Partie 2

Chapitre 5

Probabilité sur un ensemble fini

Plan du chapitre

❋	**Activités préliminaires**	
❋	**Cours**	
	❖	Probabilité sur un ensemble fini
	❖	Probabilité uniforme
	❖	Probabilité conditionnelle
	❖	Évènements indépendants
	❖	Principe des probabilités composées
	❖	Principe des probabilités totales - Formule de Bayes
❋	**Résumé du cours**	
❋	**Avec L'ordinateur**	
❋	**Exercices et Problèmes**	
❋	**Aperçu Historique**	

ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

1 Dans un parking de 6 places, combien y-a-t'il de façons de garer trois voitures?

2 Un club de basket-ball comporte 12 joueurs inscrits. Combien d'équipes différentes de 5 joueurs peut-il former?

3 Déterminer le nombre de façons de placer trois objets a, b et c dans deux cases x et y, chaque case ne peut contenir qu'un seul objet.

4 Déterminer le nombre de façons de placer trois objets a, b et c dans deux cases x et y, chaque case ne peut contenir qu'un seul objet.

5

1) On lance une fois une pièce de monnaie non truquée. Quelle est la probabilité d'obtenir pile ?

2)a)On tire, au hasard, une carte d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir la Dame de cœur ?

b) On tire, du jeu précédent, simultanément 3 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un Roi ?

3) On jette, une fois, un dé cubique non truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre impair ?

4) On jette, 3 fois de suite un dé cubique parfait. Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre 2, 4 et 6 ?

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et p un entier tel que $1 \leq p \leq n$.

- Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble à n éléments est :

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$$

- Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

• Soit E un ensemble de p éléments et F un ensemble de q éléments.
Le nombre d'applications de E dans F est :

$$(\text{card } F)^{(\text{card } E)} = q^p$$

• Soit E un ensemble de n éléments.
Le nombre de parties de E est

$$\text{card } \wp(E) = 2^n$$

• Pour tous réels a et b et pour tout entier naturel n, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

6 On lance, une fois, un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 a 6.
On s'intéresse au numéro de la face supérieure.
Ce dé est truqué de sorte que la probabilité d'apparition de chaque numéro soit proportionnelle à ce numéro.

1) Calculer la probabilité d'apparition de chaque numéro.

2) Calculer la probabilité des évènements suivants :

A : “ Obtenir un numéro pair “ ; B : “Obtenir un numéro impair “

C : “ Obtenir un numéro supérieur ou égal à 2 “ ; D : “ Obtenir un numéro premier “

COURS

Probabilité sur un ensemble fini

Langage des probabilités

- On appelle univers (ou univers des possibles), l'ensemble des résultats (ou éventualités) possibles d'une expérience aléatoire. Cet ensemble se note Ω.
- Toute partie A de Ω est appelée événement.
- Si $A = \varnothing$, on dit que A est l'événement impossible.
- Si $A = \Omega$, on dit que A est l'événement certain.
- Si A est une partie contenant un seul élément de Ω, on dit que A est un événement élémentaire.
- L'évènement $A \cap B$ est l'évènement « A et B ». Il est réalisé si les deux événements A et B sont réalisés simultanément.
- L'événement $A \cup B$ est l'évènement « A ou B ». Il est réalisé si l'un au moins des deux événements A et B est réalisé.
- L'ensemble $\Omega \setminus A$, qu'on note $\overline{A}$, est l'événement contraire de A. Il est réalisé si et seulement si A n'est pas réalisé.
- Deux événements A et B sont dits incompatibles s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps. C'est-à-dire si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.
- Si A et B sont deux évènements de Ω tels que $A \subset B$ alors $B \setminus A$ désigne l'ensemble des éléments de B qui n'appartiennent pas à A.

Activité 1

Dans un lycée, 40% des élèves pratiquent des activités sportives ; 35% des élèves pratiquent des activités culturelles et 10% pratiquent des activités culturelles et sportives.

Un élève est choisi au hasard.

1) Quelle est la probabilité pour qu'il pratique des activités culturelles ou sportives ?
2) Quelle est la probabilité pour qu'il ne pratique ni des activités culturelles ni des activités sportives ?
3) Quelle est la probabilité pour qu'il pratique des activités culturelles et non sportives ?

Définition d'une probabilité

Soit Ω un univers fini. On appelle probabilité définie sur l'ensemble $\wp(\Omega)$ des parties de Ω, toute application p de $\wp(\Omega)$ dans [0,1] vérifiant :

- $p(\Omega) = 1$.
- Pour tous événements A et B tels que $A \cap B = \varnothing$ on a : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Propriétés

Soient Ω un univers fini, $\wp(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω, p une probabilité sur $\wp(\Omega)$ et A et B deux événements. On a :

- La somme des probabilités de tous les événements élémentaires est égale à 1.
- La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires dont la réunion est A.
- $0 \leq p(A) \leq 1$
- Si $A \subset B$ alors $p(B \setminus A) = p(B) - p(A)$ et $p(A) \leq p(B)$.
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
- $p(\varnothing) = 0$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Activité 2

À la sortie d'un atelier de production, une vérification est faite sur la qualité des pièces produites et on a constaté la présence de deux types de défaut pouvant les rendre impropres à la vente : Un défaut dû à la conception et un défaut dû au montage.
Des statistiques ont montré que :
5% des pièces présentent un défaut dû à la conception parmi lesquelles 25% présentent aussi un défaut dû au montage.
Parmi les pièces ne présentant pas de défaut dû à la conception, 3% présentent un défaut dû au montage.
On désigne par A et B les évènements suivants :
A : " la pièce choisie présente un défaut dû à la conception "
B : " la pièce choisie présente un défaut dû au montage " .

a) Calculer $p(A)$
b) Calculer $p(A \cap B)$
c) Calculer $p(\overline{A} \cap B)$
d) En déduire $p(B)$.
e) Calculer $p(A \cup B)$.
f) Calculer la probabilité d'obtenir une pièce sans défaut.

