Partie 2

Chapitre 3

Droites et plans dans l'Espace

Plan du chapitre

❈	**Activités préliminaires**	
❈	**Cours**	
	❖	Équations de droites - Positions relatives de deux droites.
	❖	Équations de plans - Positions relatives de deux plans.
	❖	Positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace.
❈	**Résumé du cours**	
❈	**Avec L'ordinateur**	
❈	**Exercices et Problèmes**	
❈	**Aperçu Historique**	

ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

Dans tout ce chapitre, on désigne par $\mathscr{E}$ l'ensemble des points de l'espace et par $\mathscr{W}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace.

1 L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On donne les points A(2, 3,0), B(3,2,-3) , C(4,-1,2) et D(3,0,-2).

1) Montrer que les quatre points A, B, C et D ne sont pas coplanaires

2) a) Calculer les coordonnées des milieux respectifs I,J,K et L des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

b) Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$. Quelle conséquence peut-on tirer au sujet du quadrilatère IJKL ?

3) On désigne par M et N les milieux respectifs des segments [AC] et [BD].

Comparer les vecteurs $\overrightarrow{JM}$ et $\overrightarrow{NL}$ ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{NK}$.

2 L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On donne les points A(-1,2,3) , B(4,1,-2) et C(3,4,-5)

1) a) Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans la base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

b) Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

2) Déterminer les coordonnées du point M tel que ABCM soit un parallélogramme

3 L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

On donne les points A(-1,2,4) et B(5,-2,2)

1) Calculer les coordonnées du milieu I du segment [AB]

2) Déterminer les coordonnées du point M défini par $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

4 Dans l'ensemble $\mathscr{W}$ muni d'une base $B=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ on donne les vecteurs

$\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-m\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}m\\4-m\\m-3\end{pmatrix}$; m est un réel.

Déterminer m pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

5 Dans l'espace $\mathscr{E}$ rapporté au repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ on donne les points A(2,2,2), B(-1,2,-1), C(2,3,5) et D(1,0,-1). Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

6 Dans l'ensemble $\mathscr{W}$ muni d'une base $B = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ on donne les vecteurs

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\5\\-3\end{pmatrix}$

a) Calculer le déterminant de ces trois vecteurs.

b) Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

7 L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

On donne les points A(0,-3,-4), B(6,1,-3) et C(-8,-9,4)

1) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) Calculer les coordonnées des milieux respectifs I et J des segments [AB] et [AC]

3) a) Déterminer les coordonnées du point K tel que $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 2\,\overrightarrow{IJ}$

b) Prouver que les points A, C et K sont alignés et préciser leurs positions relatives.

$\mathscr{W}$ est muni d'une base $B = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}a''\\b''\\c''\end{pmatrix}$ trois vecteurs de $\mathscr{W}$. On a :

$$\left(\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{vmatrix}a & a'\\ b & b'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a & a'\\ c & c'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}b & b'\\ c & c'\end{vmatrix} = 0\right) \text{ où } \begin{vmatrix}a & c\\ b & d\end{vmatrix} = ad - bc.$$

$$\left(\vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{vmatrix}a & a' & a''\\ b & b' & b''\\ c & c' & c''\end{vmatrix} = 0\right)$$

$$\text{où } \begin{vmatrix}a & a' & a''\\ b & b' & b''\\ c & c' & c''\end{vmatrix} = a\begin{vmatrix}b' & b''\\ c' & c''\end{vmatrix} - b\begin{vmatrix}a' & a''\\ c' & c''\end{vmatrix} + c\begin{vmatrix}a' & a''\\ b' & b''\end{vmatrix}$$

COURS

Equations de droites dans l'espace Positions relatives de deux droites

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

Activité 1

1) Soit un vecteur non nul $\vec{u}$ et un point A de l'espace $\mathscr{E}$.

Soit D la droite définie par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Montrer qu'un point M appartient à D si et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + k\vec{u}$

2) On considère la droite D = D $(A, \vec{u})$ où $A(x_0, y_0, z_0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Soit M(x, y, z) un point de l'espace. Montrer que $M \in D$ si et seulement si, il existe un réel λ tel que : $\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$

Le système $\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \ ; \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$ constitue une **représentation paramétrique** de la droite D dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Activité 2

On considère les points A(1, 2, -1) et B(4, -3, 0) de l'espace $\mathscr{E}$. Donner un système d'équations paramétriques de la droite (AB).

