable aléatoire appartiennent à un intervalle donné.

2) Fonction de répartition d'une variable aléatoire continue

Soit X une variable aléatoire réelle continue définie sur un univers Ω. La fonction de répartition F de X est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $F(x) = p(X \leq x)$.

Activité 1

Soit X une variable aléatoire réelle continue de fonction de répartition F.

1) Justifier que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F(x) \leq 1$.

2) a) Vérifier que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $p(X \in]-\infty,a]) = F(a)$ et $p(X < a) = p(X \leq a)$.

   b) En déduire que $p\left(X > a\right) = p\left(X \geq a\right) = 1 - F(a)$

3) Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$.

   a) En remarquant que $(X \leq a) \subset (X \leq b)$, montrer que $p(X \in [a,b]) = F(b) - F(a)$.

   b) En déduire que F est croissante sur $\mathbb{R}$.

4) Montrer que pour $a < b$, on a :

   $p(a < X \leq b) = p(a \leq X < b) = p(a < X < b) = p(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$.

Si X est une variable aléatoire réelle continue définie sur un univers Ω et de fonction de répartition F alors on a les propriétés suivantes :

- F est croissante sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F(x) \leq 1$.
- $p(X < a) = p(X \leq a)$ et $p(X > a) = p(X \geq a) = 1 - F(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
- $p(a < X \leq b) = p(a \leq X < b) = p(a < X < b) = p(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ où a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Activité 2

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle continue X définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

$(0{,}3 \leq X \leq 0{,}8)$; $(X \geq \frac{1}{2})$ et $(X < 0)$

3) Densité de probabilité d'une variable aléatoire continue

Activité 1

Soit X une variable aléatoire réelle continue, de fonction de répartition F définie sur $\mathbb{R}$

par : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

b) Montrer que F est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

c) Tracer la courbe représentative de F dans un repère orthogonal du plan.

2) Calculer la probabilité de l'évènement A : "$(X \leq 2)$".

3) Calculer la probabilité des évènements B : "$(0 < X \leq 0{,}5)$" et C : "$0{,}7 < X < 0{,}8)$"

4) a) Montrer que pour h > 0 et voisin de zéro et pour tout x réel, on a :

$F(x + h) - F(x) \backsimeq f(x) . h$ où f désigne la fonction dérivée de F.

b) En déduire que pour tout x réel, on a : $p(x \leq X \leq x + h) \backsimeq f(x) . h$

c) Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$. Vérifier que $\int_a^b f(x)\, dx = p(a \leq X \leq b)$.

Commentaires :

* Le réel positif $f(x).h$ est une valeur approchée de la probabilité que la variable aléatoire continue X soit dans un intervalle de longueur h et contenant le réel x.

* La fonction f s'appelle la fonction densité de probabilité de la variable aléatoire réelle continue X.

Soit X une variable aléatoire réelle continue de fonction de répartition F.

* On admet que F est continue sur $\mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$
* La fonction dérivée f de F s'appelle la fonction densité (ou densité de probabilité) de X.

Pour tout réel x on a : $p(x \leq X \leq x + h) \approx f(x) . h$ où h est un réel strictement positif et voisin de 0.

Activité 2

Montrer que la densité f d'une variable aléatoire continue X prend des valeurs positives ou nulles.

Activité 3

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle continue X définie sur $\mathbb{R}$

par : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2(x - \frac{1}{2}x^2) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1) Déterminer la fonction f densité de probabilité de X.
2) Tracer les courbes représentatives de f et F dans deux repères orthogonaux du plan.
3) Calculer $p(0,25 \leq X \leq 0,5)$ .Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
4) Résoudre, dans]0,1[, graphiquement ; puis par le calcul ; l'équation F(x) = 0,5. Interpréter.

Si X est une variable aléatoire réelle continue définie sur un univers Ω et de densité de probabilité f alors on a les propriétés suivantes :

* $f(x) \geq 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$.
* Pour tous réels t et s tels que $t \leq s$ on a : $p(t \leq X \leq s) = \int_t^s f(x)\, dx$
* Si $X(\Omega) = [a,b]$, (a<b), alors $\int_a^b f(x)\, dx = 1$
* Si $X(\Omega) = [a,+\infty[$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\, dt = 1$

4) La Loi uniforme

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. La probabilité uniforme offre une chance égale à toutes les éventualités. Donc la densité de probabilité correspondante est partout la même ; c'est une fonction constante sur I.

Soient a et b deux réels tels que a < b.
- Une variable aléatoire continue X suit une loi de **probabilité uniforme** sur l'intervalle [a; b] si sa densité de probabilité f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<a \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a\leq x\leq b \\ 0 & \text{si } x>b \end{cases}$$

- Si X est une variable aléatoire continue qui suit une loi de **probabilité uniforme** sur l'intervalle [a; b] alors on a :

* L'espérance mathématique de X est définie par $E(X)=\int_a^b t.f(t)\,dt$

* La variance de X est définie par $V(X)=\int_a^b t^2.f(t)\,dt-\left(E(X)\right)^2$

Exemple : Si X suit une loi de probabilité uniforme sur [0; 1] alors sa fonction densité f est la fonction constante égale1sur [0; 1] et zéro ailleurs. Et pour tous réels t et s de [0; 1] tels que $t \leq s$ on a $p(t\leq X\leq s)=\int_t^s 1\,dx=s-t$

* L'espérance de X est $E(X)=\int_0^1 t.f(t)\,dt=\int_0^1 t.1\,dt=\left[\dfrac{t^2}{2}\right]_0^1=\dfrac{1}{2}$

* La variance de X est $V(X)=\int_0^1 t^2.f(t)\,dt-\left(E(X)\right)^2=\int_0^1 t^2dt-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\left[\dfrac{t^3}{3}\right]_0^1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$

Activité 1

Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi de probabilité uniforme sur [a; b].