Activité 3

Dans le tableau ci-dessous, on a consigné des informations concernant 1000 entrées dans un musée :

	Visiteurs tunisiens	Visiteurs étrangers	Total
Hommes	100	250	
Femmes	90		
Enfants	220	70	
Total			

1) Recopier et compléter le tableau.
2) On suppose que chacun des visiteurs présente un billet à l'entrée qu'il remet à la sortie.
Un billet est pris parmi les billets remis.
a) Déterminer la probabilité des événements suivants :
A : « Le billet est celle d'une femme ».
B : « Le billet est celle d'une personne de nationalité étrangère ».
C : « Le billet est celle d'un enfant tunisien ».
b) Calculer $p(A \cap B)$ et $p(A \cup B)$.
c) Le billet choisi est celle d'un homme, quelle est la probabilité pour qu'il soit tunisien?

Probabilité uniforme

Définition

Soient $\Omega = \{ w_1, w_2, w_3, ..., w_n \}$ et p une probabilité définie sur $\wp(\Omega)$.
Lorsque tous les évènements élémentaires ont la même probabilité d'être réalisés, on dit que p est une probabilité uniforme ou une équiprobabilité.
Dans ce cas on a :

- $p(\{w_1\}) = p(\{w_2\}) = ... = p(\{w_n\}) = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{\text{card } \Omega}$
- Pour tout évènement A on a : $p(A) = \dfrac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$ (C'est le quotient du nombre des cas favorables à la réalisation de A par le nombre des cas possibles).

Activité 1 (résolue)

On lance simultanément deux dés cubiques non truqués A et B dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse aux nombres inscrits sur les faces supérieures des deux dés.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 7 ?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir un produit égal à 6 ?

Solution :

a) Ω est l'ensemble des couples (a,b) avec a et b deux entiers compris entre 1 et 6 donc Card Ω = 36

Une somme égale à 7 peut s'obtenir de six façons différentes : (1, 6) ; (6 , 1) ; (2 , 5) ; (5 , 2) ; (3 , 4) ; (4 , 3). Si on désigne par A l'événement: « obtenir une somme égale à 7 » alors card A = 6 et par suite $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

b) Un produit égal à 6 s'obtient de 4 façons différentes : (1 ,6) ;(6,1) ;(2,3) ;(3,2). Si on désigne par B l'événement: « obtenir un produit égal à 6 » alors p(B)= $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

Activité 2 (résolue)

D'un jeu de 32 cartes, on tire simultanément 3 cartes.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir un as ?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un roi?

c) Quelle est la probabilité d'obtenir un valet ou un pique ?

Solution :

2) Le nombre des résultats possibles est égal au nombre de façons de choisir 3 objets parmi 32. On a donc $\text{card}\,\Omega = C_{32}^{3} = 4960$.

a) Pour qu'il y ait un as parmi les 3 cartes, il faut choisir un des 4 as et 2 cartes parmi les 28 cartes qui ne sont pas des as. Si on note C l'événement « obtenir un as » alors

$$p(C)=\frac{C_4^1\times C_{28}^2}{C_{32}^3}=\frac{189}{620}\approx 0,30 .$$

b) Si on désigne par D l'événement « obtenir au moins un roi » alors $\overline{D}$ est réalisé si on n'obtient pas de rois.

On a : $p(\overline{D})=\frac{C_{28}^3}{C_{32}^3}=\frac{819}{1240}\approx 0,66$ donc : $p(D)=1-p\left(\overline{D}\right)=\frac{421}{1240}\approx 0,33$.

c) L'événement E «obtenir un valet ou un pique» est réalisé si on obtient un, parmi les huit piques ou un valet trèfle ou un valet cœur ou un valet carreau

$$p(E)=\frac{C_{11}^1\times C_{21}^2}{C_{32}^3}=\frac{231}{496}\approx 0,47$$

Activité 3

Une urne contient quatre boules rouges, trois boules blanches et deux boules noires.
On tire au hasard, successivement et sans remise, trois boules de l'urne.
Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A : " Obtenir trois boules rouges "
B : " Obtenir trois boules de même couleur "
C : " Obtenir au moins une boule rouge "
D : " Obtenir les deux boules noires "

Activité 4

Un sac contient quatre boules blanches numérotés : 1, 2, 2, 2 et trois boules noires numérotés : 1, 1, 2.

1) On tire au hasard, successivement et avec remise, trois boules du sac. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : " Tirer trois boules de même couleurs ".
   B : " Tirer une seule boule blanche ".
   C : " Tirer deux boules qui portent le numéro 2 ".
   D : " Tirer au moins une boule blanche ".
   E : " Tirer une seule boule blanche et une seule boule qui porte le numéro1 ".
2) On tire successivement trois boules dans les conditions suivantes :
   - Si la boule tirée porte le numéro 1 ; elle n'est pas remise dans le sac.
   - Si la boule tirée porte le numéro 2 ; elle est remise dans le sac.
   Calculer la probabilité des événements suivants :
   F : " Tirer trois boules blanches".
   G : " Tirer une seule boule qui porte le numéro 1 ".
   H : " Tirer une seule boule qui porte le numéro 2 ".

Activité 5

Un sac contient 8 jetons : trois jetons rouges numérotés : 1, 1, 0 ; trois jetons jaunes numérotés : 1, 0, -1 et deux jetons verts numérotés : 2, -1. On tire au hasard et simultanément trois jetons du sac.

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : " Tirer trois jetons portant le même numéro "
   B : " Tirer trois jetons de la même couleur "
   C : " Tirer exactement deux jetons rouges et un seul jeton portant le numéro 0 "
   D : " Tirer exactement deux jetons jaunes ou deux jetons portant des numéros positifs ".
2) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   S : " Tirer trois jetons portant des numéros de somme nulle "
   N : " Tirer trois jetons portant des numéros de produit égal à 0 "
3) Calculer la probabilité de tirer trois jetons portant des numéros de produit égal à 0 sachant que leur somme est nulle.

