Partie 2

Chapitre 1

Nombres Complexes

Plan du chapitre

❈	**Activités préliminaires**	
❈	**Cours**	
	❖	Opérations algébriques sur les nombres complexes
	❖	Forme Trigonométrique et Forme Exponentielle d'un nombre complexe
	❖	Conditions de colinéarité et d'orthogonalité de deux vecteurs
❈	**Résumé du cours**	
❈	**Avec L'ordinateur**	
❈	**Exercices et Problèmes**	
❈	**Aperçu Historique**	

ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

Dans tout ce chapitre, P est le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

1 On donne les nombres complexes $z = 1 - 2i$ et $z' = 3 + 4i$.
Calculer $z + z'$, $z z'$, z^2 , $\frac{1}{z}$, $\frac{z}{z'}$.

2 1) Calculer $(1+i)^2$, $(1+i)^3$, $(1-i)^2$, $(1-i)^3$, $(1+i)(1-i)$ et $\frac{1+i}{1-i}$

2) Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $Z = \dfrac{z^2+z+1}{z^3+z^2+1}$ dans chacun des cas suivants : a) $z = 1+ i$; b) $z = 1- i$

3 Placer, dans le plan complexe les images respectives des nombres complexes suivants : $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -3i$, $z_3 = \frac{1}{i}$, $z_4 = 2$ et $z_5 = -3 -4i$

4 1) Calculer i^2 ; i^3 ; i^4 ; i^5 ; i^6 ; i^7 ; i^8. Que peut-on conjecturer pour i^{12} ?
2) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $i^n = i^r$ où r désigne le reste de la division euclidienne de n par 4.
3) En déduire i^{745} ; i^{1972} ; i^{2008} et i^{-2007} .

5 Dans le plan complexe, à tout point M d'affixe z et de coordonnées (x,y), on associe le nombre complexe $Z = z^2$.
1) Exprimer, en fonction de x et y, les réels Re(Z) et Im(Z).
2) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :
a) Z soit réel
b) Z soit réel négatif
c) Z soit imaginaire pur.

6 On donne les nombres complexes $u = 1-i$ et $v = 1+i\sqrt{3}$
1) Déterminer le module et un argument pour chacun des deux nombres complexes u et v.
2) Écrire u et v sous forme trigonométrique.

COURS

Opérations algébriques sur les nombres complexes

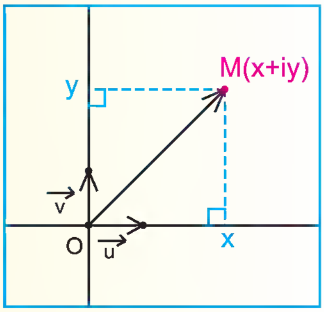
Forme algébrique d'un nombre complexe

Tout nombre complexe z s'écrit d'une manière unique sous la forme algébrique suivante :
$z = a + i\,b$ où a et b sont des réels et i est un nombre complexe tel que : $i^2 = -1$.
a s'appelle la partie réelle de z. On la note $a = Re(z)$;
b s'appelle la partie imaginaire de z. On la note $b = Im(z)$
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$
- Soit M(x,y) un point de P. On appelle affixe de M, le nombre complexe noté aff(M) ou z_M tel que : $aff(M) = z_M = x + iy$.
- M(x,y) est le point image du nombre complexe $z = x + iy$.
- Pour tous points A et B appartenant au plan, on appelle affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$, le complexe $aff(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A$.
- Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tous réels α et β on a :

$$aff\left(\alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}\right) = \alpha\, aff\left(\vec{u}\right) + \beta\, aff\left(\vec{v}\right)$$



Activité

Soient, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$,
les points A(2+i) , B(1-i) , C(i) et D(-1-i).
1) Déterminer l'affixe de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
2) En déduire la nature du quadrilatère ABDC.

Définition

Soit $z = a + i b$ un nombre complexe donné sous forme algébrique.
On appelle conjugué de z et on note $\bar{z}$, le nombre complexe défini par : $\bar{z} = a - ib$

Activité 2

On donne, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct ,
les points A(-2-i) , B(1+3i) et le point I milieu du segment [AB].

1) a) Placer les points A , B et I.
   b) Déterminer et construire l'ensemble D des points M(z) du plan tels que
   c) Vérifier que les points A et B appartiennent à D.
2) Soit l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M(z) du plan tels que
   a) Caractériser $\mathscr{C}$ par une équation cartésienne.
   b) Montrer que $\mathscr{C}$ est le cercle de diamètre [AB].

Activité 3

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct .

A tout point M d'affixe z différent de i, on associe le point M'(z') tel que .
1) Déterminer les coordonnées du point A' associé au point A(1+2i).
2) Déterminer les coordonnées du point B auquel est associé le point B'(0,-2).
3) Déterminer et construire l'ensemble des points M(z) tels que z' soit réel.
4) Déterminer et construire l'ensemble des points M(z) tels que z' soit imaginaire pur.