1) Montrer que $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$

2) Montrer que $V(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$

Soit X une variable aléatoire réelle continue qui suit une loi de probabilité uniforme sur un intervalle [a; b].
* L'espérance mathématique de X est « la moyenne arithmétique » des bornes de l'intervalle [a; b] c'est-à-dire : $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$.

* La variance de X est $V(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$

Activité 2

Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi de probabilité uniforme sur [a; b]. Montrer que la fonction de répartition F de X est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x < b \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

Activité 3

Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi de probabilité uniforme sur [2; 5].
1) Déterminer la densité f de probabilité de X.
2) Déterminer la fonction de répartition F de X.
3) Représenter graphiquement f et F dans un repère orthogonal du plan.
4) Calculer E(X) et V(X).
5) Calculer la probabilité de chacun des évènements : $(1 \leq X \leq 4)$ et $(2{,}5 < X \leq 2{,}6)$

Activité 4 (résolue)

Le bus part à 9 h d'un arrêt précis et il passe par cet arrêt toutes les 10 minutes. Un étudiant se présente à cet arrêt entre 9 h et 9h 20 mn. Soit X la variable aléatoire égale à l'heure exacte de son arrivée à cet arrêt. Sachant que X suit une loi uniforme sur l'intervalle [0; 20].
1) Quelle est la probabilité que l'étudiant attende moins que 5 mn le prochain bus ?
2) Quelle est la probabilité qu'il attende plus que 8 mn ?

Solution :

La densité de probabilité f de X est définie par $f(x) = \dfrac{1}{20}$ pour tout $x \in [0, 20]$

1) L'attente n'est inférieure à 5 mn que si l'étudiant arrive entre 9h 5mn et 9h 10mn ou entre 9h 15mn et 9h 20mn. La probabilité demandée est alors :

$$p(5 \leq X \leq 10) + p(15 < X \leq 20) = \int_5^{10} \frac{1}{20}\,dt + \int_{15}^{20} \frac{1}{20}\,dt = \frac{1}{2}$$

2)De même l'attente n'est supérieure à 8 mn que si l'étudiant arrive entre 9h et 9h 2mn ou entre 9h10mn et 9h12mn. La probabilité demandée est alors :

$$p(0 \leq X \leq 2) + p(10 < X \leq 12) = \int_0^{2} \frac{1}{20}\,dt + \int_{10}^{12} \frac{1}{20}\,dt = \frac{1}{5}$$

5) La Loi exponentielle

Soit a un réel strictement positif.
Une variable aléatoire continue X suit une loi exponentielle de paramètre a sur

I = [0,+∞[si sa densité de probabilité f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ a\,e^{-at} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

Exemple : La durée de vie, exprimée en années, d'un noyau radioactif ou d'un composant électronique est modélisée par une variable aléatoire réelle continue qui suit une loi exponentielle.

Activité 1

Soit X une variable aléatoire réelle continue qui suit une **loi exponentielle** de paramètre a sur I = [0,+∞[et de densité de probabilité de f.

1) a) Calculer, pour tout réel x, l'intégrale $\int_0^x f(t)\,dt$

b) En déduire que la fonction de répartition F de X est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-ax} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

2) a) Soit t > 0.Calculer, par intégration par parties, chacune des expressions suivantes:

$$E(t) = \int_0^t f(x)\,dx \quad \text{et} \quad V(t) = \int_0^t x^2\ f(x)\,dx - \left(\frac{1}{a}\right)^2$$

b) Montrer alors, que $\lim\limits_{t \to +\infty} E(t) = \frac{1}{a}$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} V(t) = \frac{1}{a^2}$.

Si X est une variable aléatoire réelle continue qui suit une loi exponentielle de paramètre a > 0 sur I = [0,+∞[alors on a :

- L'espérance mathématique de X est $E(X) = \frac{1}{a}$.
- La variance de X est $V(X) = \frac{1}{a^2}$.
- La fonction de répartition F de X est définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-ax} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Activité 2

Soit T, le temps (en minutes) d'attente entre deux clients au guichet de la poste.
On admet que T suit une loi exponentielle de paramètre 0,4.

1) Représenter graphiquement une allure de la densité de probabilité de la variable aléatoire T.
2) Calculer la probabilité d'attendre plus de 15 min.
3) Donner l'espérance mathématique et la variance de T.

