Partie 2

Chapitre 4

Produit scalaire, Produit vectoriel et Produit mixte dans l'espace

Plan du chapitre

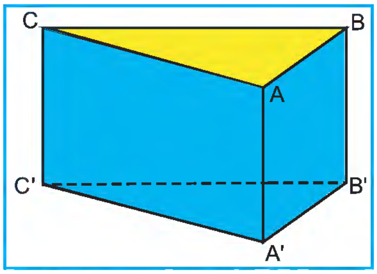
ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

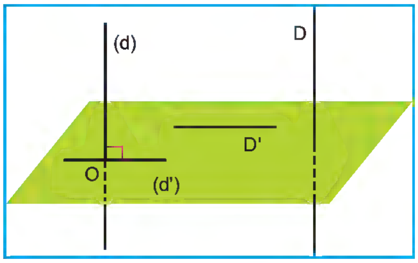
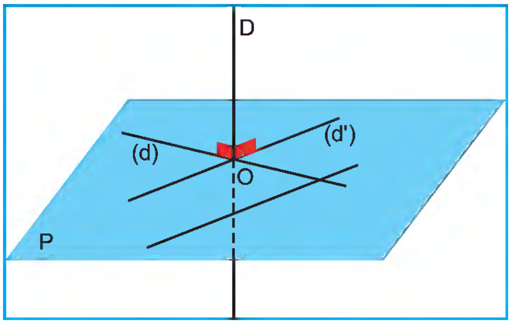
Dans tout ce chapitre, on désigne par $\mathscr{E}$ l'ensemble des points de l'espace et par $\mathscr{W}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace.

1 Soit un tétraèdre ABCD et I, J les milieux respectifs des arêtes [AB] et [CD].
Montrer que $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}=4\,\overrightarrow{IJ}$.

2 Soit un parallélépipède ABCDA'B'C'D' .Démontrer que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$

3 Soit le prisme droit ABCA'B'C' tel que les quadrilatères ABB'A' et BCC'B' soient deux rectangles.
1) Montrer que la droite (BB') est perpendiculaire au plan (ABC).
2) On suppose que le triangle ABC est rectangle en A.
a) Montrer que (A'B') est orthogonale aux deux droites (CA) et (CC').
b) En déduire que la droite (A'B') est perpendiculaire au plan (ACC').

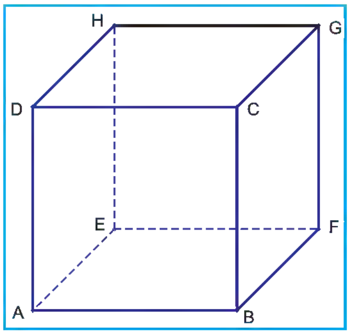


Deux droites D et D' de l'espace sont orthogonales, et on note D ⊥ D', lorsque leurs parallèles menées par un même point sont perpendiculaires.	
Une droite D est perpendiculaire à un plan P, et on note D ⊥ P, lorsqu'elle est orthogonale à toute droite de ce plan. **Point méthode :** Pour montrer qu'une droite est perpendiculaire à un plan, il suffit de montrer qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.	

4 Soit un tétraèdre ABCD tel que les triangles ABC et ABD soient isocèles et de même base .Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

5 On considère un cube ABCDEFGH d'arête a ;

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$



Soit I le centre de gravité du triangle CFH.

1) a) Montrer que le triangle CFH est équilatéral.

b) Montrer que les points A, G et I appartiennent au plan médiateur du segment [CH] et au plan médiateur du segment [CF].

c) En déduire que la droite (AG) est perpendiculaire au plan (CFH) et qu'elle passe par I.

2) On note P le plan contenant les droites (AB) et (HG) et P' le plan contenant les droites (AD) et (FG). Déterminer $P \cap P'$.

6 Soit un cube ABCDA'B'C'D' d'arête mesurant 1.

1) Vérifier que $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BB'})$ est un repère orthonormé de l'espace.

2) Déterminer les coordonnées des sommets de ce cube dans le repère $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BB'})$.

COURS

Dans toute la suite, l'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$:

$$\begin{cases} \vec{i} \perp \vec{j}, \vec{i} \perp \vec{k}, \vec{j} \perp \vec{k} \\ \left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = \left\|\vec{k}\right\| = 1 \end{cases}$$

Exploitation du produit scalaire dans l'espace

Soient A, B et C trois points deux à deux distincts de l'espace $\mathscr{E}$. On a

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathscr{W}$; A, B et C trois points de $\mathscr{E}$ tels que : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et défini comme suit :

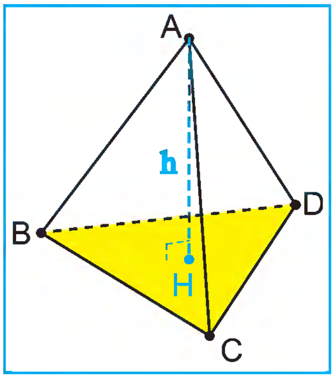
Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Activité 1

Soit a un réel strictement positif et ABCD un tétraèdre régulier d'arête de longueur a.

1) Soit H le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD).
   a) Montrer que la droite (CD) est perpendiculaire au plan (ABH)
   b) Montrer que H est l'orthocentre du triangle BCD.
   c) En déduire que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\,\overrightarrow{AH}$.



2) a) Développer le carré scalaire $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)^2$ et le calculer à l'aide de a.
   b) En déduire AH à l'aide de a.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de $\mathscr{W}$ et pour tout réel α on a :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

$\left(\alpha \vec{u}\right) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \left(\alpha \vec{v}\right) = \alpha \left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)$

$\vec{u} \cdot \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Activité 2

$\mathscr{W}$ est muni d'une base orthonormée $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

1) Vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour norme 1 et sont orthogonaux.

2) Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{w}$ tel que $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$ soit une base orthonormée de $\mathscr{W}$.

$\mathscr{W}$ est muni d'une base orthonormée $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Pour tous vecteurs

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ de $\mathscr{W}$, on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$; $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

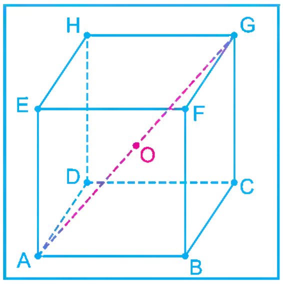
Activité 3

Soit ABCDEFGH un cube de centre O et d'arête a.

1) Calculer à l'aide de a les expressions suivantes :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG}$; $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{EC}$; $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{FB}$.

2) a) Montrer que les droites (DB) et (EB) sont orthogonales à la droite (AG).



b) En déduire que B, D et E ont même projeté orthogonal I sur la diagonale [AG] et que C, F et H ont même projeté orthogonal J sur [AG].

3) Montrer que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{JG}$.

Indication : On pourra considérer le repère orthonormé $\left(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ tel que :

$$\vec{i} = \frac{1}{a}.\overrightarrow{AB} \ ; \ \vec{j} = \frac{1}{a}.\overrightarrow{AD} \text{ et } \vec{k} = \frac{1}{a}.\overrightarrow{AE} .$$

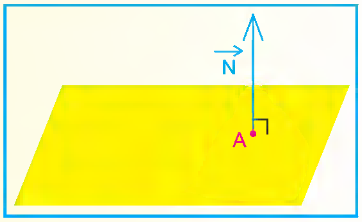
Activité 4

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

1) Donner une équation cartésienne du plan passant par le point A(1,-2,1) et dont un vecteur normal est $\vec{N}\begin{pmatrix}1\\3\\-5\end{pmatrix}$.
2) Donner une équation cartésienne du plan parallèle au plan Q : 2 x + y - 3 z + 7 = 0 et passant par le point B(3,-2,5).
3) Soient C(-1,2,3) et D(0,4,-1) deux points de $\mathscr{E}$. Déterminer une équation cartésien du plan médiateur du segment [CD].
4) Trouver les coordonnées du point d'intersection du plan P : 2 x + 3 y + 6 z = 117 avec la droite (D) perpendiculaire à P et passant par le point E(5,3,0).

