Partie 1

Chapitre 8

Calcul intégral

Plan du chapitre

❋	**Activités préliminaires**	
❋	**Cours**	
	❖	Intégrale d'une fonction continue.
	❖	Propriétés de l'intégrale.
	❖	Inégalité de la moyenne - Théorème de la moyenne
	❖	Méthode d'Intégration par parties.
	❖	Calcul d'aires planes et des volumes de solides de révolution.
❋	**Résumé du cours**	
❋	**Avec L'ordinateur**	
❋	**Exercices et Problèmes**	
❋	**Aperçu Historique**	

ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

1 1) Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{12x+6}{(x+2)^2}$.

a) Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que :

$\forall x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ on a : $f(x) = \dfrac{a}{(x+2)^2} + \dfrac{b}{x+2}$

b) En déduire la forme générale des fonctions primitives de f sur l'intervalle]-2,+∞[.

2) Déterminer les primitives de la fonction

$g : x \mapsto \dfrac{x}{x+2}$ sur l'intervalle]-2,+∞[.

2 Montrer que chacune des fonctions suivantes admet une fonction primitive sur l'intervalle I et donner une primitive F de f sur I :

1) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$; $I =]0,+\infty[$

2) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$; $I =]-\infty,0[$

3) $f : x \mapsto 2e^{2x}$; $I = \mathbb{R}$

4) $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1} + 1$; $I = \mathbb{R}$

3 Soit la fonction $F : x \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)$.

1) Prouver que F est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que F est la primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ s'annulant en zéro.

3) a) Trouver un encadrement de f(x) pour $x \in [0,1]$.

b) Montrer que

$\forall x \in [0,1]$ on a : $1 \le \sqrt{x^2+1} \le \sqrt{2}$.

c) En déduire que

$\forall x \in [0,1]$ on a : $0 \le F(x) < \dfrac{1}{2}$.

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et c est une constante réelle arbitraire :

Fonction f (définie sur I)	**Primitive F de f** (définie sur I)
u' + v'	u + v + c
au' ; a réel.	au + c
u'v + v'u	u.v + c
$u'u^n$; $n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\}$ et $u(x) \neq 0 \ \forall x \in I$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1} + c$
$\dfrac{u'}{u^2}$; $(u(x) \neq 0 \ \forall x \in I)$	$-\dfrac{1}{u} + c$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$; $(u(x) > 0 \ \forall x \in I)$	$2\sqrt{u} + c$
$\dfrac{u'.v - v'.u}{v^2}$; $v(x) \neq 0 \ \forall x \in I$	$\dfrac{u}{v} + c$
$(v' \circ u).u'$	$v \circ u + c$
$\dfrac{u'}{u}$; $(u(x) \neq 0 \ \forall x \in I)$	$\ln\lvert u\rvert + c$
$u'e^u$	$e^u + c$

4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

1) a) Vérifier que pour tout réel x, $f(x)=-1+2\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

b) En déduire la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que F(0) = 0.

2) a) Vérifier que pour tout réel x, $f(x)=\dfrac{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}$.

b) Retrouver les résultats de la question1).

5 Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\dfrac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+1}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]$.

a) Montrer que pour tout réel x, $x+\sqrt{x^2+1}>0$.

b) Montrer que F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = -3x + 7.

1) Tracer la droite Δ représentant f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

2) Pour $x\in\left[0,\dfrac{7}{3}\right]$, on désigne par M et N les points de Δ d'abscisses respectives 0 et x.

Soit B le point du plan de coordonnées (x,0) et distinct de l'origine O.

a) Calculer, en fonction de x, l'aire S (x) du trapèze OMNB.

b) On désigne par S' la fonction dérivée de la fonction S. Calculer S'(x) et comparer le résultat obtenu avec f(x).

3) Reprendre les questions a) et b) de la deuxième question pour x réel négatif.

COURS

Intégrale d'une fonction continue

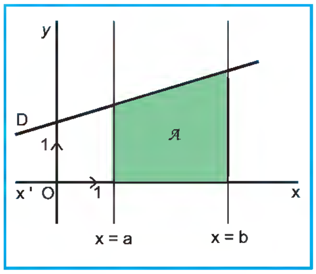
Activité 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Dans la figure ci-contre, D est la droite d'équation $y = \frac{3}{10}x + \frac{3}{2}$ et a et b sont deux réels positifs tels que b > a.

On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par :
D, (x'x) et les droites d'équations : x = a et x = b.

1) Calculer $\mathcal{A}$.
2) Soit F une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{3}{10}x + \frac{3}{2}$.
Montrer que $\mathcal{A}$ = F (b) - F (a).



Activité 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On désigne par F et G deux primitives de f sur I.
Soient a et b deux éléments de I. Montrer que G (b) - G (a) = F (b) - F (a).

Théorème et définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I, a et b deux éléments de I.
Le réel F(b) - F(a) ne dépend pas de la primitive choisie de f sur I. Ce réel s'appelle intégrale de a à b de f et se note $\int_a^b f(x)dx$. Ainsi ,
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$ où F est une primitive quelconque de f sur I.