Tirage de p jetons d'un sac contenant n jetons ($p \leq n$)

Type de tirages :	Successifs et avec remise	Successifs et sans remise	Simultanés
Ordre :	L'ordre intervient	L'ordre intervient	L'ordre n'intervient pas
Un cas possible :	Un p-uplet avec possibilité de répétition	Un p-uplet d'éléments deux à deux distincts	Une partie de p éléments
Card Ω :	n^p	A_n^p	C_n^p

Probabilité conditionnelle

Définition et propriétés

Activité 1

Dans une entreprise, la répartition des 100 agents d'encadrement est donnée dans le tableau suivant :

	Hommes	Femmes
Cadres administratifs	10	20
Cadres techniques	50	20

On choisit, au hasard, une personne parmi ces 100 agents.

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : " La personne choisie est un cadre administratif ".
   B : " La personne choisie est un homme ".
   C : " La personne choisie est un cadre administratif sachant que c'est un homme".

2) a) Calculer $p(A \cap B)$

   b) Comparer $p(C)$ et $\dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

Activité 2

Dans un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard.
Soit A l'événement :« La carte tirée est un roi ou un as » et B l'événement: « La carte tirée est un cœur ».

1) Calculer $p(A)$, $p(B)$ et $p(A \cap B)$.
2) On suppose que l'on sait (parce qu'une personne nous l'a dit) que la carte tirée est un cœur.

a) Quelle est la probabilité P pour que ce soit un roi ou un as ?

b) Comparer P et $\dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

Définition

Soient Ω un univers, p une probabilité définie sur $\wp(\Omega)$ et A et B deux événements tels que $p(B) \neq 0$.
On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B et on lit :

" Probabilité de A sachant B ", le nombre réel : $p(A / B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$.
On note aussi $p(A / B) = p_B(A)$.

Activité 3

On jette simultanément, une fois, deux dés cubiques parfaits non identiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse aux nombres inscrits sur les faces supérieures des deux dés. Soient les évènements suivants :
A : " Les nombres amenés par les deux dés sont différents ".
B : " La somme des nombres amenés par les deux dés est égale à 7 "
C : " La somme des nombres amenés par les deux dés est égale à 4 ".
D : " La somme des nombres amenés par les deux dés est égale à 12 ".

1) Calculer $p(A)$, $p(A \cap B)$; $p(A \cap C)$; $p(A \cap D)$ et $p(B \cap C)$.
2) Calculer $p(\Omega / A)$; $p(B / A)$; $p(C / A)$ et $p(D / A)$.
3) Calculer $(B \cup C / A)$ et comparer le résultat avec $p(B / A) + p(C / A)$.
4) Calculer $p(\overline{B} / A)$ et comparer le résultat avec $1 - p(B / A)$.

Propriétés

Soient Ω un univers, p une probabilité définie sur $\wp(\Omega)$ et B un événement tel que $p(B) \neq 0$.

- On a: $p(\Omega / B) = 1$.
- Pour tous évènements incompatibles A_1 et A_2 on a:
  $p(A_1 \cup A_2 / B) = p(A_1 / B) + p(A_2 / B)$.
- Pour tout événement A on a: $p(\overline{A} / B) = 1 - p(A / B)$,

Activité 4

Une boîte contient trois boules rouges et sept boules blanches indiscernables au toucher. On tire, simultanément et au hasard, trois boules de la boîte.

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : « Obtenir une boule rouge »
   B : « Obtenir au moins une boule blanche »
2) a) Calculer $p(A / B)$ et $p(B / A)$
   b) Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge sachant qu'au moins deux boules blanches sont tirées.
3) Comparer $p(A / B)$ à $p(A)$ et $p(B / A)$ à $p(B)$.

Évènements Indépendants

Activité 1

On lance simultanément, deux dés parfaits non identiques et on appelle A l'évènement: « Le premier dé amène un nombre pair » et B l'évènement: « Le deuxième dé amène un nombre impair ».

a) Calculer $p(A)$; $p(B)$ et $p(A \cap B)$.
b) Comparer $p(A \cap B)$ au produit $p(A) . p(B)$.
c) Calculer $p(A / B)$

Définition

Soient Ω un univers, p une probabilité définie sur $\wp(\Omega)$ et A et B deux événements. A et B sont dits indépendants si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) . p(B)$
Ce qui équivaut à : $p(A / B) = p(A)$ si $p(B) \neq 0$.

Remarque :
Deux événements A et B sont dits indépendants lorsque la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation de l'autre.

Activité 2

Soient Ω un univers et A et B deux événements de probabilités non nulles.
Montrer que : (A et B sont indépendants) équivaut à ($\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants)

Activité 3

On lance, une fois, un dé cubique dont les faces numérotées 1, 2, 3, 4 et 5 sont blanches et la face numérotée 6 est rouge. Soient A et B les événements définis par :
A : « La face supérieure porte un nombre pair ».
B : « La face supérieure est rouge ».
Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifiez votre réponse.

Activité 4

Considérons une famille ayant n enfants et notons l'ensemble des différentes répartitions possibles des sexes des enfants (en respectant l'ordre de naissance). On suppose que toutes les répartitions possibles sont équiprobables.
Soient M et F les évènements définis par :
M: « La famille a des enfants des deux sexes ».
F : « La famille a au plus une fille ».
1) Pour n = 2, montrer que les évènements M et F ne sont pas indépendants.
2) Pour n = 3, montrer les évènements M et F sont indépendants.

3) a) Montrer que pour $n \geq 2$; $p(M) = \dfrac{2^n - 2}{2^n}$, $p(F) = \dfrac{n+1}{2^n}$ et $p(M \cap F) = \dfrac{n}{2^n}$

b) En déduire que M et F ne sont indépendants que dans le cas d'une famille de 3 enfants.

Activité 5

Un sondage révèle que 20% des individus lisent des revues hebdomadaires, 30% lisent des revues mensuelles et 10% lisent les deux types de revues.
1) Un individu interrogé est choisi au hasard. Les événements A et B suivants sont-ils indépendants :
A : « L'individu lit des revues mensuelles »
B : « L'individu lit des revues hebdomadaires »
2) Calculer la probabilité pour qu'un individu interrogé lise des revues mensuelles sachant qu'il lit des revues hebdomadaires.
3) Calculer la probabilité pour qu'un individu interrogé lise des revues hebdomadaires sachant qu'il lit des revues mensuelles.