Activité 3

Soit X une variable aléatoire réelle continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1) Montrer que pour tous réels positifs a et b tels que $a \leq b$ on a :
$p(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2) a) Montrer que pour tout $t > 0$ on a : $p(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
b) En déduire que pour tout $t > 0$ on a : $p(X > t) = e^{-\lambda t}$.
c) Justifier que pour tous réels positifs s et t on a : $p(X > s + t \;/ X > s) = p(X > t) = e^{-\lambda t}$.

Si X est une variable aléatoire réelle continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ sur $I = [0,+\infty[$ alors :

- pour tous réels positifs a et b tels que $a \leq b$ on a : $p(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.
- pour tout $t > 0$ on a : $p(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
- pour tous réels positifs s et t on a : $p(X > s + t \;/ X > s) = p(X > t) = e^{-\lambda t}$.

Activité 4 (résolue)

La durée de vie d'une ampoule électrique mesurée en heures, est une variable aléatoire réelle X continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$).
1) Donner la densité de X.
2) Déterminer la fonction de répartition de X.
3) a) Calculer λ sachant que la durée moyenne d'une ampoule est de 2000 heures.
b) Représenter graphiquement les fonctions f et F dans deux repères orthogonaux du plan.
4) Calculer la probabilité pour qu'une ampoule dure moins de 2000 heures.
5) Sachant qu'une ampoule a duré 2000 heures calculer la probabilité pour qu'elle dure 500 heures de plus.

Solution :

1) La densité de probabilité de X est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

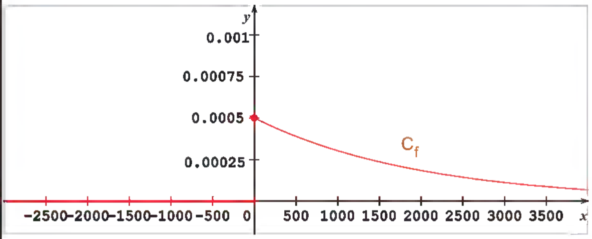
$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

2) La fonction de répartition de X est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

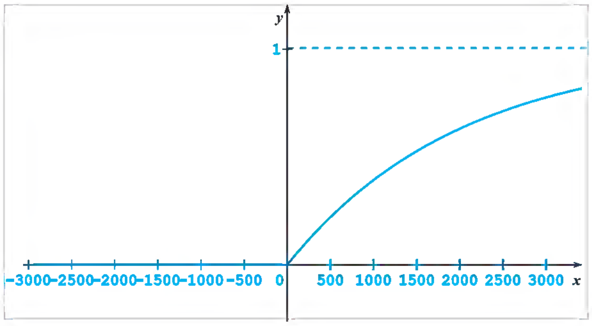
$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

3) On a $E(X)=\frac{1}{\lambda}=2000$ équivaut à $\lambda=\frac{1}{2000}=0.0005$.

Représentation graphique de f



Représentation graphique de F



4) $p(X<2000)=1-e^{-\frac{2000}{2000}}=1-e^{-1}\simeq 0.64$ (cette probabilité représente l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la densité f de X et les droites d'équations respectives : x = 0 et x = 2000).

5) $p(X>500+2000\ / X>2000)=p(X>500)=e^{-\frac{500}{2000}}=e^{-0.25}\simeq 0.78$.

Activité 5

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique.

On modélise cette situation par une loi de probabilité p (de durée de vie) définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par La probabilité que «le composant ne soit plus en état de marche au bout de t semaines» est $p(t)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx$ pour tout $t\in[0,+\infty[$

Une étude statistique, montrant qu'environ 50% d'un lot de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines permet de poser p(200)=0,5.

1) Montrer que $\lambda=\frac{\ln 2}{200}$.

2) Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 300 semaines ?

3) Calculer une valeur approchée décimale à la semaine prés de la durée de vie moyenne de ces composants.

RÉSUMÉ DU COURS

Variable aléatoire réelle :

Soit un univers Ω fini et p une probabilité définie sur Ω.
On appelle variable aléatoire réelle (ou aléa numérique) définie sur l'univers Ω, toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
La fonction de répartition de X est l'application $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ définie pour tout réel x par : $F(x) = p(X \leq x)$. On a : $\forall\, x \in \mathbb{R}, p(X > x) = 1 - F(x)$ et $p(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ pour tous réels a et b tels que a < b.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un univers fini Ω et dont la loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	x_1	x_2	...	x_n	Total
$p_i = p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n	$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

- L'espérance mathématique de X est le réel $E(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k.x_k = p_1.x_1 + p_2.x_2 + \ldots + p_n.x_n$
- La variance de X est le réel positif $V(X) = E\left(\left(X - \overline{X}\right)^2\right)$ et on a :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

- L'écart-type de X est le réel positif $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Schémas de Bernoulli :

* Soit une épreuve dont l'univers Ω possède exactement deux issues, l'une est appelée succès notée S et l'autre appelée échec notée E.
On note p = p(S) et q = 1 - p = p(E).
* On répète cette épreuve n fois de suite (n>1) et on suppose que les épreuves sont deux à deux indépendantes.
* Lorsque toutes ces conditions sont remplies, on dit que la variable aléatoire X, qui à chaque n répétitions associe le nombre de succès obtenus suit une loi binomiale de paramètre n et p. La loi de X se note : $\mathscr{B}$ (n, p).
* Si une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre n et p alors pour tout $k \in X(\Omega) = \{ 0, 1, ..., n \}$ on a : $p(X = k) = C_n^k.p^k.(1-p)^{n-k}$
$E(X) = n.p$; $V(X) = n.p.(1-p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{n.p.(1-p)}$.