Le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{N}$ est l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que

$\overrightarrow{AM} . \vec{N} = 0$



L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

Soit le plan P d'équation cartésienne : ax + by + cz + d = 0.

avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

Le vecteur $\vec{N}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P.

Activité 5

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

1) Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par le point B(0,-1,5) et de vecteur normal $\vec{N}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$

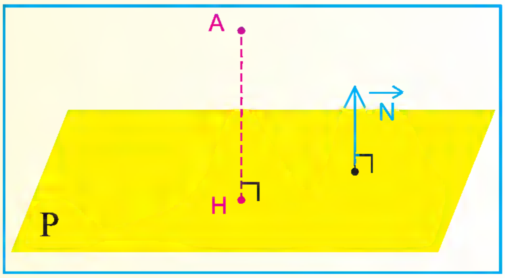
2) Calculer la distance du point A(-2,3,-1) au plan P.

Distance d'un point à un plan

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$
Soient le plan P : a x + b y + c z + d = 0,
$A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace et H le projeté orthogonal de A sur P.

La distance du point A au plan P est le réel positif AH noté d (A, P) et tel que :

$$AH = \frac{\left| a x_A + b y_A + c z_A + d \right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$



Activité 6

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

On donne les points A(1,2,-1) , B(0,3,-2) et E(-1,3,-1) de $\mathscr{E}$.

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
   (On notera α le paramètre)
2) Vérifier que E n'appartient pas à la droite (AB).
3) Soit $H(x_H, y_H, z_H)$ le point d'intersection de (AB) avec le plan passant par E et perpendiculaire à (AB). H est appelé le projeté orthogonal de E sur la droite (AB).
   a) Calculer les coordonnées du point H.
   b) Calculer la distance EH, appelée distance du point E à la droite (AB).
4) Soit M(x,y,z) un point quelconque de la droite (AB).
   a) Exprimer x, y et z en fonction du paramètre α.
   b) Calculer, en fonction de α, la distance EM^2.
   c) Déterminer la valeur minimale de EM^2. Retrouver alors la distance de E à (AB).

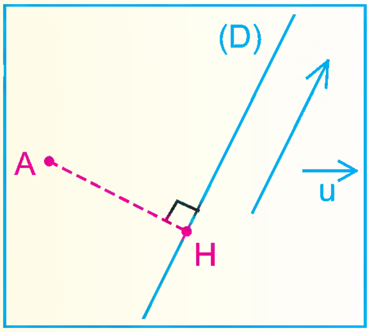
Distance d'un point à une droite

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

Soit (D) une droite de l'espace $\mathscr{E}$, $\vec{u}$ un vecteur directeur de (D), A un point de $\mathscr{E}$ et H son projeté orthogonal sur (D).

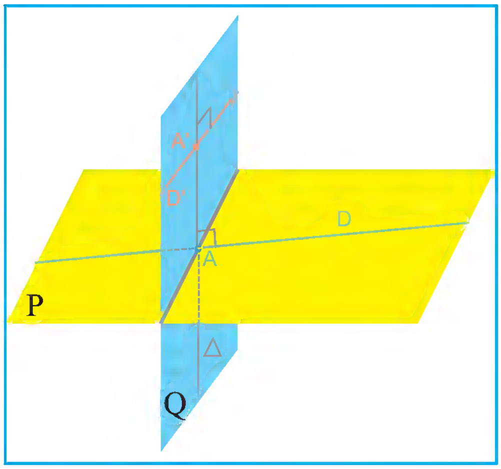
La distance du point A à la droite (D) est le réel positif AH, noté d(A, (D)).

Le point H vérifie les conditions : $\begin{cases} H \in (D) \\ \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases}$.



Activité 7

Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormé de l'espace $\mathscr{E}$. D et D' désignent deux droites définies par $D : \begin{cases} x - z - 1 = 0. \\ 2z - y + 1 = 0. \end{cases}$ et $D' : \begin{cases} x = -4 + 2\beta. \\ y = \beta. \\ z = 3. \end{cases}$ $(\beta \in \mathbb{R})$.



1) a) Donner une représentation paramétrique de la droite D.
   b) Montrer que les droites D et D' ne sont pas coplanaires.
2) a) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P contenant D et parallèle à D' est : $x - 2y + 3z + 1 = 0$.
   b) En déduire un vecteur directeur $\vec{w}$ d'une droite orthogonale à la fois à D et D'.
3) Montrer qu'une équation cartésienne du plan Q contenant D' et perpendiculaire à P est : $3x - 6y - 5z + 27 = 0$.
4) a) Calculer les coordonnées du point d'intersection A de D et Q.
   b) La droite Δ qui passe par A et de vecteur directeur $\vec{w}$ coupe D' en A'. Calculer les coordonnées du point A'.
   c) Calculer la distance AA' appelée distance des droites D et D'.

Soient, dans l'espace $\mathscr{E}$, deux plans $P : ax + by + cz + d = 0$ et $P' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ de vecteurs normaux respectifs $\vec{N}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{N}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$.

$D(A, \vec{u})$ et $D(B, \vec{v})$ sont deux droites de l'espace on a :

$P // P' \Leftrightarrow \vec{N}$ et $\vec{N'}$ sont colinéaires	$P \perp P' \Leftrightarrow \vec{N} \perp \vec{N'}$
$D(A, \vec{u}) // P \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{N}$	$D(A, \vec{u}) \perp P \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{N}$ sont colinéaires
$D(A, \vec{u}) \perp D(B, \vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$	$D(A, \vec{u}) // D(B, \vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Exploitation du produit vectoriel dans l'espace

Activité 1

On considère un cube ABCDA'B'C'D' d'arête 1.

1) Montrer que : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}\right)$ et $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD'}\right)$ sont deux bases orthonormées directes de $\mathscr{W}$.

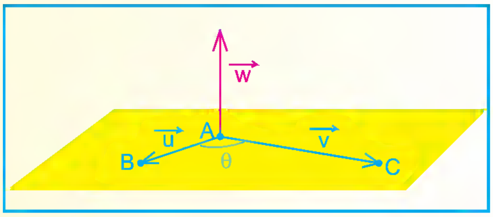
2) Montrer que : $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DD'}\right)$ et $\left(\overrightarrow{D'A'}, \overrightarrow{D'C'}, \overrightarrow{D'D}\right)$ sont deux bases orthonormées indirectes de $\mathscr{W}$.

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté et A, B et C trois points de $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le vecteur $\vec{w}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini par :

* Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{w} = \vec{0}$.
* Si non $\vec{w}$ est l'unique vecteur tel que

$$\begin{cases} 1/\ \vec{w} \text{ est normal au plan (ABC)} \\ 2/\ (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ est une base directe de } \mathscr{W} \\ 3/\ \|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \left|\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)\right| \end{cases}$$



Activité 2

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.