Activité 3

Soit la droite D passant par A(1, -1, -3) et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$.

a) Donner un système d'équations paramétriques de la droite D.
b) Soit M(x, y, z) un point de l'espace . Montrer que M appartient à D si et seulement si on a : $\begin{cases}3x+2y-1=0\\5x+2z+1=0\end{cases}$

On dit que ce système constitue une **représentation cartésienne** de la droite D dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Activité 4

Soit la droite D de l'espace $\mathscr{E}$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases}x=1+2t\\y=-3-5t;\ t\in\mathbb{R}\\z=1-t\end{cases}$

Déterminer une représentation cartésienne de la droite Δ passant par le point A(3, -2, 1) et parallèle à D.

Activité 5

On considère les deux droites D et D' de l'espace $\mathscr{E}$ de représentations paramétriques respectives : $D:\begin{cases}x=3\alpha-2\\y=-2\alpha+1,\ \alpha\in\mathbb{R}\\z=\alpha\end{cases}$ et $D':\begin{cases}x=-3t+1\\y=-t+2\quad,\ t\in\mathbb{R}\\z=4t-3\end{cases}$

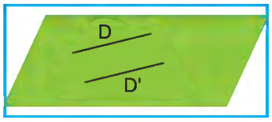
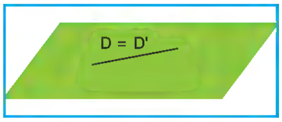
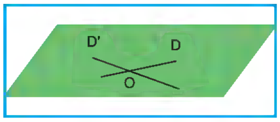
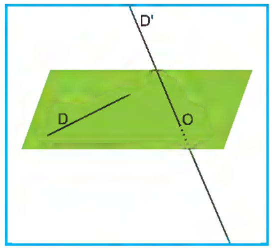
1) Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de D et un vecteur directeur $\vec{v}$ de D'.
2) Les droites D et D' sont-elles parallèles ? Justifier la réponse.
3) Les droites D et D' sont-elles coplanaires ? Justifier la réponse.

Activité 6

On considère les droites D_1 et D_2 de l'espace $\mathscr{E}$ définies par :

$$D_1:\begin{cases}x=3z-5\\y=\dfrac{2}{3}z+1\end{cases}\quad \text{et}\quad D_2:\begin{cases}x=9z+2\\y=2z-7\end{cases}$$

1) Donner une représentation paramétrique pour chacune de ces deux droites.
2) Etudier la position relative, dans l'espace, des droites D_1 et D_2.

<table>
<tr><th colspan="4">Positions relatives de deux droites D et D' de l'espace</th></tr>
<tr>
<td>
Les vecteurs directeurs de D et D' sont colinéaires.
$D \cap D' = \varnothing$.
D et D' sont strictement parallèles. (D // D')</td>
<td>
Les vecteurs directeurs de D et D' sont colinéaires.
$D \cap D' = D = D'$.
D et D' sont confondues.
(D // D').</td>
<td>
Les vecteurs directeurs de D et D' ne sont pas colinéaires
$D \cap D' = \{O\}$.
D et D' sont sécantes en O.</td>
<td>
Les vecteurs directeurs de D et D' ne sont pas colinéaires et $D \cap D' = \varnothing$.</td>
</tr>
<tr><td colspan="3">D et D' sont coplanaires</td><td>D et D' ne sont pas coplanaires</td></tr>
</table>

Activité 7

On considère les trois droites D, D' et Δ de l'espace $\mathscr{E}$ telles que:

$$D:\begin{cases} x=\alpha+1 \\ y=\alpha-1 \\ z=2\alpha+1 \end{cases},\ \alpha\in\mathbb{R}\ ;\quad D':\begin{cases} x=-2\beta \\ y=-\beta-1 \\ z=\beta+4 \end{cases},\ \beta\in\mathbb{R}\ \text{ et }\ \Delta:\begin{cases} x-y+3z+3=0 \\ x+y-z-5=0 \end{cases}$$

1) Etudier la position relative des droites D et D'.
2) Donner une représentation paramétrique de Δ.
3) Etudier la position relative des droites D et Δ.