Variable aléatoire réelle continue :

* Une variable aléatoire réelle X est continue lorsqu'elle est définie sur un univers Ω et vérifie : $X(\Omega) = I$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.
Dans ce cas on a : Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $p(X = a) = 0$.

- Si $X(\Omega) = \mathbb{R}$ alors $p(X \in \mathbb{R}) = 1$;
- Si $X(\Omega) = [a,b]$ alors $p(X \in [a,b]) = 1$ et $p(X \notin [a,b]) = 0$.

* Soit X une variable aléatoire réelle continue définie sur un univers Ω.
La fonction de répartition F de X a les propriétés suivantes :

- F est continue et croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $0 \le F(x) \le 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.
- $p(X < a) = p(X \le a)$ et $p(X > a) = p(X \ge a) = 1 - F(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
- $p(a < X \le b) = p(a \le X < b) = p(a < X < b) = p(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$ où a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Propriétés de la densité de X :

Si X est une variable aléatoire réelle continue définie sur un univers Ω et de densité de probabilité f alors on a les propriétés suivantes :

- $f(x) \ge 0 \; \forall\, x \in \mathbb{R}$.
- Pour tous réels t et s tels que $t \le s$ on a : $p(t \le X \le s) = \int_t^s f(x)\,dx$
- Si $X(\Omega) = [a,b]$ $(a<b)$ alors $\int_a^b f(x)dx = 1$. Si $X(\Omega) = [a,+\infty[$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt = 1$

La loi uniforme :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
Une variable aléatoire continue X suit une loi de **probabilité uniforme** sur [a; b]

si sa densité de probabilité f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \le x \le b \\ 0 & \text{si } x > b \end{cases}$

- L'espérance mathématique de X est « la moyenne arithmétique » des bornes de l'intervalle [a; b] c'est-à-dire : $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$
- La variance de X est $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

La loi exponentielle :

Soit λ un réel strictement positif.
Une variable aléatoire continue X suit une **loi exponentielle** de paramètre λ sur $I = [0,+\infty[$ si sa densité de probabilité f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda\, e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

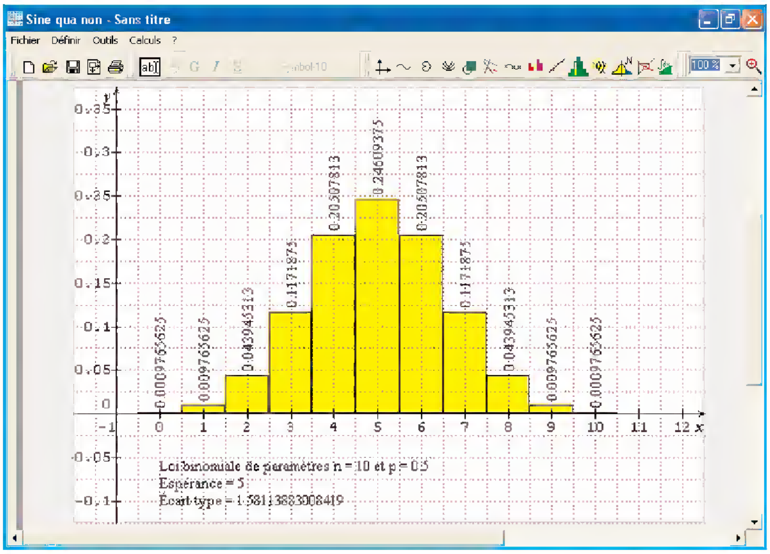
On a les propriétés suivantes :

- L'espérance mathématique de X est $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.
- La variance de X est $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.
- La fonction de répartition F de X est définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
- $p(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$ pour tous réels a et b tels que $a \leq b$.
- $p(X > t) = 1 - p(X \leq t) = e^{-\lambda t}$ pour tout réel $t > 0$.