Activité 4

Soient, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A(2+i), B(1-i), C(i) et D(-1-i).

1) Déterminer l'affixe de chacun des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ et $\vec{AB}+\vec{AC}$.

2) En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

Module d'un nombre complexe

Définition

Soit $z = a + i b$ un nombre complexe. On appelle module de z et on note $|z|$, le réel positif défini par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\,\bar{z}}$

Interprétation géométrique du module d'un nombre complexe

Le module de l'affixe $z = a + ib$ d'un point M(a,b) du plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est la distance OM. On a $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = OM$

Activité 1

1) Calculer les modules des nombres complexes suivants :

i ; -3 ; $(1 + i)^2$; $3 - i\sqrt{3}$ et $\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

2) Calculer $\left|\left(1 + i\sqrt{3}\right)^4 \left(2 - i\sqrt{2}\right)^7\right|$ et $\left|\dfrac{1}{(1 + 2i)^2} - \dfrac{i + 2}{1 - i}\right|$

3) a) Montrer que si z et z' sont deux nombres complexes alors :

$|z + z'| \leq |z| + |z'|$

b) Dans quels cas a-t-on $|z + z'| = |z| + |z'|$?

Pour tous nombres complexes z et z', on a :

$|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$

$|z^n| = |z|^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

Pour tous nombres complexes z et z', tels que $z' \neq 0$, On a : $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

Activité 2

Dans le plan complexe, on donne les points A(1),
$B\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $C\left(\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

Pour tous points M et N du plan complexe, on a :
$MN = |z_N - z_M|$

Activité 3

Soit a un nombre complexe différent de -i.

Montrer que $\frac{1+ai}{1-ai}$ est de module 1 si et seulement si a est réel.

Activité 4

Dans le plan complexe, on donne les points A(-2+i), B(-3i) et C(i).
À tout point M(z) tel que $z \neq -3i$, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z+2-i}{3-iz}$.

1) a) Déterminer l'ensemble des points M(z) tels que z' soit réel.
   b) Déterminer l'ensemble des points M(z) tels que z' soit imaginaire pur.
   c) Déterminer et construire l'ensemble des points M(z) tels que $|z'| = 1$.

2) a) Montrer que $|z' - i| . |z + 3i| = 2\sqrt{5}$ avec $z \neq -3i$.
   b) En déduire que si M appartient au cercle de centre B et de rayon 1 alors M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Activité 5

Déterminer l'ensemble Δ des points M(z)

du plan complexe tels que : $|z| = |\bar{z} - 2|$.

Soit z un nombre complexe.

On a : $|z| = |\bar{z}|$

Argument d'un nombre complexe non nul

Activité 1

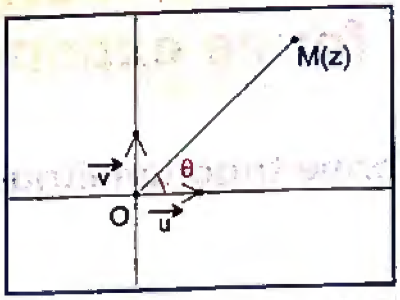
1) Construire, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives $Z_1 = 1+i$, $Z_2 = -i$ et $Z_3 = 2$.

2) Déterminer une mesure de chacun des angles $(\vec{u}, \overrightarrow{OA})$; $(\vec{u}, \overrightarrow{OB})$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OC})$.

Définition

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul et M son image dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On appelle argument de z et on note arg (z), toute mesure ,en radian, de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})$. On a donc :

$\arg(z) = (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}) + 2k\pi = \theta + 2k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$



Cas Particuliers :

Si z est un nombre réel strictement positif alors $\arg(z) = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
Si z est un nombre réel strictement négatif alors $\arg(z) = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Si $z = ib$ avec b réel strictement positif alors $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Si $z = ib$ avec b réel strictement négatif alors $\arg(z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Activité 2

Soient z un nombre complexe non nul et M son image dans le plan complexe.
1) a) Déterminer la nature de l'application du plan complexe dans lui-même qui à tout point M(z) associe le point $M'(\overline{z})$.
b) En déduire $\arg(\overline{z})$ en fonction de arg(z).

2) a) Déterminer l'application du plan complexe dans lui-même qui à tout point M(z) associe le point M'(-z).
b) En déduire arg(-z) en fonction de arg(z).
3) Soit α un réel non nul,déterminer $\arg(\alpha.z)$ en fonction de arg(z). (discuter selon le signe de α)
4) Déterminer les arguments des nombres complexes suivants :
1 ; -1 ; i ; -i ; 1 + i ; 1 - i ; -1 + i ; -1 - i.