1) Simplifier les expressions suivantes :

a) $\left(2\vec{u} - 3\vec{v}\right) \wedge \left(\vec{u} + 2\vec{v}\right)$; b) $\left(\vec{u} - \vec{v}\right) \wedge \left(\vec{u} + \vec{v}\right)$

c) $\left(2\vec{u} + 3\vec{v}\right) \wedge \left(2\vec{u} + 3\vec{v}\right)$; d) $\left(2\vec{u} + 3\vec{v}\right) \wedge \left(2\vec{u} - 3\vec{v}\right)$.

2) Montrer que :

$\vec{u} \perp \vec{v}$ si et seulement si $\left\|\vec{u} \wedge \vec{v}\right\| = \left\|\vec{u}\right\| . \left\|\vec{v}\right\|$

3) On suppose maintenant que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
Montrer que pour tous réels a, b, c et d on a :

$\left(a\vec{u} + b\vec{v}\right)$ et $\left(c\vec{u} + d\vec{v}\right)$ sont colinéaires si et seulement si $(a d - b c = 0)$.

Propriétés

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et α un réel.
On a :

$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.

$\left(\alpha\vec{u}\right) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \left(\alpha\vec{v}\right) = \alpha\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right)$.

$\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$.

$\vec{w} \wedge \left(\vec{u} + \vec{v}\right) = \vec{w} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{v}$.

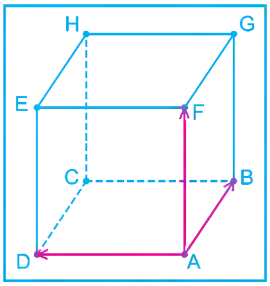
Activité 3

La figure ci-contre représente un cube ABCDFGHE tel que AB = 1.

1) Vérifier que le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}\right)$ est orthonormé direct de $\mathscr{E}$.

2) Calculer les produits vectoriels suivants :

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}$;
$\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AH}$; $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{BH}$.



Expression analytique du produit vectoriel

Dans une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathscr{W}$, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= (yz' - zy')\,\vec{i} - (xz' - zx')\,\vec{j} + (xy' - yx')\,\vec{k}$$

Activité 4

Dans une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathscr{W}$, on considère les vecteurs :

$\vec{u}\begin{pmatrix} -\sqrt{3}+2 \\ \sqrt{3}+2 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} -3\sqrt{3}+1 \\ 3\sqrt{3}+1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Déterminer une mesure θ de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.

Sinus et cosinus de l'angle de deux vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace orienté $\mathscr{W}$.

Si θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ alors on a :

$$|\sin\theta| = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| . \|\vec{v}\|} \quad \text{et} \quad \cos\theta = \frac{\vec{u} . \vec{v}}{\|\vec{u}\| . \|\vec{v}\|} .$$

Activité 5

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) Soients $\vec{u}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 1 \\ \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}+1 \\ 3+2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathscr{W}$.

a) Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$.
b) Qu'en déduit-on pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

2) Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ trois vecteurs de $\mathscr{W}$.

Calculer $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ et $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$. Conclure.

3) Soient les points A(2,0,0) , B(0,4,0) et C(0,0,3) de l'espace $\mathscr{E}$.

a) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}$.

b) Qu'en déduit-on ?

Activité 6

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$

Donner deux vecteurs $\vec{w}$ tels que $\vec{u} \wedge \vec{w} = \vec{v}$.

Activité 7

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) On donne le point A(-3,5,2) et les deux vecteurs

$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

a) Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

b) Ecrire une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2) Soient B(1,2,1) ; C(3,-1,1) et D(-1,0 ,2) trois points de $\mathscr{E}$.

a) Vérifier que B, C et D ne sont pas alignés.

b) Ecrire une équation cartésienne du plan passant par les points B, C et D.

Propriété

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\mathscr{W}$.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs d'un plan P, alors le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal au plan P.

Activité 8

Soient A et B deux points de l'espace $\mathscr{E}$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathscr{W}$.

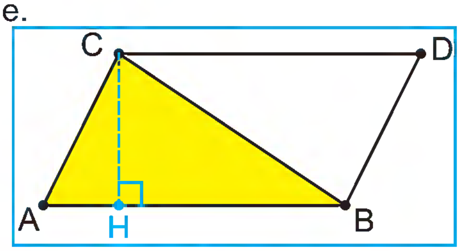
1) Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

2) Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

3) Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que $\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{0}$.

Activité 9

Soient un triangle ABC et H le pied de sa hauteur issue de C.
Soit le point D tel que ABDC soit un parallélogramme.
On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire du parallélogramme ABDC.



1) Montrer que $\mathcal{A} = \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$.

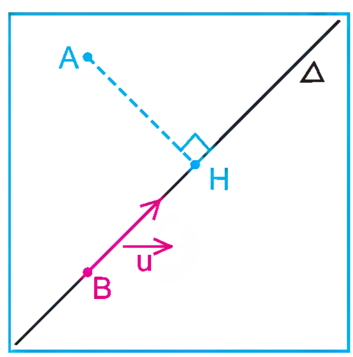
2) En déduire l'aire du triangle ABC.
3) Soient les points A(1,2,3) , B(4,2,-1) et C(2,-1,2) de l'espace $\mathscr{E}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Calculer l'aire du triangle ABC.

Aire d'un triangle

Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace $\mathscr{E}$.
L'aire du triangle ABC est égale au réel $\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$.

Activité 10

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère un point A et une droite Δ passant par un point B et de vecteur directeur $\vec{u}$.
Soit H le projeté orthogonal de A sur Δ.



1) Montrer que la distance AH (distance de A à Δ)

est donnée par la formule : $AH = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$.

2) Calculer la distance du point A(2,2,1) à la droite Δ

passant par B(4,2,0) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$.

Distance d'un point à une droite

La distance d'un point A à une droite $\Delta = D\left(B, \vec{u}\right)$ est le réel $\dfrac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$

Exploitation du produit mixte dans l'espace

Définition

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{W}$. On appelle produit mixte de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, le réel $\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) . \vec{w}$. On le note $\left(\vec{u} , \vec{v} , \vec{w}\right)$.

Activité 1

1) Montrer que trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\left(\vec{u} , \vec{v} , \vec{w}\right) = 0$.

2) a) Dans l'espace rapporté au repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on donne les points A(1,1,1) , B(-1,2,-1), C(2,3,5) et D(1,0,-1).
Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

b) Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\-3\\7\end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

3) Soient A un point de l'espace et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.
Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\left(\vec{u} , \vec{v} , \overrightarrow{AM}\right) = 0$.

Propriété

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{W}$. On a : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\left(\vec{u} , \vec{v} , \vec{w}\right) = 0$.

Activité 2

1) Soit $\left(\vec{e_1} , \vec{e_2} , \vec{e_3}\right)$ une base orthonormée de $\mathscr{W}$.
Montrer que la base $\left(\vec{e_1} , \vec{e_2} , \vec{e_3}\right)$ est directe si et seulement si $\left(\vec{e_1} , \vec{e_2} , \vec{e_3}\right) = 1$.

2) Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ on donne les vecteurs : $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{-2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

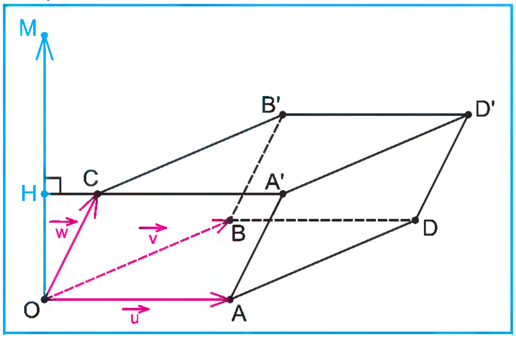
Montrer que $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$ est une base orthonormée directe de $\mathscr{W}$.