Principe des probabilités composées

Activité 1

Soient Ω un univers, p une probabilité définie sur Ω et A et B deux événements de Ω.
1) Vérifier que si $p(A) = 0$ alors $p(A \cap B) = 0$.
2) On suppose que $p(A) \neq 0$. Montrer que $p(A \cap B) = p(A) \,.\, p(B / A)$
3) Vérifier que si $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ alors $p(A) \,.\, p(B/A) = p(B) \,.\, p(A/B)$
4) Soient A , B et C trois évènements de Ω tels que $p(A) \neq 0$, $p(B) \neq 0$ et $p(A \cap B) \neq 0$

En utilisant $p(C/A \cap B) = \dfrac{p(A \cap B \cap C)}{p(A \cap B)}$, montrer que:

$p(A \cap B \cap C) = p(A) \,.\, p(B/A) \,.\, p(C/(A \cap B))$.

Principe des probabilités composées

Soient Ω un univers, p une probabilité définie sur $\wp(\Omega)$ et A, B et C trois événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$. On a:
- $p(A \cap B) = p(B) . p(A / B) = p(A) . p(B / A)$
- $p\left(A \cap B \cap C\right) = p(A) . p\left(B/A\right) . p\left(C/(A \cap B)\right)$.

Activité 2

Le personnel d'une entreprise est composé de 32% de femmes. Parmi celles-ci 70% ont moins de 30 ans. Quelle est la probabilité pour qu'un employé, choisi au hasard, soit une femme et ait moins de 30 ans ?

Activité 3 (résolue)

Dans une usine de fabrication de boulons, une machine M assure 40% de la production totale. Une étude a révélé que 10% des boulons produits par la machine M sont défectueux. On choisi au hasard un boulon, quelle est la probabilité pour que le boulon choisi provienne de la machine M et soit défectueux ?

Solution :

On note A l'évènement: « Le boulon choisie provient de la machine M » ; B l'évènement : « Le boulon est défectueux » et C l'évènement :« Le boulon choisi provient de la machine M et est défectueux ».On demande de calculer p(C).
On peut dire que $p(C) = p\left(A \cap B\right) = p(A) . p\left(B / A\right) = 0,4 \times 0,1 = 0,04$.

Activité 4

On dispose de trois boîtes B_1 ; B_2 et B_3 d'apparence identiques qui contiennent respectivement deux ; trois et quatre fiches, dans chacune des boîtes une seule fiche est marquée.
Une épreuve consiste à désigner, au hasard, une boîte et tirer également, au hasard, une fiche de cette boîte. Si la fiche tirée est marquée le joueur reçoit un cadeau.
Soient les évènements suivants:
A_1 :«Désigner la boite B_1 et tirer une fiche marquée»;
A_2:« Désigner la boite B_2 et tirer une fiche marquée » ;
A_3 :« Désigner la boite B_3 et tirer une fiche marquée » ;
A : « la fiche tirée est marquée ».

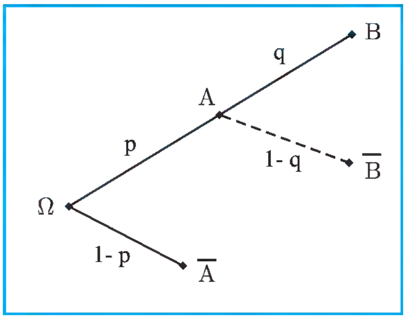
1) a) Calculer $p(A_1)$; $p(A_2)$ et $p(A_3)$.
   b) Calculer p(A).
2) Le joueur a tiré une fiche marquée. Quelle est la probabilité que ce soit celle de la boîte contenant deux fiches ?

Principe « Stochastique fini »

Ce principe s'intéresse à une **succession finie** d'expériences aléatoires.
Par exemple :
- Choisir une urne parmi trois urnes numérotées.
- Puis, dans l'urne choisie, tirer une boule, parmi des noires et des blanches.

Soient A: « L'urne choisie est de numéro 1 » et B: « La boule tirée est noire ».
On s'intéresse à l'évènement (A puis B) c'est-à-dire à l'évènement K : « La boule tirée est noire et provient de l'urne n°1». Ainsi, $p(K) = p(A \cap B) = p(A).p\left(B/A\right)$.
Si on connaît la probabilité de A et la probabilité de B lorsque A est réalisé alors on peut tirer la probabilité de l'évènement K.
Dans ce type d'expériences aléatoires successives, il est parfois commode d'utiliser un **diagramme en arbre** : les « branches » successives traduisent la succession des évènements, et sur chacune des branches on peut marquer la probabilité associée (on obtient ainsi, un **arbre pondéré**).

Si p(A) = p et p(B/A) = q alors
p(K) = p(A puis B) = p.q ;
De même p(A puis $\overline{B}$) = p.(1-q) .



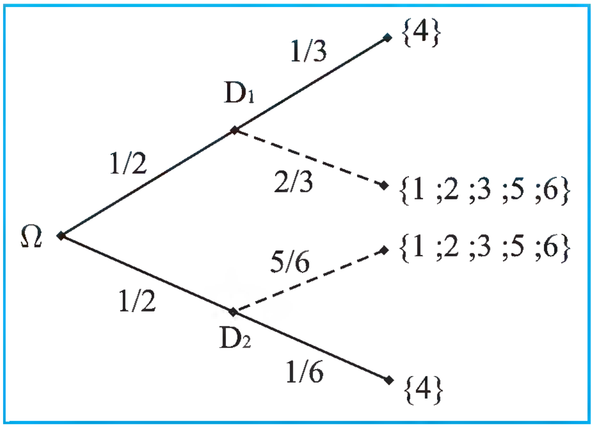
Remarques :

* Cette technique s'applique également, pour calculer la probabilité de (A puis B puis C) etc.
* La somme des nombres associés à toutes les branches de même origine est égale à 1.

Activité 5 (résolue)

On dispose de deux dés cubiques en apparence identiques dont l'un est parfait et l'autre truqué.
Les faces de chacun d'eux sont numérotées de 1 à 6.
Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir la face portant le chiffre 4 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$.
On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on le lance une fois.
Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A : « Choisir le dé truqué et obtenir la face portant le chiffre 4 » ;
B : « Choisir le dé parfait et obtenir la face portant le chiffre 4 » ;
C: « Obtenir la face portant le chiffre 4 ».