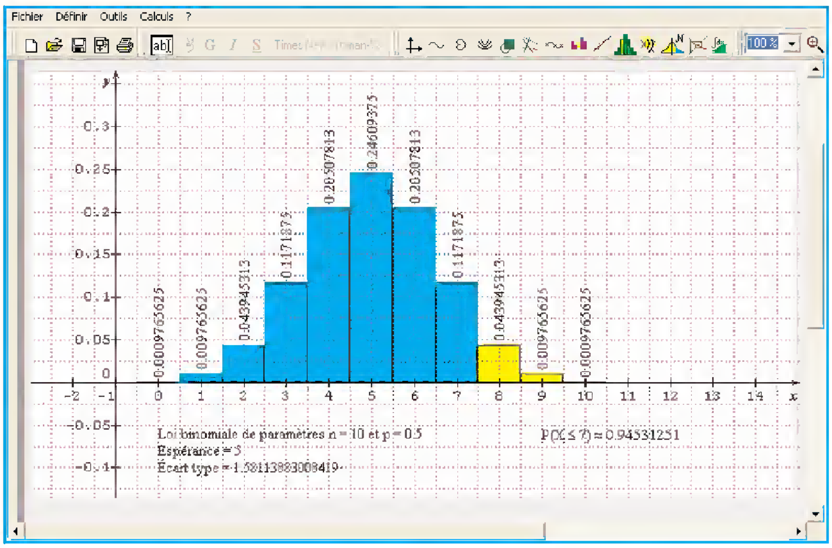
AVEC L'ORDINATEUR

Activité

Le logiciel Sine qua non est un logiciel intéressant qui pourra nous aider à visualiser des calculs de probabilités pour une loi binomiale $\mathscr{B}$ (n ; p), il suffit de lui proposer les paramètres : n (nombre de répétition) et p (la probabilité du succès). Par exemple : choisir,dans le menu Définir, l'icône correspondant à une loi binomiale puis prendre n = 10 et p = 0,5 pour visualiser à l'aide de ce logiciel, les calculs de p(x = k) où $k \in \{0, 1, \ldots, 10\}$.



Le même logiciel nous aide également à calculer et visualiser les valeurs de F(x) = p(X ≤ x) où F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X dont la loi de probabilité suit une loi binomiale $\mathscr{B}$ (n ; p). Par exemple pour n = 10 et p = 0.5 on trouve F(7) = p(X≤ 7) ≃ 0.9453



Application :

Utiliser le logiciel Sine qua non, pour résoudre chacune des deux situations suivantes :
(Ressource sur Internet : http://perso.orange.fr/patrice.rabiller/SineQuaNon/menusqn.htm)

Situation 1 :

Une usine produit des pièces pour automobiles. Sur un grand nombre de pièces fabriquées, on a constaté que 3% des pièces fabriquées doivent être rejetées.
Calculer la probabilité de trouver exactement trois pièces à rejeter dans un lot de 100 pièces prises au hasard.

Situation 2 :

Un sac contient 200 billes : 20 sont rouges, les autres sont bleues.
Les billes sont indiscernables au toucher.
1) Quelle la probabilité d'obtenir une bille rouge ?
2) Une épreuve consiste à tirer 50 fois de suite une bille, en remettant à chaque fois la bille tirée dans le sac après avoir noté sa couleur. Le nombre de fois où l'on tire une bille rouge est une variable aléatoire X.
a) Déterminer l'espérance mathématique de X.
b) Dresser le tableau donnant la loi de X.
c) Calculer la probabilité de l'évènement A : $(m-2\sigma < X \leq m+2\sigma)$ où m désigne l'espérance mathématique de X et σ son écart-type.
3) Soit F la fonction de répartition de X. Déterminer F et tracer sa représentation graphique dans un repère orthogonal convenablement choisi.

EXERCICES ET PROBLÈMES

1 Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules noires indiscernables au toucher.
On tire simultanément 3 boules de l'urne.
La variable aléatoire X est égale au nombre de boules blanches restant dans l'urne après le tirage.
1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Définir la fonction de répartition de la variable X et la représenter graphiquement.

2 Soit X une variable aléatoire. Sa loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	-3	-1	2	4	6
p_i	0,1	0,15	0,05	0,35	0,35

Soit F la fonction de répartition de X.
Calculer F(-2), F(0), F(4,2).
Représenter graphiquement la fonction F dans un repère orthogonal du plan.

3 X est une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité donnée par :

x_i	-2	-1	2	4	6
p_i	a	0,15	0,25	b	0,1

On sait que E(X) = 1,05. Calculer a et b.

4 Un sac contient 20 boules, indiscernables au toucher, dont r sont rouges, b bleues, v vertes et j jaunes. Les entiers r, b, v et j sont respectivement proportionnels à 1, 2, 3 et 4.
1) On tire une boule au hasard et on la remet. Quelles sont les probabilités des différentes couleurs ?
2) On tire une boule, on note sa couleur, on la remet. On répète trois fois cette expérience et on s'intéresse au nombre de boules bleues tirées. On définit ainsi une variable aléatoire X sur l'ensemble Ω des épreuves.
a) Donner les éléments de X(Ω).
b) Calculer P(X=k) où k ∈ X(Ω).
c) Représenter graphiquement la fonction de répartition de X.
d) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

5 Une urne contient une boule blanche, une boule rouge et trois boules noires toutes indiscernables au toucher.
1) On tire une boule. Calculer la probabilité de l'événement
A : " Il reste dans l'urne exactement deux couleurs".
2) On tire successivement et sans remise, deux boules. Calculer la probabilité pour qu'il reste dans l'urne exactement deux couleurs.
3) On tire simultanément deux boules de l'urne.
On désigne par X l'aléa numérique qui prend pour valeur le nombre de couleurs qui restent dans l'urne.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance E (X).
c) Calculer la variance et l'écart-type de X.
d) Représenter graphiquement la fonction F dans un repère orthogonal du plan.

6 Une urne contient 9 boules blanches et une boule rouge.Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1) Au cours de l'expérience qui consiste à extraire simultanément trois boules de l'urne, quelle est la probabilité d'obtenir la

boule rouge ?
2) L'expérience précédente est répétée 5 fois, avec remise à chaque fois dans l'urne, des trois boules qu'on a tiré.
Soit X le nombre de boules rouges obtenues au cours des cinq tirages.
Déterminer la loi de probabilité de X, et calculer E(X) et σ(X).