Equations de plans dans l'espace
Positions relatives de deux plans

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

Activité 1

Soit un plan P, de l'espace $\mathscr{E}$, défini par un point $A(x_0, y_0, z_0)$ et deux vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ non colinéaires. Soit M(x, y, z) un point de l'espace.

1) Montrer que M appartient à P si et seulement si, il existe deux réels λ et μ tels que : $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$

2) En déduire que $M\in P$ si et seulement si, il existe deux réels λ et μ tels que :
$$\begin{cases} x=x_0+\lambda a+\mu a' \\ y=y_0+\lambda b+\mu b' \\ z=z_0+\lambda c+\mu c' \end{cases}$$

Le système $\begin{cases} x=x_0+\lambda a+\mu a' \\ y=y_0+\lambda b+\mu b' \; ; (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \\ z=z_0+\lambda c+\mu c' \end{cases}$ constitue une **représentation paramétrique** du plan P dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Activité 2

Donner un système d'équations paramétriques du plan P, de l'espace $\mathscr{E}$, passant par le point A(4, 1, 1) et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\\6\end{pmatrix}$

Activité 3

On considère les points A(-1, -2, 5), B(1, 7, 1) et C(3, 4, 1) de l'espace $\mathscr{E}$.

1) Montrer que ces trois points ne sont pas alignés.
2) Donner un système d'équations paramétriques du plan Q passant par les points A, B et C.

Activité 4

On considère les points A(2, 3, 1), B(1, 0, 2) et C(1, 1, 3) de l'espace $\mathscr{E}$.

1) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan de l'espace $\mathscr{E}$.
2) Soit M(x, y, z) un point de l'espace et soit P le plan passant par A, B et C.

a) Calculer à l'aide de x, y et z le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que M appartient à P si et seulement si 4x - y + z - 6 = 0

L'équation 4x - y + z - 6 = 0 est une **équation cartésienne** du plan P dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

3) Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\vec{u}$ soit un vecteur du plan P

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

- Tout plan de l'espace a une équation cartésienne de la forme ax + by + cz +d = 0 où a, b, c et d sont des constantes réelles telles que (a, b, c) ≠ (0, 0, 0).
- Toute équation de la forme ax + by + cz +d = 0 où a, b, c et d sont des constantes réelles telles que (a, b, c) ≠ (0, 0, 0) est celle d'un plan de l'espace $\mathscr{E}$.
- Soit P : ax + by + cz +d = 0 un plan de l'espace et soit $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace. $\vec{u}$ est un vecteur du plan P, si et seulement si, $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$.

Activité 5

On considère le plan P, de l'espace $\mathscr{E}$, passant par les points A(2, -4, -3) et B(-3, 2, 1) et parallèle à la droite $D(O,\vec{u})$ où $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\ 1\\ 5\end{pmatrix}$. Déterminer une équation cartésienne de P.

Activité 6

Soient P et Q deux plans de l'espace $\mathscr{E}$ définis par P : x+ 2y - 4z + 1 = 0
et Q : $\frac{1}{2}x + y - 2z + 1 = 0$.
Montrer que P et Q sont parallèles.

Activité 7

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$
Soit le plan P défini par P : x - 2y + z + 3 = 0.
1) Donner un point et deux vecteurs directeurs de P.
2) En déduire une représentation paramétrique du plan P.
3) Donner une équation cartésienne du plan Q parallèle à P et passant par l'origine O.

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

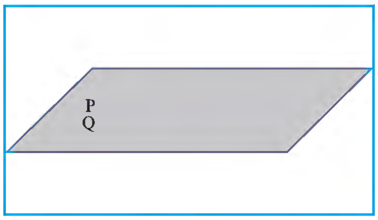
Deux plans P et P' de $\mathscr{E}$ sont parallèles si et seulement si, tout vecteur de l'un est un vecteur de l'autre.