Solution : On pourra utiliser un **diagramme en arbre**.
En effet, il y'a deux étapes successives : le choix du dé puis obtenir la face portant le chiffre 4 lors du lancer du dé qui a été choisi.
« choisir le dé truqué D_1 » et « choisir le dé parfait D_2 » sont deux évènement de même probabilité égale à 0,5.



La probabilité de A est donc :
$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$
La probabilité de B est :
$\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$
L'évènement C est la réunion des deux évènements incompatibles A et B. Donc

$$p(C)=p(A)+p(B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$$

Activité 6

Une entreprise fabrique des appareils électroniques.
La probabilité pour qu'un appareil ainsi fabriqué fonctionne parfaitement est égale à 0,9.
On fait subir à chaque appareil fabriqué un test avant sa livraison. On constate que:
- quand un appareil est en parfait état de fonctionnement il est toujours accepté à l'issue du test.
- quand un appareil n'est pas en parfait état de fonctionnement, il peut-être néanmoins accepté, avec une probabilité $\frac{1}{11}$.

On note A l'événement :« L'appareil est accepté à l'issue du test » et F l'évènement: « L'appareil fonctionne parfaitement ».
- Calculer la probabilité de A.
- Sachant que l'appareil est accepté à l'issue du test, quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne parfaitement.

Principe des probabilités totales Formule de Bayes

Activité 1

Soient Ω un univers et A et B deux événements de Ω tels que $p(B) \neq 1$ et $p(B) \neq 0$:

a) En remarquant que $A = A \cap \Omega$ et $B \cup \overline{B} = \Omega$ montrer que $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

b) En déduire que $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})$

c) Prouver alors, que $p(A) = p(B) \,.\, p(A / B) + p(\overline{B}) \,.\, p(A / \overline{B})$

d) Montrer que $p(B / A) = \dfrac{p(B).p(A / B)}{p(B).p(A / B) + p(\overline{B})p(A / \overline{B})}$

Principe des probabilités totales

Soient Ω un univers, pune probabilité définie sur $\wp(\Omega)$ et A et B deux événements tels que $p(A) \neq 1$ et $p(A) \neq 0$. On a :

$$p(B) = p(A) \,.\, p(B / A) + p(\overline{A}) \,.\, p(B / \overline{A})$$

Plus généralement :

Si $A_1 \cup A_2 \cup A_3 ... \cup A_n = \Omega$; $A_i \cap A_j = \varnothing$ (pour tous i et j tels que $i \neq j$)

et $\forall k \in \{1,2,...,n\}, p(A_k) \neq 0$ alors pour tout évènement B on a:

$$p(B) = \sum_{k=1}^{n} p(A_k).p(B / A_k).$$

Formule de Bayes

Soient Ω un univers et A et B deux événements tels que $p(B) \neq 0$, $p(B) \neq 1$ et $p(A) \neq 0$. On a : $p(B /A) = \dfrac{p(B).p(A /B)}{p(B).p(A /B) + p(\overline{B}).p(A /\overline{B})}$

Activité 2 (résolue)

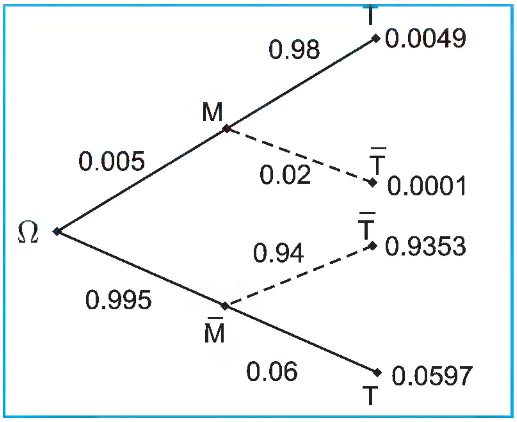
Dans une population un individu sur 200 est atteint par une maladie.
Une personne de cette population passe un test pour dépister cette maladie ; ce test s'avère positif. On sait que :

- Chez les personnes malades, le test est positif dans 98% des cas.
- Chez les personnes non malades, le test est négatif dans 94% des cas.

Déterminer la probabilité que la personne soit réellement malade.

Solution :

On considère l'arbre pondéré ci-contre :
Où M désigne l'évènement: « La personne est malade » et T désigne l'évènement: « Le test est positif ».
La probabilité que la personne soit réellement malade est alors,



$$p(M/T) = \frac{p(M).p(T/M)}{p(M).p(T/M) + p(\overline{M}).p(T/\overline{M})}$$

C'est-à-dire : $\dfrac{0.005 \times 0.98}{0.005 \times 0.98 + 0.995 \times 0.06} = \dfrac{0.0049}{0.0646} \simeq 0.076$

On pourra calculer cette probabilité autrement : elle est égale

$$1 - p(\overline{M}/T) = 1 - \frac{p(T \cap \overline{M})}{p(T)} = 1 - \frac{0,0597}{0,0049 + 0,0597} \approx 0,076.$$

Activité 3

On considère un jeu de 32 cartes et un jeu de 52 cartes. On choisit l'un de ces deux jeux et on y tire une carte. On constate que c'est une dame.
Montrer que la probabilité qu'elle vienne du jeu de 32 cartes est égale $\dfrac{13}{21}$.

Activité 4

Une urne contient une boule rouge et deux boules vertes.
On tire une première boule, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule de la même couleur et on tire une seconde boule de l'urne.
On désigne par :

R : « Tirer une boule rouge au premier tirage »;
V : « Tirer une boule verte au premier tirage »;
A : « Tirer une boule rouge au deuxième tirage ».

1) Calculer $p(R)$, $p(V)$, $p(A/R)$ et $p(A/V)$.
2) En déduire $p(A \cap R)$, $p(A \cap V)$ puis $p(A)$.
3) Calculer $p(R/A)$.
4) R et A sont-ils indépendants ?

Activité 5

On dispose de trois urnes U_1, U_2 et U_3 .