7 On lance cinq fois de suite un dé tétraédrique parfait dont les quatre faces sont numérotées de 1 à 4. Les cinq lancers sont supposés indépendants.
Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de sorties du 4 en cinq lancers.
Déterminer la loi de probabilité de X, et calculer son espérance mathématique.

8 Dans une chaîne de fabrication, 2% de pièces sont défectueuses.
On prélève une pièce, on examine si elle est défectueuse et on la replace parmi les autres. On répète 100 fois cette expérience.
On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de fois où l'on obtient une pièce défectueuse.
a)Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Cacluler E(X).

9 Une urne contient : deux boules vertes numérotées : 1, 1 et trois boules blanches numérotées : 0, 1, -1.
1)On lance une fois une pièce de monnaie parfaite:
* Si on obtient "Face", on tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
* Si non on tire successivement et avec remise deux boules de l'urne.
On s'intéresse à la somme des numéros des deux boules tirées. Soit l'évènement A :"Obtenir une somme nulle".
a) Montrer que $p(A) = \dfrac{29}{100}$.
b) Sachant qu'on a obtenu une somme nulle, quelle est la probabilité d'obtenir "Face" ?
c) On répète l'épreuve précédente n fois de suite ($n \geq 1$), en remettant à chaque fois les boules tirées dans l'urne.
Déterminer la probabilité p_n pour que l'on ait au moins une fois une somme non nulle et déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geq 0.95$.
2) On tire successivement et sans remise les cinq boules de l'urne. Soit X l'aléa numérique qui indique le rang de la première boule blanche tirée. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer l'espérance mathématique E(X) de X.
3) On tire successivement trois boules de l'urne de la manière suivantes :
* Si on obtient une boule blanche on la remet dans l'urne avant de procéder au tirage suivant. Soit Y l'aléa numérique égale au nombre de boules vertes restant dans l'une.
Déterminer la loi de probabilité de Y.
* Si on obtient une boule verte on la

10 On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de fois où l'on obtient une pièce défectueuse.
a)Déterminer la loi de probabilité de X.
b)Calculer l'espérance mathématique de X.
c)Tracer la représentation graphique de la fonction de répartition F de X.

11 1) Le nombre de clients se présentant en cinq minutes dans une station-service est une variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité : $p_i = P(X=i)$

i	0	1	2
p_i	0,1	0,5	0,4

a)Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.
b)Calculer l'espérance mathématique de X.
2) Dans cette station-service, la probabilité qu'un client achète de l'essence est 0,7 ; celle qu'il achète du gazoile est 0,3. Son choix est indépendant de celui des autres clients. On considère les événements suivants :
C_1 : " En cinq minutes, un seul client se présente " ;
C_2 : " En cinq minutes, deux clients se présentent " ;
E : " En cinq minutes, un seul client achète de l'essence " ;
a)Calculer $P(C_1 \cap E)$.
b)Montrer que $P(E / C_2) = 0,42$ et calculer $P(C_2 \cap E)$.
c)En déduire la probabilité qu'en cinq minutes un seul client achète de l'essence.
3) Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant de l'essence en cinq minutes ; déterminer la loi de probabilité de Y.

12 Une boite B_1 contient trois jetons numérotés : 0, 0 et 2.
Une boite B_2 contient quatre jetons numérotés : 1, 1, 3 et 4.
1) On tire au hasard un jeton de chaque boite et on désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur le produit des nombres inscrits sur les deux jetons tirés. Déterminer la loi de probabilité de X.
2) On effectue trois fois le tirage décrit à la question précédente, chaque jeton étant remis dans sa boite après chaque tirage.
Quelle est la probabilité d'obtenir :
a)Exactement deux fois un produit supérieur à quatre ?
b)Au plus une fois un produit supérieur à quatre ?
3)Une épreuve consiste à faire des tirages d'un jeton de la boite B_1, en remettant chaque fois le jeton tiré. On désigne par p_n la probabilité de l'évènement :
"Obtenir le jeton numéro 2 au $n^{\text{ième}}$ tirage pour la première fois".
a)Calculer P_1, P_2, P_3 puis P_n.
b)Calculer la somme $S_n = \sum_{i=1}^{n} P_i$ et $\lim_{n \to +\infty} S_n$

(D'après Bac Tunisien 1995

13 On dispose d'un dé cubique et homogène dont les faces sont numérotées: -1 ; -1 ; -1 ; 0 ; 1 ; 1.
On jette ce dé deux fois de suite et on note à chaque fois le numéro de la face supérieure.
1) Déterminer la probabilité de chacun des évènements A et B suivants :
A "Les deux numéros obtenus sont différents".
B "La somme des deux numéros obtenus est égale à 0".
2) Soit C l'évènement défini par :
C : "Les deux numéros obtenus sont différents sachant que leur somme est égale à 0".
Calculer la probabilité de l'évènement C.
3) Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme des deux numéros
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer la probabilité de l'évènement: «X > 0».