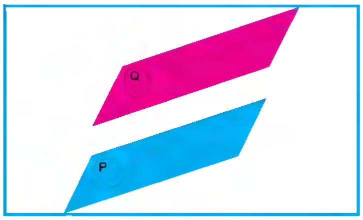
Soient P : ax + by + cz +d = 0 et P' : a'x + b'y + c'z +d' = 0 avec a', b' et c' trois réels non nuls. On a : $\left(P // P'\right) \Leftrightarrow \left(\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}\right)$

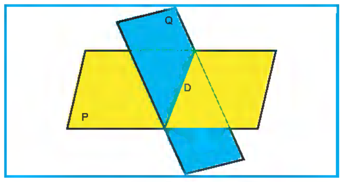
Activité 8

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) Déterminer une équation cartésienne pour chacun des plans $(O, \vec{i}, \vec{j})$; $(O, \vec{i}, \vec{k})$ et $(O, \vec{j}, \vec{k})$.
2) Donner une équation cartésienne de la droite d'intersection des plans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(O, \vec{i}, \vec{k})$.
3) Donner une équation cartésienne du plan passant par le point A (1, 2,- 3) et parallèle au plan $(O, \vec{j}, \vec{k})$.
4) Déterminer l'intersection du plan Q : y = 2 et du plan $(O, \vec{j}, \vec{k})$.

<table>
<tr><th colspan="3">Positions relatives de deux plans P et Q de l'espace</th></tr>
<tr>
<td>

les plans P et Q
sont confondus
P = Q</td>
<td>

les plans P et Q
sont disjoints
$P \cap Q = O$</td>
<td>

les plans P et Q
sont sécants suivant
une droite D
$P \cap Q = D$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">P et Q sont parallèles :
Tout vecteur de l'un est un vecteur de l'autre.</td>
<td>P et Q sont sécants :
Il existe au moins un vecteur de l'un qui n'est pas de l'autre.</td>
</tr>
</table>

Activité 9

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Etudier la position relative des deux plans P et Q et déterminer $P \cap Q$, dans chacun des cas suivants :

a) P : x - 2y + z + 5 = 0 ; Q : -2x + 4y - 2z + 7 = 0.

b) P : x - 2y + z + 1 = 0 ; Q : 3x + 4y - 2z + 5 = 0.

c) P : 2x - 3y + 2z - 4 = 0 ; Q : $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 5 - 4\lambda + 2\mu \end{cases}$; $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

Positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Activité 1

1) Rappeler les positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace $\mathscr{E}$ et illustrer chaque position par une figure.

2) L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ On donne le plan P et la droite D définis par $P : 3x - 2y + z - 5 = 0$ et $D : \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -1 + 2t \ ; t \in \mathbb{R} \\ z = -6 - 5t \end{cases}$

a) Montrer que D est incluse dans le plan P.

b) Montrer que D est strictement parallèle au plan $Q: x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = 0$.

Soit D une droite et P un plan de l'espace. On a :

- D est parallèle à P si et seulement si un vecteur directeur de D est un vecteur de P.
- D est parallèle à P ou bien D est sécante avec P.

Activité 2

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

1) a) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite D passant par le point A(2, -1, 0) et de vecteur directeur $\vec{e}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Déterminer un système d'équations paramétriques du plan P passant par le point B(1, -2, 2) et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) Etudier la position relative de D et P dans l'espace.

Activité 3

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On considère le plan P et la droite D définis par :

P : x - 2y - z - 1 = 0 et D : $\begin{cases} 3x + y - 10 = 0 \\ 2x + z - 9 = 0 \end{cases}$

1) Montrer que D est sécante à P.

2) Déterminer le point d'intersection de D et P.

Activité 4

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ On considère les trois plans P, Q et R définis par : P : x - y + z + 1 = 0 ; Q : x + y - z + 1 = 0; R : x + 2y + z - 1 = 0.

1) Montrer que P et Q sont sécants suivant une droite D dont on donnera une représentation paramétrique.
2) Etudier la position relative de la droite D et du plan R.
3) En déduire l'intersection des trois plans P, Q et R.

Activité 5

On considère un tétraèdre ABCD .Soit P un point de [AB], Q un point de [AC] et R un point de [CD] tels que les droites (PQ) et (BC) soient sécantes en un point M.