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. On a :

$\arg(\overline{z}) = -\arg(z) + 2k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$

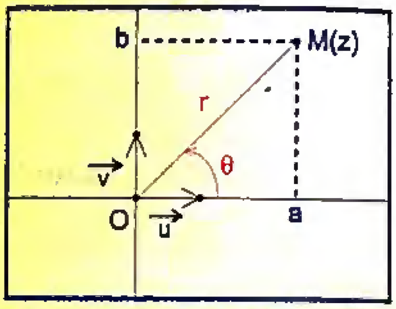
$\arg(-z) = \arg(z) + \pi + 2k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$

Forme trigonométrique et forme exponentielle d'un nombre complexe

Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Soit z un nombre complexe non nul. En notant r le module de z et θ un argument de z, on a :
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.
L'écriture de z sous la forme
$r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r > 0$ et $\theta \in IR$, est appelée forme trigonométrique de z.
Pour tout $r > 0$ et $\theta \in IR$, on note
$r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r, \theta]$
r et θ sont les coordonnées polaires du point M d'affixe z.

Soit $z = a + ib = [r, \theta]$ un complexe non nul. On peut représenter graphiquement le point M image de z par ses coordonnées algébriques a et b ou bien par ses coordonnées polaires r et θ. On a alors
$a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$.



Activité 1

1) Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul, On note
$r = |z|$ et $\theta = Arg(z) + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
Exprimer $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de a , b et r.

2) Soit $\theta \in IR$. Écrire, sous forme trigonométrique, les complexes suivants :
$z_1 = 1 + i\sqrt{3}$;
$z_2 = \sqrt{3} - i$; $z_3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$; $z_4 = -3 + i\sqrt{3}$; $z_5 = \cos\theta - i\sin\theta$
$z_6 = -\cos\theta - i\sin\theta$ et $z_7 = \sin\theta + i\cos\theta$

Activité 2

1) Soit $z = [r,\theta]$ et $z' = [r',\theta']$ deux nombres complexes non nuls avec
$r \in IR_+^*$, $r' \in IR_+^*$, $\theta \in IR$ et $\theta' \in IR$
Déduire de la forme trigonométrique de z et de z', les formes trigonométriques des complexes suivants : $\bar{z}$; $z.z'$; $\frac{1}{z}$; $\frac{z}{z'}$; z^n $(n \in \mathbb{Z})$ et $\lambda.z$ $(\lambda \in IR^*)$

) Applications : On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$; $z_2 = 1 - i$.

a) Écrire sous forme trigonométrique les complexes z_1 ; z_2 ; $\overline{z_1}$; $\overline{z_2}$; $\dfrac{z_2}{z_1}$ et z_1^6 .

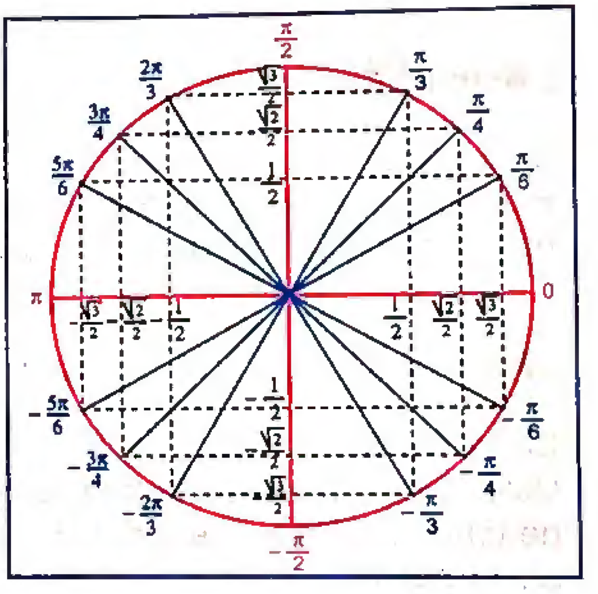
b) En déduire la forme trigonométrique de $Z = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\,\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Soient $z = [r,\theta]$ et $z' = [r',\theta']$ deux nombres complexes non nuls avec $r \in IR_+^*$, $r' \in IR_+^*$, $\theta \in IR$ et $\theta' \in IR$. On a pour tout entier n :

$\overline{z} = [r, -\theta]$; $\dfrac{1}{z} = \left[\dfrac{1}{r}, -\theta\right]$; $zz' = [r.r' , \theta + \theta']$; $\dfrac{z}{z'} = \left[\dfrac{r}{r'}, \theta - \theta'\right]$; $z^n = [r^n, n\theta]$

Activité 3

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = \dfrac{\sqrt{3} + i}{2}$, $b = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $c = a + b$ et $d = b - a$.



) Écrire a, b et $\dfrac{b}{a}$ sous forme trigonométrique.
En déduire la nature du triangle ABO.

) Placer les points A, B , C et D dans le plan et montrer que OACB est un carré.

) En déduire la forme trigonométrique de c et d.

) Déterminer alors les valeurs de
$\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$, et $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$.

orme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Pour tout $\theta \in IR$, on pose : $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$.
Soit $z = [r,\theta]$ un nombre complexe non nul, l'écriture $z = r\,e^{i\theta}$ avec r un réel strictement positif est la forme exponentielle de z.