Propriété

Soient $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$ une base orthonormée de $\mathscr{W}$. On a : $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$ est directe si et seulement si le produit mixte $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = 1$.

Activité 3

Soients $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non coplanaires de $\mathscr{W}$.
On désigne par O, A, B et C les points de l'espace tels que :
$\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$.
Soit M le point de l'espace tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$.
Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (OM).



1) a) Montrer que $\left|\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)\right| = OM \, . \, OH$

b) En déduire le volume du parallélépipède OADBCA'D'B'.

2) Soit un tétraèdre ABCD. On désigne par υ son volume.

a) Montrer que $\upsilon = \dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right|$.

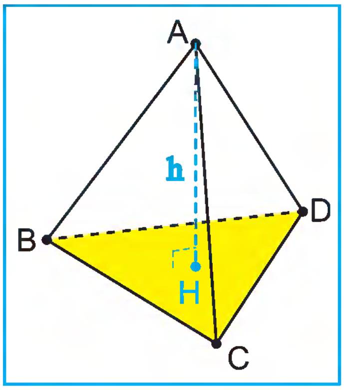
b) Calculer υ si l'on sait que A(1,1,1), B(2,0,0), C(0,3,0) et D(0,0,-2) dans un repère orthonormé direct de l'espace.

Activité 4

Soient ABCD un tétraèdre et H le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD).

1) Montrer que la hauteur AH est donnée par la formule

$$AH = \frac{\left|\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\right\|}.$$



2) On donne les quatre points A(-1,4,5), B(0,1,1), C(1,4,0) et D(-3,5,0) dans un repère orthonormé direct de l'espace.

a) Calculer la hauteur h issue de A du tétraèdre ABCD.

b) Déterminer une équation du plan (BCD) et retrouver le résultat de la question précédente.

Propriété

* Soient ABCDA'B'C'D' un parallélépipède et $\mathcal{V}$ son volume.

On a : $\mathcal{V} = \left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}\right)\right|$

* Soient ABCD un tétraèdre, υ son volume et h la hauteur issue du point A.

On a : $\upsilon = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right|$ et $h = \dfrac{\left|\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\right\|}$.

Activité 5

Soient deux droites D et D', de $\mathscr{E}$, définies par leurs représentations paramétriques :

$$D: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 - \alpha \\ z = \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad D': \begin{cases} x = 2\beta \\ y = 1 \\ z = -2\beta \end{cases}, \beta \in \mathbb{R}$$

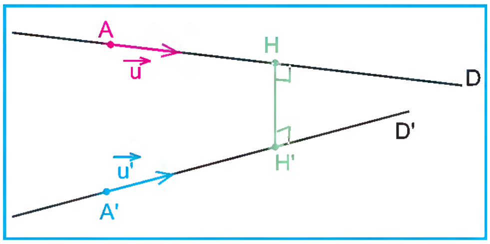
1) Montrer que les droites orthogonales à la fois à D et D' ont toutes la même direction et donner un vecteur directeur de ces droites.
2) Montrer que parmi les droites précédentes une seule droite coupe à la fois D et D'. On la note Δ.
3) Soit H et H' les points d'intersection de Δ avec D et D'. Déterminer les coordonnées de H et H'.
4) Donner la représentation paramétrique de Δ.

Activité 6

Soient deux droites D et D' de $\mathscr{E}$ non coplanaires. D est définie par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$ et D' est définie par un point A' et un vecteur directeur $\vec{u}'$.

1) Montrer que pour tout point M∈D et pour tout point M'∈D', on a :
$\left(\vec{u}, \vec{u}', \overrightarrow{AA'}\right) = \left(\vec{u}, \vec{u}', \overrightarrow{MM'}\right)$.
2) Soit H et H' les intersections de D et D' avec leur perpendiculaire commune. Montrer que la distance

entre D et D' est : $HH' = \dfrac{\left|\left(\vec{u}, \vec{u}', \overrightarrow{AA'}\right)\right|}{\left\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\right\|}$.



3) Calculer la distance entre les droites D et D' suivantes :

$$D : \begin{cases} x = 3 + \alpha \\ y = -1 - \alpha \quad (\alpha \in IR) \\ z = 1 + 2\alpha \end{cases} \quad \text{et} \quad D' : \begin{cases} x = 2\beta \\ y = 3 - 3\beta \quad (\beta \in IR) \\ z = 1 + 3\beta \end{cases}$$

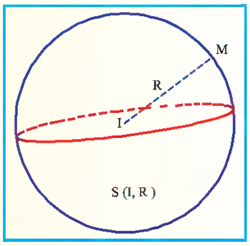
Soient $D(A,\vec{u})$ et $D'(A',\vec{u'})$ deux droites non coplanaires de l'espace $\mathscr{E}$.
H et H' les intersections de D et D' avec leur perpendiculaire commune.

La distance entre D et D' est $HH' = \dfrac{\left|\left(\vec{u}, \vec{u'}, \overrightarrow{AA'}\right)\right|}{\left\|\vec{u} \wedge \vec{u'}\right\|}$.

La Sphère

Définition

Soient I un point de l'espace $\mathscr{E}$ et R un réel positif.
On appelle sphère de centre I et de rayon R,
l'ensemble des points M de l'espace tels que IM=R.
On la note S(I,R)



Activité 1

Soient I un point de l'espace $\mathscr{E}$ et a un réel strictement positif.
Déterminer l'ensemble des centres des sphères de rayon a et passant par I.

Activité 2

Soient A et B deux points distincts de l'espace $\mathscr{E}$.
Quel est l'ensemble des centres des sphères passant par A et B ?

Activité 3

Soient trois points A, B et C non alignés de l'espace $\mathscr{E}$.
Quel est l'ensemble des centres des sphères passant par A, B et C ?

Activité 4

Soit ABCD un tétraèdre régulier d'arête de longueur a.
Déterminer le centre I et le rayon R de la sphère S passant par A,B,C et D.
S est appelée la sphère **circonscrite** au tétraèdre ABCD.
(indication: étudier l'intersection des trois plans P ; Q et R médiateurs respectis des segments [BC] ; [CD] et [AB]).

Équation cartésienne d'une sphère

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

Activité 1

Soit le point I(1,-2,3) de $\mathscr{E}$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels x,y et z pour que le point M(x,y,z) appartienne à la sphère de centre I et de rayon 2.

Activité 2

Soit R un réel positif et I(a,b,c) un point donné de l'espace $\mathscr{E}$.

1) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées x, y et z du point M(x,y,z) pour qu'il appartienne à la sphère de centre I et de rayon R.
2) Réciproquement , on considère l'ensemble (S) des points M(x,y,z) de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.
   a) Ecrire la relation précédente sous la forme : $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = h$.
   où h est un réel que l'on exprimera en fonction de a, b, c et d.
   b) Déterminer alors, suivant les réels a, b, c et d la nature et les éléments caractéristiques de (S).

Equation cartésienne d'une sphère

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

Soient I (a, b, c) un point de l'espace et R un réel positif.
Une équation cartésienne de la sphère S (I, R) de centre I et de rayon R est :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

Activité 3

Déterminer l'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace $\mathscr{E}$ dans chacun des cas suivants :

1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 4 = 0$
2) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2 = 0$
3) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 3z + 12 = 0$

Activité 4

Soient les points A(1,2,0) et B(-1,0,3) de l'espace $\mathscr{E}$.
a) Déterminer une équation cartésienne de la sphère de diamètre [AB].
b) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que MA = 2MB.