(D'après Bac Tunisien 2002)

14 Une urne contient deux jetons blancs numérotés 1 ; -1 et trois jetons noirs numérotés 1 ; 1 ; -1. Tous les jetons sont indiscernables au toucher.

1) On tire simultanément deux jetons de l'urne.

a) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A : "Obtenir deux jetons de même couleur".
B : "Obtenir deux jetons de même couleur et de même numéro".

b) On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme des numéros inscrits sur les deux jetons tirés. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

2) On tire successivement et sans remise deux jetons de l'urne.
On désigne par a le numéro inscrit sur le premier jeton tiré et par b le numéro inscrit sur le deuxième jeton tiré.
On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé les plans P et P' d'équations respectives :
$x + a y + b = 0$ et $x + b y - a = 0$.
Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

C : "P et P' sont parallèles".

D : "P et P' sont perpendiculaires".

(D'après Bac Tunisien 2003)

15 On dispose d'une urne U_1 contenant 3 boules blanches et 2 boules noires, d'une urne U_2 contenant 3 boules noires parfait dont les faces sont numérotés 0, 0, 0, 0, 1, 1. On lance une fois le dé :
- Si on obtient le nombre 0 alors on tire successivement et avec remise deux boules de U_1.
- Si non, on tire successivement et sans remise deux boules de U_2.
1)Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
E : "Obtenir deux boules de même couleur ".
F : "Obtenir exactement une boule noire".
2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque épreuve associe le nombre de boules blanches obtenues. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer $\sigma(X)$.

16 On dispose de deux sacs S_1 et S_2 et d'un dé cubique parfait. Le sac S_1 contient trois jetons blancs numérotés 0, 0, 1 et trois jetons noirs numérotés 0, 2, 2. Le sac S_2 contient deux jetons blancs numérotés 0, 1 et quatre jetons noirs numérotés 0, 0, 0, 1. Les faces du dé sont numérotées 1, 1, 2, 2, 2, 2.
1) On considère l'épreuve suivante : On lance le dé une fois.
* Si le numéro 1 apparaît, on tire simultanément deux jetons du sac S_1.
* Si le numéro 2 apparaît, on tire successivement et sans remise trois jetons du sac S_2.
a) Soient les évènements :
A : "Parmi les jetons tirés, on obtient le jeton noir numéro 1".
B : "Les jetons tirés sont noirs".
Calculer la probabilité de B et montrer que $p(A) = \dfrac{1}{3}$.

b) Calculer la probabilité de faire le tirage dans S_1 sachant que les jetons tirés sont noirs.

c) Soit X la variable aléatoire qui à chaque épreuve associe la somme des numéros marqués. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer $\sigma(X)$.

d) On répète l'épreuve 5 fois de suite. Calculer la probabilité d'obtenir le jeton noir numéro 1 parmi les jetons tirés pour la première fois à la troisième épreuve.

2) On lance le dé 3 fois de suite. On désigne par Y la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de fois où l'on obtient le numéro 2.

a) Déterminer la loi de probabilité de Y.

b) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de Y.

17 Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher portant les numéros suivants : -2 ; -1 ; 1 ; 1 ; 2.
Une épreuve consiste à tirer au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

1) On considère les évènements suivants:
A : "Aucune boule tirée ne porte le n°1".
B : "Parmi les trois boules tirées deux portent le n°1".
S : "La somme des nombres inscrits sur les deux boules qui restent dans l'urne est nulle".

a) Calculer la probabilité de chacun des évènements A et B.

b) Montrer que la probabilité de l'évènement S est égale à $\frac{3}{10}$.

2) On répète l'épreuve précédente cinq fois de suite en remettant à chaque fois les boules tirées dans l'urne. On appelle X la variable aléatoire réelle prenant pour valeur le nombre de fois où l'évènement S est réalisé.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X. *(D'après Bac Tunisien 2000)*

18 Adem possède une ficelle de 50 cm qu'il coupe au hasard. Soit X la longueur du bout de ficelle qu'il garde.

1) Définir la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

2) Calculer la probabilité de l'évènement $(20 \leq X \leq 25)$.

19 Soit X une variable aléatoire réelle uniforme sur l'intervalle [-1,1].
On pose $Y = X^2$.
Déterminer la densité de probabilité de Y ainsi que son espérance et sa variance.

20 Dans une salle de coiffure travaillent 5 coiffeurs.
Une coupe dure 20 minutes. Un client entre et constate que tous les coiffeurs sont occupés et que trois personnes attendent.
Quelle est la loi du temps d'attente de ce client ? Quelle est son espérance ? (on admettra que les coupes sont indépendantes les unes des autres et qu'elles ont débuté depuis un temps uniformément réparti entre 0 et 20 minutes).

21 Un appareil comporte six lampes toutes nécessaires à son fonctionnement. La densité de probabilité de la durée de vie d'une lampe est définie par $f(t) = \frac{1}{4}e^{-\frac{t}{4}}$ (L'unité de temps est l'année).

a) Vérifier que f ainsi définie est une densité de probabilité d'une variable aléatoire positive. Calculer son espérance mathématique et sa variance.

b) Quelle est la probabilité que l'appareil fonctionne de façon continue pendant six ans à partir de sa mise en marche ?