1) Déterminer l'intersection des plans (PQR) et (BCD).
2) Déterminer l'intersection des trois plans (PQR), (BCD) et (ABC).
3) On suppose que ABCD est un tétraèdre régulier de côté α et que l'espace est muni du repère cartésien $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$ et on considère les points $P\left(0, 0, \frac{3}{4}\alpha\right)$; $Q\left(\frac{1}{2}\alpha, 0, \frac{1}{2}\alpha\right)$ et $R\left(\frac{1}{4}\alpha, \frac{3}{4}\alpha, 0\right)$
   a) Donner une équation cartésienne de chacun des plans (BCD) et (ABC).
   b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (PQR) est $6x + 4y + 12z - 9\alpha = 0$.
   c) Déterminer les coordonnées du point M.
   d) Démontrer que $(PQR) \cap (BD) = (MR) \cap (BD)$.
   e) Soit S le point d'intersection des droites (MR) et (BD).Déterminer les coordonnées de S.
   f) Que représente le quadrilatère PQRS pour le tétraèdre ABCD ? Justifier la réponse.

RÉSUMÉ DU COURS

On désigne par $\mathscr{E}$ l'ensemble des points de l'espace et par $\mathscr{W}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace. $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ et $\mathscr{W}$ muni de la base $B = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

* Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{W}$ et A, B, C et D quatre points de l'espace $\mathscr{E}$ tels que : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$

  ($\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires) équivaut à (A, B, C et D appartiennent à un même plan).

* Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$. On a :

  ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires) équivaut à ($\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$).

  ($\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires) équivaut à ($\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = 0$).

* Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul et $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace.

  Une représentation paramétrique de la droite $D(A, \vec{u})$ est de la forme

  $$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \; ; \; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$$

  $D(A, \vec{u})$ et $D(A', \vec{v})$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires .

* Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non colinéaires et $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace $\mathscr{E}$.

Une représentation paramétrique du plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ est de la forme

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu a' \\ y = y_0 + \lambda b + \mu b' \; ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \\ z = z_0 + \lambda c + \mu c' \end{cases}$$

* Toute équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c et d sont des constantes réelles telles que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ est celle d'un plan. Et tout plan de l'espace admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c et d sont des constantes réelles telles que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

* Soit $P : ax + by + cz + d = 0$ un plan de l'espace $\mathscr{E}$ et soit $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta \\ \gamma\end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace.

$\vec{u}$ est un vecteur du plan P, si et seulement si $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$

Soient deux plans $P : ax + by + cz + d = 0$ et $P' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$

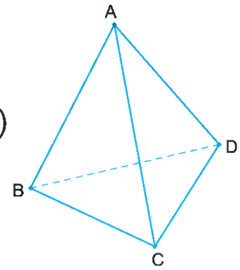
avec a', b' et c' trois réels non nuls. On a $(P // P') \Leftrightarrow \left(\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}\right)$.

* Deux plans sont parallèles si tout vecteur de l'un est un vecteur de l'autre.
* Deux plans sont sécants si et seulement si il existe un vecteur de l'un qui n'est pas un vecteur de l'autre.
* Une droite est parallèle à un plan si et seulement si un vecteur directeur de cette droite est un vecteur de ce plan.

AVEC L'ORDINATEUR

Activité

ABCD est un tétraèdre régulier de côté a. Soit M un point du segment [BC] et P le plan perpendiculaire à [BC] passant par M. La section du tétraèdre par ce plan est un triangle MNP. Soit G le centre de gravité du triangle MNP. Il s'agit de déterminer l'ensemble des points G lorsque M décrit le segment [BC].



Recherche d'une conjecture avec Geospace W :

Définir un réel a libre dans [0,10] et les points A, B, C et D sachant que le repère orthonormal R_{xyz} est le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ défini par : O est le centre de gravité de la face BCD.

$\vec{i}$ est colinéaire à $\overrightarrow{DB}$ et de même sens.

$\vec{j}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OC}$ et de même sens.

$\vec{k}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OA}$ et de même sens.

Créer / Solide / Polyèdre convexe / Défini par ses sommets : permet de construire le tétraèdre ABCD nommé P_y.

Après avoir placé un point libre M sur le segment [BC], en sélectionnant :
Créer / Plan / perpendiculaire à une droite, définir le plan Q passant par M et orthogonal à [BC].
Créer / Ligne / Polygone convexe / Section d'un polyèdre par un plan : permet de visualiser la section du tétraèdre ABCD par le plan.
En déplaçant le point M sur le segment [BC], préciser :
a) La nature de la section du tétraèdre ABCD par le plan Q.
b) La section de ABCD par le plan Q lorsque M est le milieu I de [BC].
On suppose que le point M est sur le segment [BI].
Définir les points N et P, intersections du plan Q avec les segments [AD] et [AB].
Construire G en sélectionnant : Créer / Point / Centre divers / Centre de gravité.
En sélectionnant Divers / Modifier, modifier M comme point libre sur le segment [BI].
En utilisant Créer / Ligne / Courbe / Lieu de points : tracer l'ensemble des points G lorsque M décrit le segment [BI].
En utilisant les symétries de la figure, conjecturer l'ensemble des points G.