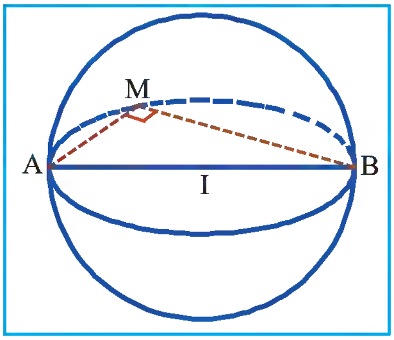
Activité 5

Soient deux points A et B distincts de l'espace $\mathscr{E}$ et I le milieu du segment [AB].

1) Soit M un point de l'espace $\mathscr{E}$. Montrer que

$$(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0) \Leftrightarrow (MI = \frac{AB}{2})$$

2) En déduire l'ensemble des points M de l'espace $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
3) Déterminer l'équation cartésienne de la sphère de diamètre [AB] où A(-1,2,1) et B(-3,1,-2)



Section plane d'une sphère

Activité 1

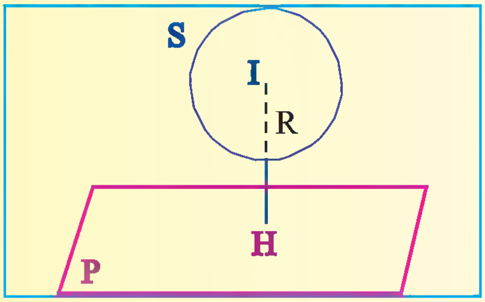
Soit S (I, R) une sphère de centre I et de rayon R et P un plan de l'espace $\mathscr{E}$.
On note H le projeté orthogonal du point I sur P et d = d (I, P)= IH.

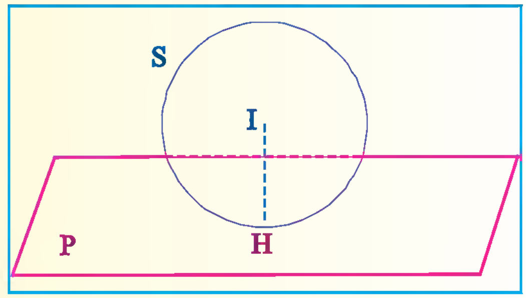
1) On suppose que d > R. Montrer que la sphère S (I, R) et le plan P ne se rencontrent pas.
2) On suppose que d = R. Montrer que le plan P rencontre la sphère S (I, R) en un seul point H.
   on dit que le plan est **tangent** à la sphère S (I, R).
3) On suppose maintenant que d < R.
   a) Soit M un point de P, montrer que M appartient à S (I, R) si et seulement si $HM^2 = R^2 - d^2$.
   b) En déduire que l'intersection de la sphère S (I, R) avec le plan P est le cercle de centre H et de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$.

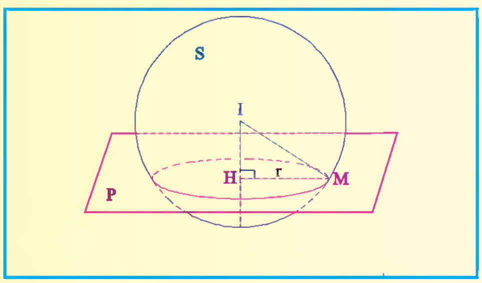
Section plane d'une sphère

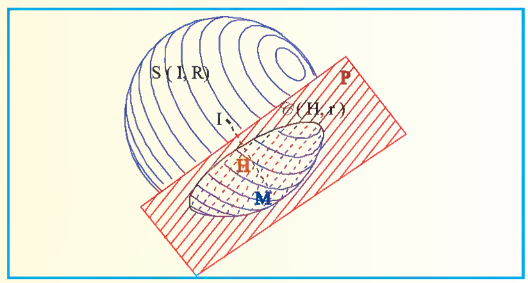
Soit S une sphère de centre I et de rayon R et P un plan de l'espace $\mathscr{E}$.
On désigne par H le projeté orthogonal du point I sur le plan P et on pose d = IH.

* Si $d > R$ alors $P \cap S = \varnothing$ et on dit que P et S sont disjoints.
* Si $d = R$ alors $P \cap S = \{H\}$ et on dit que P et S sont tangents en H.
* Si $d < R$ alors $P \cap S$ est le cercle du plan P de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$









$P \cap S = \mathscr{C}(H,r)$

Activité 2

On considère, dans l'espace $\mathscr{E}$, la sphère S de centre O et de rayon 5. Soit [AB] un diamètre de S, I étant un point de [AB].
On note OI = h et on coupe la sphère S par le plan P perpendiculaire à (AB) en I.
Déterminer l'ensemble des points communs à la sphère S et au plan P dans chacun des cas suivants :
a) $h = 4{,}8$ b) $h = 3$ c) $h = 0$ d) $h = 5$ e) $h = 5{,}1$.

Exercice Résolu

Enoncé :
L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Déterminer l'intersection de la sphère S d'équation cartésienne
$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z - 2 = 0$ avec chacun des plans
$P : x + 3y + z + 10 = 0$ et $Q : x + y + z + 4\sqrt{3} = 0$.

Solution :

On a $(x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z - 2 = 0) \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 4^2$

La sphère S a pour centre le point I(-2,3,-1) et pour rayon R = 4.

On a $d(I, P) = \dfrac{|-2+3x3-1+10|}{\sqrt{11}} = \dfrac{16}{\sqrt{11}} > 4$, il en résulte que $P \cap S = \varnothing$.

D'autre part on a $d(I,Q) = \dfrac{|-2+3-1+4\sqrt{3}|}{\sqrt{3}} = 4$, donc Q et S sont tangents au point H projeté orthogonal de I sur le plan Q.

Déterminons les coordonnées du point H.

Les coordonnées (x, y, z) de H vérifient simultanément les conditions :

$x + y + z + 4\sqrt{3} = 0$. car $H \in Q$

et $\begin{cases} x+2=\alpha \\ y-3=\alpha \\ z+1=\alpha \end{cases}$, $\alpha \in IR$ car $\overrightarrow{IH}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ normal à Q

D'où $(\alpha - 2) + (\alpha + 3) + (\alpha - 1) + 4\sqrt{3} = 0$. On obtient $3\alpha = -4\sqrt{3}$ c'est-à-dire

$\alpha = -\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. Il en resulte que $H\left(-\dfrac{4\sqrt{3}}{3} - 2 ; -\dfrac{4\sqrt{3}}{3} + 3 ; -\dfrac{4\sqrt{3}}{3} - 1\right)$.

Activité 3

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Déterminer l'intersection de la sphère S et du plan P dans chacun des cas suivants :

1) $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 8z + 25 = 0$ et $P : 12x + 5z - 19 = 0$
2) $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z + 5 = 0$ et $P : 2x - 3z + 5z + 18 = 0$
3) $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z + 5 = 0$ et $P : x + y + z = 0$

Activité 4

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Donner une équation cartésienne du plan P tangent à la sphère S de centre I(1,2,0) au point A(1,1,-1).

RÉSUMÉ DU COURS

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$
$\mathscr{W}$ est l'ensemble des vecteurs de l'espace $\mathscr{E}$.