Activité 1

1) Écrire sous forme exponentielle les complexes suivants :

$\left(-1+i\right)^4$; $\left(-1+i\sqrt{3}\right)$; $\left(3-i\sqrt{3}\right)$; $\dfrac{\left(\sqrt{3}-i\right)^3}{\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^5}$.

2) Soit $\theta \in \left]0, \pi\right[$, écrire sous forme exponentielle les complexes suivants :

$z_1 = 1 + e^{i\theta}$; $z_2 = i - e^{i\theta}$

$z_3 = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$; $z_4 = \sin\theta + i\left(1+\cos\theta\right)$

$z_5 = \dfrac{z_4}{z_3}$

3) Soit $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, écrire sous forme exponentielle les complexes suivants : $\dfrac{1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - i\,\mathrm{tg}\,\alpha}$ et $\dfrac{1}{i + \mathrm{tg}\,\alpha}$

Formules d'Euler

Pour tout réel θ on a :

$$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta$$

$$\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \sin\theta$$

Activité 2

Soit x un réel.
Exprimer cos(3x) et sin(3x) en fonction des puissances de cos x et sin x.

Formule de Moivre

Pour tout réel θ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Activité 3

Soit x un réel.
Utiliser les formules d'Euler pour écrire les expressions suivantes comme sommes de termes de la forme a cos (nx) et b sin (nx) où a et b désignent deux réels et n un entier naturel :

$\cos^2 x$; $\sin^2 x$; $\cos^3 x$; $\sin^4 x$ et $\cos^3 x \cdot \sin^4 x$

Nous disons que nous avons linéarisé ces expressions.

Formule du Binôme

Pour tous réels a, b et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^{n-k} \, b^k$$

Colinéarité et Orthogonalité de deux vecteurs

Activité 1

Soit $z = e^{2i\theta}$ où θ est un réel de $]0, 2\pi[$.

1) Déterminer le module et un argument du nombre complexe

$$z' = \frac{(1-z)^2}{\overline{z}\,(1+z)}.$$

2) Donner la valeur de θ pour laquelle z' est un réel

Soit z un nombre complexe on a

$$(z \text{ est réel}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \arg(z) = k\pi, \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \quad z = 0 \end{pmatrix}$$

$$(z \text{ est imaginaire pur}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \\ (k \in \mathbb{Z}) \end{pmatrix}$$

Activité 2

Dans le plan complexe, on considère les points A(1) et B(-i).
Soit l'application f de P \ { B } dans P qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que

$$z' = \frac{\overline{z} + 2i}{\overline{z} - i}$$

1) Vérifier que $z' - 1 = \dfrac{3i}{\overline{z} - i}$.

En déduire que

$$BM \cdot AM' = 3 \text{ et } (\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM'}}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Le plan P est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Pour tous points A, B, C et D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, on a :

$$(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}) = \arg(z_B - z_A) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

2) a) Montrer que si M appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre B et de rayon 3 alors M' appartient à un cercle $\mathscr{C}'$ que l'on précisera

b) Montrer que si M appartient à la droite (AB) alors M' appartient à une droite que l'on précisera.

Activité 3

Dans le plan complexe on considère les points A(1) et B(-1). A tout point M(z) tel que $z \neq 1$ on associe le point M'(z') tel que $z' = \dfrac{z-1}{1-\bar{z}}$.

1) Montrer que $|z'| = 1$.

2) Etablir que $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est réel et que $\dfrac{z'+1}{z-1}$ est imaginaire pur.

3) Interpréter géométriquement les résultats précédents.
En déduire une construction géométrique de M' connaissant M.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan, d'affixes respectives z et z', on

$\left(\begin{array}{c}\vec{u} \text{ et } \vec{v} \\ \text{sont colinéaires}\end{array}\right) \Leftrightarrow \dfrac{z}{z'}$ est réel

$\left(\begin{array}{c}\vec{u} \text{ et } \vec{v} \\ \text{sont orthogonaux}\end{array}\right) \Leftrightarrow \dfrac{z}{z'}$ est imaginaire pur

Activité 4

Soient les nombres complexes

$$z_1 = (1+i)\left(\frac{-1+5i}{2}\right) \; ; \; z_2 = \frac{-9+7i}{2-3i} \text{ et } z_3 = 2\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$$

1) Placer dans le plan complexe les points $A(z_1)$, $B(z_2)$ et $C(z_3)$,
2) Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.
3) a) Déterminer l'affixe du milieu I du segment [BC].
   b) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un carré.

Activité 5

Dans le plan complexe, on donne les points :

$A(-2-i)$, $B(1+3i)$, $D\left(-\frac{5}{2}i\right)$ et $C\left(3+\frac{3}{2}i\right)$

1) a) Montrer que les droites (CD) et (AB) sont parallèles.
   b) Montrer que la droite (CD) est tangente au cercle C de diamètre [AB].
2) Déterminer la nature du quadrilatère ABCD.