U_1 et U_2 contiennent chacune : deux boules rouges et trois boules noires.

U_3 contient quatre boules rouges et une boule noire.

On choisit deux urnes au hasard et on extrait une boule de chaque urne.

1) On considère les évènements suivants :

A : " Les deux urnes choisies ont la même composition "

et B : " Tirer deux boules noires ".

a) Calculer $p(A)$ puis $p(\overline{A})$

b) Calculer $p(B / A)$ puis $p(B \cap A)$

c) Calculer $p(B \cap \overline{A})$ puis $p(B)$.

2) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

C : " Tirer deux boules de même couleur "

D : " Tirer deux boules de couleurs différentes "

3) On vient de tirer deux boules de même couleur. Quelle est la probabilité d'avoir choisi deux urnes de même composition ?

Activité 6

On choisit un dé au hasard parmi un lot de 100 dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Parmi ces dés 25 sont pipés.

Pour un dé pipé, la probabilité d'obtenir 6 est $\frac{1}{2}$.

On lance une fois le dé choisi et on obtien la face numérotée 6.

a) Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

b) On relance alors ce dé et on obtient à nouveau la face numérotée 6.

Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

c) On procède à des répétions successives de l'expérience et on désigne par S_n l'évènement: « Obtenir 6 aux n premiers lancers » et par A, l'évènement: « Le dé est pipé».

Montrer que $p(S_n / A) = \dfrac{1}{1+(\frac{1}{3})^{n-1}}$ et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p(S_n / A)$.

RÉSUMÉ DU COURS

Soient Ω un univers fini, $\wp(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω , p une probabilité sur $\wp(\Omega)$ et A, B deux événements. On a :

* $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
* $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, lorsque A et B sont incompatibles ($A \cap B = \varnothing$).

* Si p est une probabilité uniforme ou une équiprobabilité on a $p(A) = \dfrac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$
* Soient A et B deux évènements tels que $p(B) \neq 0$. **La probabilité conditionnelle de A sachant B** est le nombre réel $p(A / B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$
* A et B sont indépendants si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) . p(B)$

Le principe des probabilités composées :

* Si A et B sont deux événements tels que $p(A) \neq 1$ et $p(A) \neq 0$ alors on a :
$p(A \cap B) = p(B) . p(A / B) = p(A) . p(B / A)$
* Si A et B sont deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ alors on a :
$p(A \cap B \cap C) = p(A).p(B / A).p(C / A \cap B)$

Le principe des probabilités totales :

* Si A et B sont deux événements tels que $p(A) \neq 1$ et $p(A) \neq 0$ alors on a :
$p(B) = p(A) . p(B / A) + p(\overline{A}) . p(B / \overline{A})$

La formule de Bayes :

* Si A et B sont deux événements tels que $p(B) \neq 0$, $p(B) \neq 1$ et $p(A) \neq 0$ alors on a : $p(B / A) = \dfrac{p(B).p(A / B)}{p(B).p(A / B) + p(\overline{B}).p(A / \overline{B})}$

AVEC L'ORDINATEUR

Activité 1

Un sac contient 500 boules indiscernables au toucher dont n boules sont blanches ($n \geq 2$) et les autres sont noires. Une épreuve consiste à tirer, au hasard, successivement deux boules du sac.

Soit A l'évènement: « Les deux boules tirées sont de même couleur »

a) Sachant que le tirage est avec remise, calculer en fonction de n, la probabilité p de A.

b) Elaborer un programme permettant :

- la saisie de n.
- le calcul de p.
- l'affichage du résultat.
- faire varier n et déterminer la valeur de n pour laquelle p est voisin de 0,5.

Activité 2

Simulation, par l'ordinateur, de plusieurs lancers d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1) Simulation de 100 lancers du dé :

-Préparer une feuille Excel et taper, dans la cellule A_1 la formule:

= 1+ENT (ALEA ()*6) puis taper **entrée** pour obtenir un chiffre k porté par une face du dé.

- **Copier** la cellule A_1. **Sélectionner** la plage de la cellule A_1 jusqu'à E_{20} puis **coller.**

On obtiendra 100 nombres (aléatoires) choisis au hasard par l'ordinateur.

- Cliquer sur une cellule vide en dehors de la plage $A_1 : E_{20}$ et taper plusieurs fois sur la touche **Suppr** du clavier. On remarque que cela relance une génération de 100 nombres aléatoires k tels que $k \in \{1,2,3,4,5,6\}$

- Cliquer successivement, dans le menu **Outils / Option / Calcul / Ordre** (dans le but d'éviter la réactualisation de la feuille de calcul à chaque modification).

Pour afficher, les pourcentages successifs d'apparition des numéros : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6 C'est-à-dire les probabilités respectives d'obtenir les faces 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6 du dé lors des 100 lancers simulés par l'ordinateur,on utilisera la formule:

= NB.SI(A1 : E20 ; k) pour tout $k \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

Par exemple : pour comptabiliser le nombre d'apparition de 1, on tape dans une cellule vide la formule = NB.SI ($A_1 : E_{20}$; 1) puis on tape Entrée.

- Compléter alors, le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6
Nombre d'apparition de k						
Probabilités : p_k						

- 2) Simuler, par l'ordinateur, 1000 lancers du dé.

EXERCICES ET PROBLÈMES

1 On lance un dé pipé tel que $p_1 = p_3$; $p_2 = p_4$ et $p_5 = p_6 = 2p_1 = 3p_2$ où pi est la probabilité d'apparition de la face portant le chiffre i.

1) Déterminer la probabilité d'apparition de chaque face.

2) Déterminer la probabilité des événements suivants :

A : " la face apparente porte un nombre pair ".

B : " la face apparente porte un nombre supérieur ou égal à 5 ".

2 Dans un sac on place 3 boules rouges, 5 vertes et 7 jaunes. On tire successivement 2 boules du sac avec remise de la boule après le premier tirage.

1) Déterminer le nombre de tirages possibles.

2) Déterminer la probabilité des événements suivants :

A : "les deux boules tirées sont rouges "

B : " les deux boules tirées sont jaunes "

C : " le tirage est unicolore "

D : " le tirage est bicolore "

3 Une urne contient deux boules blanches portant respectivement les numéros 1 et 4 et quatre boules noires portant respectivement les numéros 2, 3, 5 et 7.