Une stratégie de justification de la conjecture :

On se place dans le repère cartésien $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$. Si le point M est sur le segment [BI], il a pour coordonnées (x,0,0) avec $0 \le x \le \frac{1}{2}$.

Montrer que G a pour coordonnées $\left(\frac{x}{3}, \frac{2x}{3}, \frac{2x}{3}\right)$ puis que : $\overrightarrow{BG} = \frac{2x}{3}\left(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA}\right)$.

Soit G_1 le centre de gravité du triangle IAD. On a : $\overrightarrow{G_1I} + \overrightarrow{G_1D} + \overrightarrow{G_1A} = \vec{0}$

Montrer que, pour tout réel x tel que $0 \le x \le \frac{1}{2}$, $\overrightarrow{BG} = 2x\,\overrightarrow{BG_1}$.

En déduire l'ensemble des points G lorsque M est un point du segment [BI].
Déterminer l'ensemble des points G lorsque M décrit le segment [BC].

EXERCICES ET PROBLÈMES

1 Dans l'ensemble $\mathscr{W}$ muni d'une base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on donne les vecteurs :

$\vec{u} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{u'} = a\vec{i} + 2\vec{j} + b\vec{k}$

$\vec{v} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$; $\vec{v'} = 4\vec{i} + \alpha\vec{j} + \beta\vec{k}$

$\vec{w} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{w'} = -5\vec{i} + \lambda\vec{j} + \mu\vec{k}$

a) Déterminer les réels a et b tels que $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ soient colinéaires.

b) Déterminer les réels α et β tels que $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ soient colinéaires.

c) Déterminer les réels λ et μ tels que $\vec{w}$ et $\vec{w'}$ soient colinéaires.

2 l'ensemble $\mathscr{W}$ est muni d'une base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Dans chacun des cas suivants, dire si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}8\\-2\\5\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-4\end{pmatrix}$;

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}$;

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$.

3 L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$,

on donne les points

A(1,-1,1) ; B(2,-2,2); C(1,0,1) et D(0, 0,3).

Etudier la position relative des droites (AB) et (CD) dans l'espace.

4 L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

on donne les points

A(1, 0, 2) ; B(-1, 1, 4) ; C(5,-1, 2).

1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Donner une représentation paramétrique du plan $P(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

c) Déterminer une équation cartésienne du plan $P(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

2) Soit le point D(2, 3, 3).

a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AD).

b) Etudier la position relative de la droite (AD) et du plan $P(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

5 L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

On considère les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathscr{W}$ définis par :

$\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ et $\vec{w} = 2\vec{i} - \vec{j} - 9\vec{k}$

et le point A(1, 1, 4) de $\mathscr{E}$.

1) Déterminer une équation cartésienne du plan P qui passe par A et qui admet le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ comme vecteurs directeurs.

2) Existe-t-il des réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$? Justifier la réponse .

6 L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ on donne les points A(1, -2, 1) ; B(2, -1, -2) et C(1,0, 1).

1) a) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan P de l'espace $\mathscr{E}$.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan P

c) Déterminer le réel m pour que le vecteur $\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + m\vec{k}$ soit un vecteur de P.

2) Déterminer, dans chacun des cas suivants, la position relative de la droite D avec le plan P :

a) $D = D(A, -2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k})$

b) $D = D(O, -2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k})$

c) $D = D(B, -2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k})$

7 L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soient D et D' les droites définies par les représentations paramétriques suivantes :

$$D : \begin{cases} x = -\alpha + 1 \\ y = 3\alpha + 2, \ \alpha \in \mathbb{R} \ ; \\ z = \alpha - 4 \end{cases}$$

$$D' : \begin{cases} x = 1 - 2\beta \\ y = 3 - \beta \quad , \beta \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 2\beta \end{cases}$$

a) Donner un vecteur $\vec{u}$ directeur de D et un vecteur directeur de D'.

b) Montrer que D et D' ne sont pas parallèles.

c) Déterminer l'intersection de D et D' et conclure sur la position relative de ces deux droites.