RÉSUMÉ DU COURS

Forme Algébrique d'un nombre complexe

P est le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

* L'écriture $z = a + i\,b$, où a et b sont deux réels, est la forme algébrique de z.

$$\begin{cases} a = Re(z) \text{ est la partie réelle de } z \\ b = Im(z) \text{ est la partie imaginaire de } z \end{cases}$$

* Si $z = a + i\,b$ est la forme algébrique de z, alors le point M (a , b) est appelé image de z dans le plan complexe P.
* Si $M(x,y) \in P$ alors le nombre complexe $x + i\,y$ est l'affixe du point M.
Il est noté : $aff(M) = Z_M$
* Pour tous points A et B du plan on a $aff\left(\overrightarrow{AB}\right) = z_B - z_A$
* Pour tous réels α et β et tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a

$$aff\left(\alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}\right) = \alpha\,aff\left(\vec{u}\right) + \beta\,aff\left(\vec{v}\right)$$

* Soit $z = a + i\,b$ où a et b sont deux réels, on appelle conjugué de z, le complexe $\overline{z} = a - ib$

On a : $\overline{\overline{z}} = z$; $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{z . z'} = \overline{z} . \overline{z'}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $(z' \neq 0)$

et $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ et $(z \neq 0)$.

* Soit $z = a + i\,b$ où a et b sont deux réels .
On a : $z + \overline{z} = 2a$; $z - \overline{z} = 2ib$ et $z . \overline{z} = a^2 + b^2$

Formes Trigonométrique et Exponentielle d'un nombre complexe

* Soit $z = a + i\,b \in \mathbb{C}^*$ et M son image dans le plan complexe P muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$
On appelle module de z le réel positif défini par : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = OM$

Pour tous points A et B du plan on a : $AB = |z_B - z_A|$

* On a pour tous complexes z et z' :

$|z|^2 = z.\bar{z} = a^2 + b^2$ et $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

* Un argument de z est défini par $\arg(z) = \widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{OM})} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

* Pour tout nombre complexe z non nul on a : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r,\theta]$

avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ où $r \in IR_+^*$ et $\theta \in IR$ est la forme trigonométrique de z.

* Soit $z = a + ib = [r,\theta]$. On a $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$

* Pour tous complexes non nuls $z = [r, \theta]$ et $z' = [r', \theta']$, on a :

$\bar{z} = [r, -\theta]$ ce qui entraîne $|\bar{z}| = |z|$ et $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

$z.z' = [rr', \theta + \theta']$ ce qui entraîne $\begin{cases} |z.z'| = |z|.|z'| \\ \arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

$\dfrac{1}{z} = \left[\dfrac{1}{r}, -\theta\right]$ ce qui entraîne $\begin{cases} \left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|} \\ \arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

$\dfrac{z}{z'} = \left[\dfrac{r}{r'}, \theta - \theta'\right]$ ce qui entraîne $\begin{cases} \left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|} \\ \arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

$z^n = [r^n, n\theta]$ ce qui entraîne $\begin{cases} |z^n| = |z|^n \\ \arg(z^n) = n.\arg(z) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$,pour tout $n \in \mathbb{Z}$

Pour tout réel $\lambda > 0$, $\lambda.z = [\lambda r, \theta]$ ce qui entraîne :

$\begin{cases} |\lambda.z| = \lambda|z| \\ \arg(\lambda.z) = \arg(z) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

Pour tout réel $\lambda < 0$, $\lambda.z = [-\lambda r, \theta + \pi]$ ce qui entraîne :

$$\begin{cases} |\lambda . z| = -\lambda |z| \\ \arg(\lambda . z) = \arg(z) + \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

* Soit z un nombre complexe, on a :

z est réel $\Leftrightarrow$ $\text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z = \overline{z} \Leftrightarrow \arg(z) = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ ou $z = 0$.

z est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $\text{Re}(z) = 0$ et $z \neq 0 \Leftrightarrow z = -\overline{z}$

et $z \neq 0 \Leftrightarrow \arg(z) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

* Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $(\cos\theta + \sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \sin(n\theta)$;

(Formule de Moivre)

* L'écriture $z = re^{i\theta}$ (où r est le module de z et θ un argument de z) est la forme exponentielle de z.

* Pour tout réel θ, on a $\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta$ et $\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \sin\theta$

(Formules d'Euler)

Colinéarité et Orthogonalité de deux vecteurs du plan complexe

* Pour tous points A, B, C et D du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, on a :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

* Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan d'affixes respectives z et z'.