22 On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{2}x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1) Montrer que F satisfait aux propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire continue X.
2) Donner l'expression de la densité de probabilité f de X.
3) Représenter, dans un même repère orthogonal, les deux fonctions f et F.
4) a) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
b) Calculer la probabilité de l'évènement $(2 < X \leq 4)$ et représenter graphiquement cette probabilité.

23 On suppose que la durée d'une conversation téléphonique, mesurée en minutes, suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{10}$.

Borhène arrive à une cabine téléphonique et juste à ce moment précis, une personne passe devant lui.
1) Quelle est la probabilité qu'il attende plus de dix minutes ?
2) Quelle est la probabilité qu'il attende entre dix minutes et vingt minutes?

24 La durée de vie d'un moteur est de 5 ans et suit une loi exponentielle de paramètre a.
1) a) Montrer que $a = 0,2$.
b) On suppose que 50% des clients ont été dépannés durant la garantie montrer que la durée de cette garantie est de 3 ans et demi environ.
c) Déterminer la probabilité qu'un moteur ne tombe pas en panne avant deux ans.
2) On considère un lot de 10 moteurs fonctionnant de manière indépendante et on désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de moteurs qui n'ont pas de panne pendant les deux premières années.
a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
b) Calculer l'espérance mathématique de X.
c) Déterminer la fonction de répartition F de X.
d) Représenter graphiquement f et F dans un repère orthogonal du plan.

25 Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules : 75% de particules de type A et 25% de particules de type B.
Les particules A sont radioactives et se transforment spontanément en particules B.
On note p(t) la proportion de particules A dans le gaz, à chaque instant t.
Ainsi, à $t = 0$ on a $p(0) = 0,75$.
Plus généralement, si t est exprimé en années, on a : $p(t) = 0,75\, e^{-\lambda t}$ où λ est une constante réelle positive.
a) On admet qu'à l'instant $t = 5730$ on a : $p(t) = \frac{1}{2}\, p(0)$.
Calculer une valeur approchée décimale de λ à 10^{-5} prés par défaut.
b) Au bout de combien d'années, 10% des particules de type A seront-elles transformées en particules de type B ?
c) Déterminer la valeur de t pour laquelle il y aura autant de particules de type A que de particules de type B.

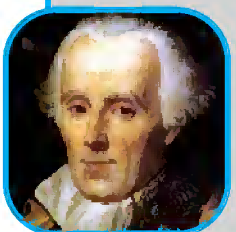
Aperçu Historique

On attribue en général à **Blaise Pascal** et à **Pierre de Fermat** l'invention au XVIIe siècle d'une première approche de la théorie des probabilités appliquée aux jeux de hasard, même si **Jérôme Cardan** s'était déjà penché sur la question dès le XVIe siècle. Cinquante ans plus tard, dans son ouvrage posthume *Ars conjectandi* (1713), **Jacques Bernoulli** systématise le calcul des probabilités, en énonçant des théorèmes prometteurs tels que l'additivité des probabilités. Au même moment, en Angleterre, **Abraham de Moivre** introduit la notion de loi normale dans son œuvre *Doctrine of Chances* (voir statistiques). Le XIXe siècle est marqué par la publication en 1814 de la *Théorie analytique* des probabilités de **Laplace**, dans laquelle la théorie des probabilités est appliquée à la mécanique et aux statistiques. Cet ouvrage aura une influence considérable sur tous les mathématiciens de ce siècle. Avec les travaux de **Darwin** et du statisticien **Quételet**, avec les travaux de Maxwell sur la théorie cinétique des gaz, ceux de **Boltzmann** sur la mécanique statistique, la vision probabiliste du monde s'affirme encore davantage, englobant tous les domaines de la science. À la fin du XIXe siècle, le Russe **Tchebychev** rend beaucoup plus rigoureuse la théorie, généralise la loi des grands nombres, que Markov reprend sous l'angle des processus dits stochastiques. Au XXe siècle, **Émile Borel** définit la probabilité à partir de la notion de mesure, et **Andreï Kolmogorov** développe une présentation axiomatique de la théorie. Aujourd'hui, les probabilités possèdent un vaste champ d'application, allant de la conception des ordinateurs à l'étude des queues ou files d'attentes (voir théorie des files d'attentes).

Blaise Pascal
(1623 - 1662), mathématicien, physicien et philosophe, français du XVIIe siècle.

Pierre de Fermat
(1601 - 1665), mathématicien français de XVIIème siècle.

Daniel Bernoulli
(1700-1782) Pays-Bas.
Bernoulli, famille de mathématiciens et physiciens suisses qui se sont distingués aux XVIIe et XVIIIe siècles, notamment par leurs travaux en calcul infinitésimal et en mécanique des fluides.



Pierre-Simon Laplace
(1749 - 1827) mathématicien, astronome et physicien français. La place a développé la théorie des probabilités dans "Essai philosophique sur les probabilités". Ses premiers travaux sur les probabilités ont commencé entre 1771 et 1774, notemment la redécouverte aprés Bayes des probabilités inverses, dites Loi de Bays-La place, ancêtre des statistiques inférentielles.