* Soient A, B et C trois points deux à deux distincts de l'espace.

On a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$

* Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\mathscr{W}$ est muni d'une base orthonormée $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Pour tous vecteurs

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

* Soit, dans l'espace $\mathscr{E}$, le plan P d'équation cartésienne : $a x + b y + c z + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0,0)$ et soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de $\mathscr{E}$.

Le vecteur $\vec{N}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P.

La distance du point A au plan P est donnée par la formule :

$$d(A, P) = AH = \frac{\left| a x_A + b y_A + c z_A + d \right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

* Soient les plans P : $a x + b y + c z + d = 0$ et P' : $a' x + b' y + c' z + d' = 0$

de vecteurs normaux respectifs $\vec{N}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{N'}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ On a :

- $P \,//\, P' \Leftrightarrow \vec{N}$ et $\vec{N'}$ sont colinéaires.
- $P \perp P' \Leftrightarrow \vec{N}$ et $\vec{N'}$ sont orthogonaux.
- $D(A,\vec{u}) \,//\, P \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{N}$ sont orthogonaux.
- $D(A,\vec{u}) \perp P \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{N}$ sont colinéaires.

* Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires de $\mathscr{W}$ alors le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur nul.

* Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, le produit vectoriel de $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ est le vecteur $\vec{w}$,

noté $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ défini par :
$$\begin{cases} 1/\ \vec{w} \text{ est normal au plan } (ABC) \\ 2/\ (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ est une base directe de } \mathscr{W} \\ 3/\ \|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\| \left|\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)\right| \end{cases}$$

* Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{W}$ et α un réel . On a :

$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$; $(\alpha\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v})$;

$(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$; $\vec{w} \wedge (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{v}$.

* Dans une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathscr{W}$, si on a

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\vec{k}$

$= (yz' - zy')\,\vec{i} - (xz' - zx')\,\vec{j} + (xy' - yx')\,\vec{k}$

* Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\mathscr{W}$. Si θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$, alors on a :

$$|\sin\theta| = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \quad \text{et} \quad \cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

* Si P est un plan de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal au plan P.
* Soient A, B et C trois points non alignés de $\mathscr{E}$. L'aire du triangle ABC est :

$$\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$$

* Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{W}$. On appelle produit mixte de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ le réel $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$ On le note $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

* Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{W}$. On a :

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

* Soient $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base orthonormée de $\mathscr{W}$. On a :
$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est directe si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 1$.

* Soient ABCDA'B'C'D' un parallélépipède et $\mathscr{V}$ son volume.

On a : $\mathscr{V} = \left| (\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AA'}) \right|$.

* Soit ABCD un tétraèdre, v son volume et h la hauteur issue de A. On a :

$$v = \frac{1}{6} \left| \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right) \right| \quad \text{et} \quad h = \frac{\left| \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA} \right) \right|}{\left\| \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} \right\|}.$$

* Soient $D(A,\vec{u})$ et $D'(A',\vec{u'})$ deux droites non coplanaires de l'espace $\mathscr{E}$.
H et H' les intersections de D et D' avec leur perpendiculaire commune.

La distance entre D et D' est $HH' = \dfrac{\left| \left(\vec{u}, \vec{u'}, \overrightarrow{AA'} \right) \right|}{\left\| \vec{u} \wedge \vec{u'} \right\|}$.

* La distance d'un point A à une droite $\Delta = D\left(B,\vec{u}\right)$ est le réel $\dfrac{\left\| \overrightarrow{AB} \wedge \vec{u} \right\|}{\left\| \vec{u} \right\|}$

* Soient I(a,b,c) un point de l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ et R un réel positif. Une équation cartésienne de la sphère S(I,R) de centre I et de rayon R est : $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.

* Soit S une sphère de centre I et de rayon R et P un plan de l'espace. On désigne par H le projeté orthogonal du point I sur le plan P et on pose d = IH.
  * Si $d > R$ alors $P \cap S = \varnothing$ et on dit que P et S sont disjoints.
  * Si $d = R$ alors $P \cap S = \{H\}$ et on dit que P et S sont tangents en H.
  * Si $d < R$ alors $P \cap S$ est le cercle du plan P de centre H et de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$ et on dit que P et S sont sécants suivant ce cercle.

AVEC L'ORDINATEUR

Activité 1

Soient S1 et S2 deux sphères de même centre o et de rayons respectifs 3 et 5.
P est le plan d'équation cartésienne Z = m où m est un paramètre réel tel que -3 < m < 3.
C1 est l'intersection du plan P avec S1 et C2 est l'intersection du plan P avec S2.
A1 désigne l'aire de C1 et A2 désigne l'aire de C2. On note A = A2 - A1 et on se propose de montrer que la valeur de A est constante.

Recherche d'une conjecture avec Geospace W :

Afficher le repère R_{xyz} du logiciel.
Créer /Solide/ sphère : S1 de centre o et de rayon 3.
Bis / S2 de centre o et de rayon 5
Créer /Numérique variable réelle libre m dans un intervalle -3 __ 3.
Créer/ le plan P définie par son équation Z - m =0.
Créer / ligne / cercle / la section C1 de la sphère S1 par le plan P.
Bis : P ; S2 ; C2.
Créer / numérique / mesure géométriques / l'aire A1 du convexe C1.
Bis : A2 du convexe C2.
Créer / numérique / calcul algébrique A2 - A1 et nommer cette différence A.
Créer / affichage / valeur déjà défini A1 ; (3 chiffres après la virgule) ; aff0.
Bis A2 ; (3 chiffres après la virgule) ; aff1.
Bis A ; (3 chiffres après la virgule) ; aff2.
Piloter avec les flèches de direction du clavier. Que peut-on conjecturer ?

Une stratégie de justification de la conjecture :

Déterminer, en fonction de m, la distance de o au plan P.
Calculer, en fonction de m, les rayons r_1 et r_2 respectifs des cercles C1 et C2.
Calculer, en fonction de m, les aires respectives A1 et A2 des cercles C1 et C2.
En déduire que l'aire A de la couronne est indépendante de m et donner sa valeur.

Activité 2

Soit A(-1 ; -1 ; 1) ; B(-1 ; 2 ; -2) et P : X + Y + Z - 2 = 0. Pour tout réel m on considère la sphère S_m de centre I(-1 ; m ; -m) et de rayon $R_m = \sqrt{m^2 - m + 1}$.
On se propose de vérifier que le point I_m décrit la droite (AB) et puis étudier suivant les valeurs de m la position relative de P et S_m.

Utiliser le logiciel Geospace W pour :

Créer /point / repérer dans l'espace/ A de coordonnées : -1 -1 1.
Bis / B de coordonnées : -1 2 -2.

Créer / le plan P défini par son équation X + Y + Z - 2 = 0.
Créer / point libre dans un plan P : nommer ce point C (Bis pour D, E et F)
Créer / ligne / polygone défini par ces sommets C D E F (déplacer ces points pour avoir la forme d'un parallélogramme illustrant le plan P et hachurer ce quadrilatère)
Créer /numérique / variable réelle libre dans l'intervalle -8 8 et la nommer m.
Créer / point repéré dans l'espace/ de nom I et de coordonnées : -1 m -m.
Créer / numérique / calcul algébrique / l'expression R_m égale à Rac(m^2 - m+1).
Créer / solide / sphère / de centre I de rayon R_m et de nom S_m.
Créer / ligne / cercle / la section C_m de la sphère S_m par le plan P.
Piloter avec les flèches du clavier et donner une conjecture puis la justifier.