1) On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

Quelle est la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : " Les deux boules tirées portent des numéros impairs "

B : " Les deux boules tirées sont de la même couleur "

C : "Les deux boules tirées portent des numéros impairs et sont de la même couleur".

D : "Les deux boules tirées portent des numéros impairs ou sont de la même couleur ".

2) On tire successivement et avec remise deux boules de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

E : "Les deux boules tirées sont de parités différentes".

F : "Obtenir au moins une boule noire ".

4 Une urne contient quatre boules blanches et deux boules rouges. Les boules sont indiscernables au toucher.

On effectue n tirages successifs d'une boule en respectant la règle suivante :

Si la boule tirée est rouge on la remet dans l'urne ; si elle est blanche on ne la remet pas.

1) Dans cette question on prend $n = 3$.

Pour chaque entier $k \in \{1, 2, 3\}$, on note E_k l'événement :

"Seule la $k^{ième}$ boule tirée est blanche ".

a) Montrer que la probabilité de l'événement E_1 est $p(E_1) = \dfrac{8}{75}$.

b) Calculer $p(E_2)$ et $p(E_3)$.

c) En déduire la probabilité de l'événement

E : "Une seule boule est blanche parmi les trois boules tirées".

d) Sachant que E est réalisé, quelle est la probabilité pour que la boule blanche soit obtenue au 1^{er} tirage ?

2) Dans cette question on suppose que $n \geq 2$.

a) Déterminer, en fonction de n, la probabilité p_n d'avoir au moins une boule blanche parmi les n boules tirées.
b) Quelles valeurs faut-il donner à n pour que $p_n > 0,99$?

5 On considère n urnes : $U_1, U_2, \dots U_n$ tels que :
- l'urne U_1 contient trois boules blanches et deux boules noires.
- chacune des urnes $U_1, U_2, \dots U_n$ contient une boule blanche et quatre boules noires.
On tire une boule de U_1 que l'on remet dans U_2 ; puis une boule de U_2 que l'on remet dans U_3 et ainsi de suite jusqu'à tirer une boule de U_n
Soit l'évènement E_k : " la boule tirée de U_k est blanche " $(1 \leq k \leq n)$.

1) Calculer $p(E_1)$, $p(E_2/E_1)$ et $p\left(E_2/\overline{E_1}\right)$

En déduire $p(E_2)$
2) Soit $p_k = p(E_k)$.
a) Montrer que $p_{k+1} = \frac{1}{6} p_k + \frac{1}{6}$.
b) Montrer que la suite V définie sur $\mathbb{N}^*$ par $V_n = p_n - \frac{1}{5}$ est une suite géométrique.
c) En déduire p_n et $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

6 Un sac contient huit jetons : trois jetons rouges numérotés 1, 1, 0 ; trois jetons jaunes numérotés 1, 0, -1 et deux jetons verts numérotés 2, -1. Tous les jetons sont indiscernables au toucher.
On tire simultanément trois jetons du sac.
1) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants:
A :"Tirer trois jetons portant le même numéro"
B : "Tirer trois jetons de même couleur"
C : "Tirer exactement deux jetons rouges et un seul jeton portant le numéro 0"
D : "Tirer exactement deux jetons jaunes ou deux jetons portant des numéros positifs".
2) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
S : "Tirer trois jetons portant des numéros de somme nulle"
N : "Tirer trois jetons portant des numéros de produit égal 0"
3) Calculer p(N / S).

7 Une urne contient 7 jetons : quatre portent le numéro 0, deux portent le numéro 1 et une porte le numéro 2.
Un joueur tire simultanément trois jetons de l'urne et additionne les numéros marqués sur ces trois jetons tirés.
-Si cette somme S n'est pas nulle, il gagne un nombre de points égal à S.
-Si cette somme S est nulle, sans remettre les trois jetons tirés dans l'urne, il procède à un nouveau tirage d'un seul jeton, son gain est alors le numéro marqué sur le nouveau jeton.
On note :
R : "Le joueur est obligé de faire un deuxième tirage" et A : "Le gain est 0".
1) Calculer $p(R)$; $p(A / R)$ et $p(A \cap R)$.

et montrer que $p(A) = \frac{1}{35}$.

2) Déterminer les probabilités des évènements suivants :
a) B : " Le gain est 1 "

b) H : " Le joueur est obligé de faireun deuxième tirage sachant que le gain est 1 point ".

8 Soient A et B deux évènements tels que :

$p(B)=0{,}06$; $p(A/B)=0{,}85$; $p(A/\overline{B})=0{,}40$

1) Calculer $p(\overline{A}/B)$ et $p(\overline{B}/A)$.
2) Etudier l'indépendance entre les évènements A et B, en justifiant votre réponse.

9 Considérons l'expérience suivante : on lance deux fois un dé et on désigne par X et Y les résultats observés. Ce sont des entiers compris entre 1 et 6.
On note A et B les événements " X et Y ont la même parité " et " X = 2 ".
Les événements A et B sont ils indépendants ?

10 Pour prévenir deux défectuosités D_1 et D_2 des pièces fabriquées par une usine, on décide de soumettre un échantillon assez grand de pièces à des tests. Les études statistiques menées sur cet échantillon ont montré que :
8% des pièces présentent le défaut D_1 ;
Parmi les pièces atteintes du défaut D_1, 15% ont le défaut D_2.
On choisit au hasard une pièce produite par l'usine et on considère les évènements suivants :
A : " La pièce présente le défaut D_1 ". et
B : " La pièce présente le défaut D_2 ".
1) Quelle est la probabilité que la pièce choisie présente les deux défauts ?
2) Quelle est la probabilité que la pièce choisie présente le défaut D_2 ?
3) On sait que la pièce choisie possède le défaut D_2, quelle est la probabilité qu'elle possède le défaut D_1 ?