On a :

$\left(\begin{array}{c} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \\ \text{sont colinéaires} \end{array}\right) \Leftrightarrow \dfrac{z}{z'}$ est réel

$\left(\begin{array}{c} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \\ \text{sont orthogonaux} \end{array}\right) \Leftrightarrow \dfrac{z}{z'}$ est imaginaire pur

AVEC L'ORDINATEUR

Activité

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{OA}, \vec{OB})$. Soient les points M, M_1, M_2 et M' d'affixes respectives les nombres complexes :

$z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $z_1 = z^2$, $z_2 = 2z$ et $z' = 2z - z^2$

En utilisant un logiciel de construction géométrique :

* Construire le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.
* Placer un point M(z) sur l'arc de sens direct $[\widehat{AB}]$.
* Construire les points M_1 et M_2 correspondants.
* Construire le point M' de sorte que le quadrilatère MM_1M_2M' soit un parallélogramme.
* Construire la tangente (D_M) à $\mathscr{C}$ en M.
* Faire varier le point M sur l'arc $[\widehat{AB}]$. Quelle conjecture peut-on émettre sur les positions des points A et M' par rapport à la droite (D_M) ?
* Déterminer graphiquement la valeur de θ pour que le quadrilatère MM_1M_2M' soit un rectangle.

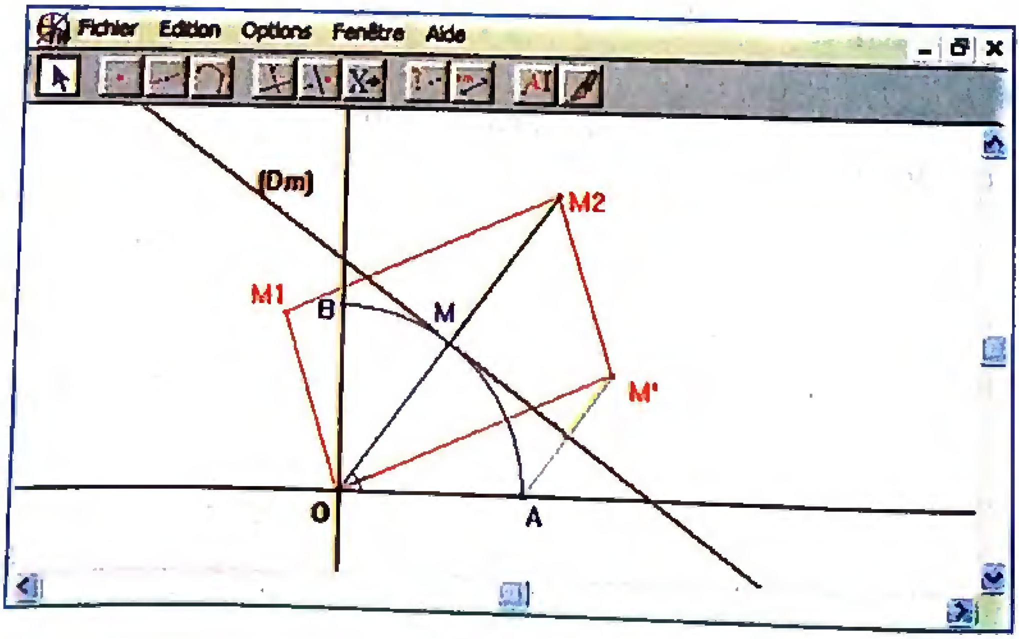
Une stratégie de justification de la conjecture :

a) Montrer que AM = MM'.

b) Montrer que $\dfrac{z'-1}{z}$ est un réel.

c) Justifier alors la conjecture.

d) Déterminer la valeur de θ pour que le quadrilatère MM_1M_2M' soit un rectangle.



EXERCICES ET PROBLÈMES

1 Écrire les nombres complexes suivants sous la forme algébrique.

$\frac{1+i\sqrt{3}}{i+\sqrt{3}}$, $(-1-i)^2(1-i\sqrt{3})$, $(\frac{1}{i}+i)$ et $(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^3$

2 Soit le nombre complexe

$j = \cos\frac{2}{3} + i\sin\frac{2}{3}$

1) Calculer j^2, j^3 et j^4
2) Que peut-on conjecturer pour j^n pour n entier naturel non nul ?
3) Montrer que $j^2 = \overline{j} = \frac{1}{j}$
4) Montrer que $1 + j + j^2 = 0$
5) Démontrer que , quels que soient les complexes a, b et c on a l'équivalence

$a + bj + cj^2 = 0 \Leftrightarrow a - c = j(c - b)$

3 Pour tout nombre réel m, on pose $z=(m-i)[(10-m) + (2+m)i]$
1) Déterminer m pour que z soit réel.
2) Préciser, dans ces cas, les valeurs correspondantes de z.

4 Soient les nombres complexes suivants : $z_1 = 4 + 4i$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

1) Déterminer le module et un argument de chacun des complexes z_1 et z_2
2) En déduire le module et un argument de chacun des complexes

z_1^2, z_1z_2, z_1^3, $\frac{z_1}{z_2}$ et $\frac{z_2}{z_1}$

5 Soit φ un réel de $[0,\frac{\pi}{2}]$. On donne le complexe $Z = \cos2\varphi + i\sin\varphi\cos\varphi$
1) Déterminer φ pour que Z soit nul.
2) Ces valeurs étant exclues, déterminer les formes algébrique, trigonométrique et exponentielle de $\frac{1}{Z}$.