8 L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Dans chacun des cas suivants , étudier la position relative des plans P et P' :

a) $P: x - y + z + 1 = 0$; $P': -x + y - z = 0$

b) $P: 2x + y + z - 2 = 0$; $P': x - y - z = 0$

c) $P: 2x - y + z + 1 = 0$; $P': x + 2y + 3z - 1 = 0$

d) $P: x + 2z - 1 = 0$; $P': y - 2z + 4 = 0$

e) $P: 2x - 3y + 2z - 4 = 0$

$$P' : \begin{cases} x = 2 + t - s \\ y = 1 - 2t + s ; \ (t,s) \in \mathbb{R}^2 \\ z = t + 3s \end{cases}$$

f) $$P : \begin{cases} x = 1 + m - p \\ y = 2 - m - p \quad ; (m,p) \in \mathbb{R}^2 \\ z = -1 + m - 2p \end{cases}$$

$$P' : \begin{cases} x = -2 - 2t + 2s \\ y = 5 + 2t + 2s \quad ; (t,s) \in \mathbb{R}^2 \\ z = 4 - 2t + 4s \end{cases}$$

9 L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soient les points :

A(1,0, 2) ; B(-1, 2, 1) ; C(0, 1, 1).

a) Déterminer une représentation paramétrique du plan (ABC).

b) Déterminer une équation cartésienne du plan P parallèle au plan (ABC) et passant par le point I(0, 2 , -3).

10 L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Déterminer l'intersection de la droite D et du plan P dans chacun des cas suivants

a) $$D : \begin{cases} x = -\alpha + 1 \\ y = 3\alpha + 2, \ \alpha \in \mathbb{R} \ ; \\ z = \alpha - 4 \end{cases}$$

$P : x + y + z + 4 = 0$

b) $P: x - y + z - 2 = 0$

et $D : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+2}{3}$

c) $D : \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = -2\alpha \\ z = -\alpha + 1 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$;

$P : \begin{cases} x = 3 + 2\alpha + 3\beta \\ y = \alpha - 4\beta \\ z = 2 + \alpha + \beta \end{cases}, (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

d) $D : \begin{cases} x + y - 3z + 2 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$;

$P : x - y + z + 1 = 0$

11 L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

1) Déterminer l'intersection deux à deux des trois plans suivants :

$P : 2x - y + z - 3 = 0$;

$Q : x + 2y + z - 1 = 0$ et $R : 3x + y - z + 2 = 0$

2) Déterminer l'intersection de ces trois plans.

APERÇU HISTORIQUE

La notion d'espace a évolué au fil des siècles.

Les mathématiciens ont longtemps considéré l'espace géométrique comme identique à l'espace physique dans lequel nous nous mouvons .Le postulat d'**Euclide** (qui stipule que « par un point non situé sur une droite ne passe qu'une droite et une seule parallèle à la première ») suffisait pour démontrer n'importe quel théorème de géométrie. Mais avec l'apparition des géométries non euclidiennes (au 19ième siècle), la notion d'espace s'est trouvée complètement bouleversée et aboutit au concept d'hyperespace (espace de dimension supérieure à 3).

D'autre part, l'avènement de la géométrie projective (**Jean Victor Poncelet** : mathématicien français 1788 - 1867, auteur de « traité des propriétés projectives des figures ») a permis d'envisager d'autres procédés de description de l'espace.

La géométrie dans l'espace constitue une base incontournable de nombreux domaines des mathématiques, de l'astronomie et de la navigation (Mesure, repérage etc.).

Euclide : mathématicien grec du 3ième siècle av.J.C. Ses Éléments, considérés comme le livre de géométrie par excellence, constituent une vaste synthèse de la géométrie classique grecque. La géométrie **euclidienne**, relative à Euclide et à sa méthode, qui se repose sur le postulat des parallèles d'Euclide. Les géométries non euclidiennes, quant à elles, ce sont des géométries dans lesquelles l'axiome correspondant à l'ancien postulat des parallèles est remplacé par un autre. Un espace vectoriel **euclidien** est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Euclide entouré par des étudiants