EXERCICES ET PROBLÈMES

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

1 Calculer $\vec{u}.\vec{v}$ dans chacun des cas suivants

$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\6\\-4\end{pmatrix}$; $\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-2\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-\sqrt{2}\\3\end{pmatrix}$

2 On donne un tétraèdre régulier ABCD (toutes ses arêtes ont même longueur que l'on notera a où a est un réel strictement positif)

1)Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}$ et que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\frac{a^2}{2}$

2) a)Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$
b)Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (CD) , (AC) et (BD) , (AD) et (BC) ?

3) a)En écrivant $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ}$,
calculer $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{CD} . \overrightarrow{IJ}$.
b)Que représente la droite (IJ) pour le couple de droites (AB) et (CD) ?
c)Calculer les distances des droites (AB) et (CD) ; (AC) et (BD) ; (AD) et (BC) .

3 Donner une équation cartésienne du plan passant par A(1,-2,3) et de vecteur normal

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

4 Donner une équation cartésienne du plan passant par le point A(0,1,-2) et perpendiculaire à la droite (CD) telle que C(-1,1,-1) et D(0-3,2).

5 Donner un système d'équations paramétriques de la droite perpendiculaire au plan P : 2x - 3y + z = 0 et passant par le point I(4,-2,0).

6 Ecrire une équation cartésienne du plan P sachant que le projeté orthogonal de l'origine O du repère sur ce plan est le point D (1,-2,3)

7 Dans chacun des cas suivants , étudier la position relative des plans P et P'
P : x - y + z + 1 = 0 et P' : -x + y - z = 0
P : 2x + y + z - 2 = 0 et P' : x - y - z = 0

8 1) Donner une équation cartésienne d'un plan admettant le vecteur $\vec{k}$ pour vecteur normal.
2) a) En déduire que les deux plans d'équations respectives x = 1 et y = 0 sont perpendiculaires.
b)Déterminer un système d'équations paramétriques de leur droite d'intersection.

9 Calculer la distance du point A au plan P dans chacun des cas suivants :
A(1, 0, 2) et P : 2x - y + z - 2 = 0
A(0, 0, -3) et P : 2x - 2y + z + 5 = 0
A(-1, 1, 1) et P passant par les points B(0, 1, 0) et C(1, 0, 0) et D(0, 0, 1)

10 Soit $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ une base orthonormée directe de $\mathscr{W}$.
Déterminer $\vec{i}\wedge\vec{j}$, $\vec{i}\wedge\vec{k}$ et $\vec{j}\wedge\vec{k}$

11 1) Montrer que le produit vectoriel de deux vecteurs est nul si et seulement si ces deux vecteurs sont colinéaires.
2) Montrer alors que les points A(1,0,1), B(1,1,0) et C(0,1,1) définissent un plan.
3) Donner une équation cartésienne de ce plan.

12 On donne les plans
$P : x + y + z + 1 = 0$
et $P' : x - y + 2z - 1 = 0$
1) préciser deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ normaux respectivement aux plans P et P'
2) Calculer le produit vectoriel $\vec{w}$ de ces deux vecteurs.
3) Déterminer la droite d'intersection de P et P'

13 Soient deux vecteurs orthogonaux. $\vec{u}$ et $\vec{v}$
Démontrer que $\vec{u} \wedge \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) = -\left\|\vec{u}\right\|^2 . \vec{v}$

14 Montrer que la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est orthonormée puis déterminer son sens.

$$\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{8}{9} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{-4}{9} \end{pmatrix}, \quad \vec{v}\begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{8}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix}, \quad \vec{w}\begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{-4}{9} \\ \frac{7}{9} \end{pmatrix}$$

15 Soient A et B deux points distincts et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.
Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que :

1) $\overrightarrow{AM} . \overrightarrow{AB} = 0$
2) $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$
3) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) . \overrightarrow{AB} = 0$
4) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

16 Soit un cube ABCDEFGH tel que AB = 1.
Calculer l'aire des triangles CEH, CFH et CDF.

17 Soit O un point de l'espace et $\vec{F}$ une force appliquée à un point A d'un solide indéformable.
On appelle moment de la force $\vec{F}$ au point O et on note $M_O(\vec{F})$, le vecteur $\overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}$
1) La droite (d) définie par $(A, \vec{F})$ est appelée support de la force.
a)Soit H le projeté orthogonal de O sur (d), montrer que $\left\| M_O(\vec{F}) \right\| = OH.\left\| \vec{F} \right\|$.
b)En déduire que deux forces de même vecteur et de même support ont même moment en tout point de l'espace.
2) Soit O' un point de l'espace, montrer que le moment de $\vec{F}$ en O' est égal à la somme du moment de $\vec{F}$ en O et du vecteur $\vec{F} \wedge \overrightarrow{OO'}$.
3) Montrer que si trois forces ont une résultante nulle et si le système formé par ces trois forces a un moment nul par rapport à un point quelconque de l'espace, alors les supports des forces sont coplanaires.

18 Soient P et Q les plans définis par
$P : x + 2y - 3z = 0$
et $Q : 2x - y + z - 3 = 0.$
1) Montrer que P et Q sont sécants. Soit D leur droite d'intersection.
2) Déterminer un vecteur directeur de D.
3) Donner une équation cartésienne du plan R passant par l'origine O du repère et perpendiculaire à D.
4) Préciser les coordonnées du point I intersection de R avec D.

19 Soient les quatre points A, B, C et D de coordonnées
$A(1, 0, \sqrt{2})$, $B(-1, 0, \sqrt{2})$, $C(0, -1, 0)$ et $D(0, 1, 0)$.
1) Montrer que les points A, B, C et D sont non coplanaires.
2) Quelle est la nature du tétraèdre ABCD ?
3) Calculer la hauteur de ce tétraèdre.
4) Soit a un réel de $[0,\sqrt{2}]$ et P_a le plan d'équation cartésienne $z = a$.
a) Montrer que P_a rencontre les droites (AC), (AD) , (BD) et (BC) en quatre points F, G, H et I.
b) Préciser la nature du quadrilatère FGHI.
5) a) Calculer le périmètre p(a) et l'aire s(a) du quadrilatère FGHI.
b) Préciser les extremums de p(a) et de s(a).

20 On donne les plans
$P : 3x - 2y + 5z - 1 = 0$
et $Q : 2x - 3y + 2z - 2 = 0$.
1) Montrer que P et Q se rencontrent suivant une droite D.
2) Soient a et b deux réels non tous nuls.
a) Montrer que la relation :
$a(3x -2y + 5z - 1) +b(2x -3y + 2z - 2) = 0$
est l'équation cartésienne d'un plan contenant la droite D.
b) En déduire une équation cartésienne du plan R passant par le point I(2,5,0) et contenant la droite D.
3) Déterminer une équation cartésienne du plan S perpendiculaire à P et contenant D.
4) a) Calculer les distances du point A aux plans P et S et à la droite D.
b) Etablir une relation entre ces trois distances.