6 Soit $\theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Dans le plan complexe, on note M_1, M_2 et M les points d'affixes respectives

$z_1 = e^{i\theta} - i$; $z_2 = e^{-i\theta} + i$ et $z = 2\cos\theta$

1) Ecrire z_1 sous forme exponentielle, en déduire que $\frac{z_2}{z_1} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$.
2) Montrer que le quadrilatère OM_1MM_2 est un losange et préciser la valeur de θ pour laquelle ce quadrilatère est un carré.

7 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé.
On donne le point M d'affixe z.
1) Déterminer l'ensemble des points M tels que $|z| = |z-1|$
2) Montrer que si $|z| = |z-1|$ alors

$\text{Arg}(z) + \text{Arg}(z-1) = \pi\ [2\pi]$

8 Soit $z = \frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$

1) Déterminer le module et un argument de z.
2) Ecrire z sous forme algébrique.
3) En déduire $tg(\frac{\pi}{12})$

9 Dans le plan complexe on considère un triangle ABC et a, b et c les affixes respectives des points A, B et C. On note M le milieu du segment [BC] et m l'affixe de M. On construit les triangles BAB' et C'AC de sorte qu'ils soient directs, rectangles et isocèles de sommet principal A.
1) Déterminer les affixes des points B', C' et M.
2) En déduire que :
a) B'C' = 2.AM
b) Les droites (B'C') et (AM) sont perpendiculaires.

10 Dans le plan complexe, on considère les points A(i), B(-i). à tout point M(≠B) d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{1 - z}{1 - iz}$

1) a) Déterminer l'ensemble des points M tels que z' soit réel.

b) Déterminer l'ensemble des points M tels que $|z'| = 1$

2) a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$,
$$z' + i = \frac{-1 + i}{z + i}$$

b) En déduire que $BM.\,BM' = \sqrt{2}$.

c) En déduire que si M appartient au cercle de centre B et de rayon 1 alors M' appartient à un cercle que l'on précisera.

11 1) Calculer cos3x et sin5x en fonction de cos x et sin x .

2) Linéariser les expressions suivantes : $\cos^3 x$, $\cos^2 x.\sin x$, $\sin^2 x \cos^3 x$.

3) Soient α et β deux réels. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z = \frac{e^{i\alpha} + e^{i\beta}}{e^{i\alpha} - e^{i\beta}}$ (on donnera, au préalable, une condition pour que z soit défini.)

12 Soient les points A et B d'affixes respectives 1 et (- 2 i) et f l'application de P\{B} dans P qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que $z' = \frac{\bar{z} + 4i}{\bar{z} - 2i}$

1) Vérifier que $z' - 1 = \frac{6i}{\bar{z}_A - 2i}$

2) En déduire que $\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

3) a) Montrer que si $M \in \zeta_{(B,3)}$ alors M' appartient à un cercle ζ' que l'on déterminera.

b) Montrer que si M ∈ (AB) alors M' appartient à une droite à préciser.

13 Soit le point A(1). à tout point M(z) on associe le point $M'(z')$ tel que $z' = 2z - z^2$

1) Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M(z) tels que
$$\arg(z') - 2\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$$

2) On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z^2 et 2z.

a) Trouver l'ensemble E_2 des points M(z) tels que O, M_1, M_2 soient alignés

b) On suppose que $M(z) \notin E_2$.
Montrer que OM_1M_2M' est un parallélogramme.

14 Déterminer l'ensemble des points M(z) du plan complexe tels que les points d'affixes respectives 1, z, et z^2 soient alignés.

15 Comment faut-il choisir l'entier naturel n pour que le nombre complexe $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^n$ soit un réel positif.

16 Soit le nombre complexe
$$Z = \cos\frac{2}{5} + i\sin\frac{2}{5}.$$

1) a) Vérifier que $Z^5 - 1 = 0$

b) En utilisant la formule $Z^5 - 1 = (Z-1)(Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1)$, montrer que $Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$

2) a) Exprimer Z^4, Z^3 et Z^2 sous forme trigonométrique.

b) Démontrer les égalités
$$Z + Z^4 = 2\cos\frac{2}{5} \quad \text{et} \quad Z^2 + Z^3 = 2\cos\frac{4}{5}$$

3) a) Établir la relation :

$$2\cos\frac{4}{5}+2\cos\frac{2}{5}+1=0$$

b) En déduire de ce qui précède que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est solution de l'équation $4X^2+2X-1=0$

c) Déterminer alors la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$

17 P étant le plan complexe. Soient les deux points A(i) et $B\left(\frac{1+i}{2}\right)$.

Soit l'application f qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que $z' = (1-i)z-1$.

1) a) Déterminer l'ensemble E des points M(z) tels que $|z'| = 2\sqrt{2}$.

b) Soit $\theta\in[0,\pi]$. On suppose que $z=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Déterminer suivant les valeurs de θ, la forme trigonométrique de z'.