11 Une maladie atteint 2% d'une population donnée. Un test de dépistage donne les résultats suivants :
• Chez les personnes malades, 98% des tests sont positifs et 2% négatifs.
• Chez les personnes non malades, 1% des tests sont positifs et 99% négatifs.
On choisit une personne au hasard. Quelle est la probabilité :
a) qu'elle soit malade et qu'elle ait un test positif.
b) qu'elle ne soit pas malade et qu'elle ait un test négatif.
c) qu'elle ait un test positif.
d) qu'elle ait un test négatif.
e) qu'elle ne soit pas malade, sachant que le test est positif.
f) qu'elle soit malade, sachant que le test est négatif.

12 Sur une machine, on considère que les probabilités de dérèglement électronique et mécanique pour un jour donné sont respectivement : 0,003 et 0,007. Il n'y a pas d'autres possibilités de dérèglement et on sait que la probabilité de dérèglement mécanique sachant qu'il y a un dérèglement électronique est 0,5.
1) Calculer la probabilité que cette machine ait les deux dérèglements un jour donné.
2) Calculer la probabilité que cette machine n'ait aucun dérèglements un jour donné.
3) Aujourd'hui la machine est déréglée, quelle est la probabilité que les causes de ce dérèglement soient à la fois électroniques et mécaniques ?

13 En sortie de fabrication, on a constaté qu'une pièce présente deux sortes de défauts (et deux seulement) :

6% des pièces présentent le défaut D_1 au moins ;
12% des pièces présentent le défaut D_2 au moins ;
5% des pièces présentent à la fois les deux défauts D_1 et D_2.
Une pièce sort de fabrication. Calculer la probabilité pour quelle présente un seul défaut.

14 Une enquête auprès d'une population sur l'état de santé et la consommation du tabac, a donné les résultats suivants : 50% de la population ne fument pas et sont en bonne santé et 25% sont malades et ne fument pas. Les résultats de l'enquête ont montré que dans cette population l'état de santé ne dépend pas du fait qu'on est fumeur ou non.
On prend au hasard un individu de cette population.
Déterminer alors la probabilité p_1 qu'il soit fumeur et non malade et la probabilité p_2 qu'il soit fumeur et malade.

15 Des appareils électroniques de même type sont fabriqués par deux entreprises seulement et vendus sur un marché ; la part du marché de la première entreprise est deux tiers.
La fiabilité(la probabilité de fonctionnement sans défaillance) d'un appareil offert sur ce marché est de 95% pour le premier fabriquant, alors qu'elle est de 90% pour le deuxième fabriquant.
Un utilisateur se présente sur le marché et achète un appareil. Déterminer la fiabilité de l'appareil acheté.

16 Pour produire des pièces métalliques, un atelier utilise trois machines M_1, M_2 et M_3 plus ou moins récentes.
La fabrication est répartie suivant ces machines, mais, selon leur vétusté, les pièces en sortant présentent parfois des défauts selon le tableau suivant :

Machines	M_1	M_2	M_3
Pièces fabriquées (en %)	50	35	15
Fréquence de défauts (en %)	1	2	6

On considère une pièce venant de l'atelier.
On appelle D l'événement « la pièce est défectueuse » et M_i l'événement «la pièce a été fabriquée par la machine M_i » pour tout $i \in \{1,2,3\}$.
Calculer la probabilité de l'événement D.

17 Pour la fabrication d'un jouet, on utilise (entre autres) une emboutisseuse plastique et un robot peintre.
La probabilité pour que L'emboutisseuse tombe en panne est de 2.10^{-2} pour le robot de 8.10^{-2}.
Etant donné les cadences, la probabilité pour que le robot soit en panne sachant que l'emboutisseuse ne fonctionne plus est de $\frac{1}{4}$. Calculer la probabilité pour que les deux machines soient en panne, puis pour que toutes les deux fonctionnent.

APERÇU HISTORIQUE

Thomas Bayes
1702-1761

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut prédire à l'avance le résultat. Dans une expérience aléatoire, plusieurs issues sont possibles et la répétition de la même expérience dans les mêmes conditions peut donner des résultats différents. L'apparition d'un résultat donné ne peut être anticipé. On dit que l'issue de l'expérience est soumise au **hasard**.

Aléa, aléatoire, sont des mots d'origine latine, aléa, qui veut dire dé et par extension hasard. (« Aléa jecta est. »). **Hasard** est un mot d'origine arabe, az-zahr (ou espagnol azar), qui veut dire également dé. Cette étymologie montre que le hasard est une notion qui s'est révélée à travers les jeux. Les jeux sont aussi à l'origine de la théorie des probabilités dont les initiateurs bien connus, en Europe, sont le Duc de Toscane avec Galilée, mais surtout le Chevalier de Méré avec Fermat et Pascal.

Le Reverand **Thomas Bayes** est né à Londres en 1702 et mourut en 1761 à Tunbridge Wells, Kent. Ce mathématicien a été le premier a avoir utilisé la probabilité par association analogique et par la suite il a établi une base mathématique de probabilité d'indice (un moyen de calculer un grand nombre de fois, un événement qui n'a pas eu lieu, donnera la probabilité, qu'il va certainement existé après plusieurs essais).Il raconta ses trouvails sur la probabilité dans « Essais Vers La Résolution d'un Problème dans la doctrine de Possibilités »(1763), qui ont été par la suite publié dans Les transactions philosophiques de la Société Royale de Londres.Les seuls ouvrages qu'il a publié pendant sa vie, étaient : La Bienfaisance Divine , ou bien La Tentative de Prouver que La fin Primordiale de la Providence Divine et du Gouvernement constituent le Bonheur de ses Etres (1731).

Autres œuvres telle une introduction à la doctrine de Fluxions et la Défense du Mathématicien contre les objections de l'auteur de l'analyste (1736) ,qui a été critiqué par l'évêque Berkeley d'après les fondations logiques des calculs de Newton.

Son bloc note existe toujours ; et contient la méthode de trouver le temps et la place de conjonction entre deux planètes, ainsi que des remarques sur les poids et les mesures qui est une méthode de différentiation et de logarithmes

La contribution de Bayes est immortalisée par sa proposition fondamentale sur la probabilité qui porte son nom : la formule de Bayes.

Texte pris et traduit de " *L'encyclopédie Britanica* "