21 Ecrire une équation de la sphère de centre I et de rayon R dans chacun des cas suivants :
1) I(1, 2, 3) et R = 1
2) I(-1, 0, 3) et $R = \sqrt{2}$

22 Ecrire une équation cartésienne de la sphère de diamètre [AB]
1) A(-1, 3, 0) et B(0, 0, -2)
2) A(1, -2, 2) et B(1, -1 , -2)

23 Déterminer l'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace tels que :
a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 12 = 0$
b) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z + 5 = 0$
c) $x^2 + y^2 + z + 2x + 2y + 6z - 8 = 0$

24 Etudier dans chacun des cas suivants la position relative de la sphère S et du plan P :
a) $P : x - y = 0$
et $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x -2y - 2z = 0$
b) $P : 2x + 3y - 2z + 1 = 0$
et $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z = 0$
c) $P : x + y = 0$ et $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$

25 Soit D la droite définie par ses équations paramétriques

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \, , \; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$$

et A(0,2,2) un point de l'espace.
1)Ecrire des équations cartésiennes de deux plans dont D est l'intersection.
2)a)Ecrire les équations paramétriques du plan P passant par A et contenant D.
b)Donner une équation cartésienne de P.
3)Donner une équation cartésienne du plan Q parallèle à P et passant par le point B(0,0,1)
4)a)Ecrire une équation cartésienne du plan R contenant D et perpendiculaire à P.
b) Donner une équation d'une sphère tangente aux plans R et P.
c) Donner une équation d'une sphère tangente aux plans P et Q.

26 L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

on donne les points A(1,1,1) ; B(3,1,0) et C(-1,0,1)

1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Soit P le plan déterminé par les points A, B et C. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan P est : $x - 2y + 2z - 1 = 0$

c) Soit Q le plan dont une équation cartésienne est $2x + y + 2z + 1 = 0$.

Montrer que les plans P et Q sont sécants.

2) Soit t un réel et le point I_t (1, -1, t)

a) Vérifier que la distance du point I_t au plan P est égale à la distance du point I_t au plan Q.

b) Montrer que si $t = -1$, alors le point I_t appartient à P et Q.

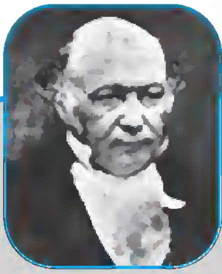
c) Montrer que si $t \neq -1$, alors il existe une sphère S_t de centre I_t et tangente à la fois aux plans P et Q. Quel est son rayon en fonction de t ?

3) Soit $t = 2$.

Déterminer les coordonnées du point H de contact de la sphère S_2 avec le plan Q.

(D'après Bac Tunisien, juin 2005)

APERÇU HISTORIQUE



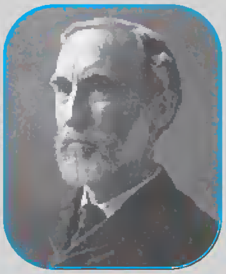
Hamilton William Rowan, Irlandais : 1805-1865

Hamilton étudie et pratique dès l'âge de 5 ans les langues anciennes : latin, grec, hébreu, entre 8 et 10 ans, il aura appris le français, l'italien et l'arabe et commence l'apprentissage du persan ! La rencontre avec un calculateur prodige lui donne le goût des mathématiques. Il entre au Trinity Collège de Dublin et dévore mathématiques et astronomie. Hamilton n'a que 17 ans lorsqu'il soumet à l'Académie royale de Dublin un correctif à la Mécanique céleste de Laplace... Astronome titulaire, à 22 ans, de la chaire d'astronomie à ladite Académie, il publia des travaux en optique géométrique et rénova la mécanique analytique (*mécanique hamiltonienne*, fondement de la mécanique quantique). Il se consacrera finalement aux mathématiques et tout particulièrement aux structures algébriques (groupe de transformations, espace vectoriel, algèbre, corps). Par son essai Elementary *Essay on Algebra as the Science of Pure Time* (1837), il est aussi à l'origine de la partition des rationnels qui amena Dedekind à la construction des nombres réels par les "coupures".

En 1843, Hamilton inventa les quaternions qui permettent de définir le produit vectoriel. Indépendamment et à la même période (1844) Grassmann définissait dans *Die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik* un « produit géométrique » à partir de considérations géométriques ; mais il ne parvient pas à définir clairement un produit vectoriel. Puis Grassmann lit Hamilton et s'inspire de ses travaux pour publier en 1862 une deuxième version de son traité qui est nettement plus claire. De même, Hamilton a lu les travaux de Grassmann et les a commentés et appréciés. Plus tard Maxwell commença à utiliser la théorie des quaternions pour l'appliquer à la physique. Après Maxwell, Clifford modifia profondément le formalisme de ce qui devenait l'analyse vectorielle. Il s'intéressa aux travaux de Grassmann et Hamilton avec une nette préférence pour le premier. En 1881, Gibbs publia *Elements of Vector Analysis Arranged for the Use of Students of Physics* s'inspirant des travaux déjà réalisés notamment ceux de Clifford et Maxwell. Si les physiciens se sont empressés d'utiliser le formalisme de Gibbs, celui-ci ne fut accepté en mathématiques que bien plus tard après plusieurs modifications.

Elément important de calcul en géométrie euclidienne, le produit scalaire apparaît cependant assez tard dans l'histoire des mathématiques. On en trouve trace chez Hamilton en 1843 lorsqu'il crée le corps des quaternions. Peano le définit ensuite associé à un calcul d'aire ou de déterminant.

Roberto Marco Longo et Cesare Burali-Forti le définissent seulement à l'aide du cosinus d'un angle et lui donne le nom de produit intérieur ou produit scalaire. C'est sous cette forme qu'il apparaît par la suite. Sa qualité de forme bilinéaire symétrique sera ensuite exploitée en algèbre linéaire et, de propriété, deviendra définition.



Josiah Willard Gibbs
New Haven,
11 février 1839
28 avril 1903

Josiah Willard Gibbs est un physico-chimiste américain. Il est aussi un des fondateurs de l'analyse vectorielle.

Gibbs passe son doctorat en 1863 à l'Université de Yale, où il devient membre de la société secrète Skull and Bones. Il étudie ensuite à Paris, Berlin et Heidelberg.

Parallèlement à Heaviside, il introduit l'analyse vectorielle en séparant la partie réelle et la partie vectorielle du produit de deux quaternions purs, ceci dans le seul but d'une utilisation en physique.

Gibbs écrit un premier ouvrage sur le sujet à l'usage de ses étudiants, et devant le succès obtenu, étaye l'analyse vectorielle dans une série de cours qui seront rassemblés et publiés en 1901 par son élève Wilson.

La notation du produit scalaire à l'aide d'un point ou d'une croix provient de Josiah Willard Gibbs, dans les années 1880.Le produit scalaire se révèle très utile, aussi bien en physique pour le calcul du travail d'une force qu'en géométrie élémentaire pour démontrer des propriétés sur les angles et les distances ou en algèbre linéaire pour munir un espace vectoriel d'une distance. On peut, à la suite de Peano, voir le produit scalaire comme une aire. Si on oriente le plan de **x** vers **y**, le produit scalaire des vecteurs **x** et **y** est égal à l'aire orientée du parallélogramme construit grâce aux vecteurs **y** et $\mathbf{x}_r$. Le vecteur $\mathbf{x}_r$ est l'image du vecteur **x** par une rotation d'angle droit direct. Le produit scalaire peut donc se calculer à l'aide d'un déterminant : $\mathbf{x} \,.\, \mathbf{y} = \det(\mathbf{y} \,.\, \mathbf{x}_r)$. Sous cette forme, peuvent être retrouvées toutes les propriétés de symétrie et de bilinéarité du produit scalaire.

Sur le dessin ci-dessous, les parallélogrammes ont été déformés en rectangle de même aire par la propriété de cisaillement. L'aire verte correspond à un produit scalaire positif et l'aire rose à un produit scalaire négatif.