2) a) On suppose $M \neq B$. Montrer que

$$\operatorname{Arg}(z') = -\frac{\pi}{4}+\left(\widehat{\vec{i}\,,\,\overrightarrow{BM}}\right)\ [2\pi]$$

b) En déduire l'ensemble F des points M(z) tels que z' soit réel négatif et le construire.

3) a) On suppose $M \neq A$. Montrer que le triangle AMM' est rectangle en M et déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AM}\,,\,\overrightarrow{AM'}\right)$.

b) En déduire une construction du point M' = f(M) connaissant M dans P.

18 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ on désigne par A et B les points d'affixes respectives I et 2.

A tout point M du plan d'affixe z ($z \neq 2$) on associe le point M' d'affixe z' défini par

$$z'=\frac{z-i}{iz-2i}$$

1) a- Montrer que $|z'|=\frac{AM}{BM}$

b- En déduire que lorsque M décrit la médiatrice du segment [AB], le point M' décrit un cercle que l'on déterminera.

2) On suppose $z \neq i$ et $z \neq 2$.

a- Montrer que :

$$(\widehat{\vec{u}\,,\,\overrightarrow{OM}})=(\widehat{\overrightarrow{BM}\,,\,\overrightarrow{AM}})-\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}$$

b- En déduire, que si M appartient à la droite (AB) le point M' appartient à une droite que l'on déterminera.

(D'après Bac Tunisien 1995).

19 Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. C est le cercle trigonométrique et t est l'affixe d'un point M du cercle C, t est un nombre complexe ayant pour argument un réel α de l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

1) Soit $u = t^3$ et $v = 2t$.

Ecrire chacun des nombres complexes u et v sous forme trigonométrique.

2) Soit $w = 2t - t^3$ et A, B et C les points d'affixes respectives u, v et w.

a. Placer, dans le plan P, les points A, B et C dans le cas où α est égal à $\frac{\pi}{3}$.

b. Déterminer les réels α pour lesquels les points O, A et B sont alignés.

3) On suppose, dans la suite, que α appartient à l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

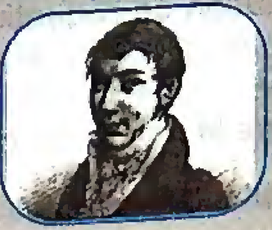
a. Quelle est la nature du quadrilatère OABC ?

b. Déterminer le réel α pour que le quadrilatère OABC soit un rectangle.

(D'après Bac Tunisien 1994).

APERÇU HISTORIQUE

Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)



Cauchy, baron Augustin (1789-1857)

En résolvant des équations du second degré comme $x^2 + 1 = 0$, Jérôme Cardan et ses confrères italiens du XVIe siècle font intervenir ce qu'ils appelaient les «nombres impossibles ou imaginaires» et ils n'hésitent pas à employer le symbole $\sqrt{-a}$ où a est un réel strictement positif. Par exemple, le nombre réel 40 peut s'exprimer sous la forme de $(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15})$. Ces racines carrées de nombres négatifs, que Descartes nomme «racines imaginaires», sont utilisées par la plupart des mathématiciens du XVIe siècle.

En 1722, le Britannique Abraham de Moivre découvre la formule qui porte, depuis, son nom $(\cos x + i\sin x)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$. Cette relation, qui relie fonctions exponentielles et fonctions trigonométriques, est à rapprocher des formules établies par Euler

(XVIIIe siècle) : $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

De ces formules découle la célèbre identité $e^{i\pi} = -1$, qui relie trois nombres fondamentaux en mathématiques (e, i et pi).

Les nombres imaginaires sont utilisés comme symboles purement formels. Ce n'est qu'avec Gauss et Cauchy, qu'ils trouveront leur représentation. On doit à Gauss le premier exposé complet sur la représentation des ces nombres par des points du plan muni d'un repère orthonormé. Il appela ces nombres «nombres complexes» et utilisa la lettre i pour désigner une racine carrée du nombre (-1). Cauchy découvrit qu'effectuer des calculs sur les nombres complexes revient à appliquer les règles de calcul dans IR en tenant compte du fait que $i^2 = -1$.

C'est à l'aide des nombres complexes que Gauss, dans sa thèse de doctorat parue en 1799, donne la première démonstration du théorème fondamental de l'algèbre, selon lequel tout polynôme de degré n possède exactement n racines, non nécessairement distinctes. Il est également le premier à établir la correspondance entre les nombres complexes et les points du plan. En 1801, Gauss introduit les nombres dits entiers de Gauss, de la forme a + ib, avec a et b entiers.

Cauchy poursuit l'étude des nombres complexes en introduisant les fonctions à une variable complexe en 1814.

Les nombres complexes ont de nombreuses applications en physique ; le nombre i apparaît ainsi de manière explicite dans l'équation fondamentale de Schrödinger qui décrit la nature ondulatoire des particules.