Activité 3

1) a) Justifier l'existence de l'intégrale $I = \int_1^e \frac{1}{x}dx$
b) Calculer I.
2) Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 e^x\,dx \ ; \ \int_2^1 \left(3x^2 + 2x + 1\right)dx \ ; \ \int_1^5 \quad dx$$

$$\int_{-1}^1 xe^{x^2}dx \ ; \ \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin y\,dy \ ; \ \int_{-1}^{-2} \frac{2t^2+1}{t^2}\,dt$$

Retenons :

* Si f est une fonction continue sur [a, b] alors $\int_a^b f(t)\,dt$ existe.
* $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(s)\,ds = \ldots$
* $\int_a^b 1\,dt = b - a$; $\int_a^b x\,dt = x(b - a)$, (x réel).

3) Soit la fonction $f : x \mapsto \left|x^3\right| + 1$

a) Montrer que f est continue sur [-1, 1] .
b) Calculer les intégrales suivantes:

$\int_0^1 f(x)dx$; $\int_{-1}^0 f(x)dx$

Propriétés de l'intégrale

Activité 1

1) a) Calculer $\int_1^1 x^2 dx$.

b) Calculer $\int_0^1 x^2 dx$ et $\int_1^0 x^2 dx$ et comparer les résultats obtenus.

c) Calculer $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$ et $\int_{\pi}^0 \sin x \, dx$ et comparer les résultats obtenus.

2) Soit f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I, a et b deux éléments de I.

a) Calculer $\int_a^a f(x)\, dx$.

b) Comparer les intégrales $\int_a^b f(x)\, dx$ et $\int_b^a f(x)\, dx$.

Propriétés

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.

Alors on a : $\int_a^a f(x)dx = 0$ et $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

Activité 2

1) Soit la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

a) Sur quel ensemble f est-elle continue ? Prouver que la fonction $G : x \mapsto 2\sqrt{x} + 1$ est une primitive de f sur]0, +∞[.

b) Calculer alors, les réels $m = \int_1^4 g(x)dx + \int_4^9 g(x)dx$ et $n = \int_1^9 g(x)dx$ puis comparer m et n.

2) Soit f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I. Soient a, b et c trois éléments de I. Montrer, en utilisant F, qu'on a :

$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient a, b et c trois éléments de I alors on a : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

Activité 3

Soit l'intégrale $I = \int_{-2}^{3}\left(|x+1|+|x-2|\right)dx$.

a) Ecrire sans valeur absolue l'expression $|x+1|+|x-2|$.

b) En déduire la valeur de I.

Si f est une fonction continue sur [a, b] et c et d deux éléments de [a, b] alors on a :
$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$.

Activité 4

1) Calculer $\int_0^1 3(x+1).e^{\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)}dx$.

2) Soit f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I et soient a et b deux éléments de I. Montrer, en utilisant F, que pour tout réel k on a :
$\int_a^b (kf)(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

3) Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Soit F une primitive de f et G une primitive de g sur I. Soient a et b deux éléments de I.

Montrer, en utilisant F et G, que $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux éléments de I. Soit k un nombre réel. Alors on a :

- $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b (kf)(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b \left(k_1f(t)+k_2g(t)\right)dt = k_1.\int_a^b f(t)dt + k_2.\int_a^b g(t)dt$, pour tous réels k_1 et k_2.

Activité 5

1) Calculer les intégrales

$\int_0^1 \left(3t^2 + 2e^{2t}\right)dt$; $\int_0^{\pi} \left(2\sin t + \cos t + 3\right)dt$; $\int_2^3 \left(3t^2 - \frac{2}{t^2}\right)dt$; $\int_1^e \left(1 + \frac{1}{t}\right)dt$

2) Soit l'intégrale $I = \int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 1}$

a) Justifier l'existence de I.

b) Déterminer les deux réels a et b tels que pour tout réel x différent de -1 et 1

on a : $\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1}$

c) Calculer alors, l'intégrale I.

3) Soit l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{2t - 3}{2t + 1}dt$

a) Déterminer les deux réels a et b tels que pour tout réel t différent de $-\frac{1}{2}$,

on a : $\frac{2t - 3}{2t + 1} = a + \frac{b}{2t + 1}$

b) Calculer alors, l'intégrale J.

4) a) Montrer que $\cos^4 x = \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$

b) Calculer alors, l'intégrale $K = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^4 x \, dx$

Activité 6

Soit les fonctions f , g et h définies sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2 + 1$, $g : x \mapsto \sin 2x$ et $h : x \mapsto x^3$.

1) a) Etudier la parité de f et h.

b) Etudier la périodicité de g.

2) a) Calculer les intégrales $I = \int_{-2}^{2} f(t)dt$; $J = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} g(t)dt$ et $K = \int_{-a}^{a} h(t)dt$ $(a \in \mathbb{R})$.

b) Calculer $2\int_0^2 f(t)\,dt$ et comparer le résultat obtenu avec la valeur de I.

c) Calculer $\int_0^{\pi} g(t)\,dt$ et comparer le résultat obtenu avec la valeur de J.

1) Soit f une fonction continue sur [-a, a].

* Si f est paire sur [-a, a] alors on a : $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} f(t)\,dt$.

* Si f est impaire sur [-a, a] alors on a : $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$.

2) Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T alors pour tout réel a on a : $\int_{a}^{a+T} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)\,dt$.

Activité 7

Calculer :

$I = \int_{-5}^{5} \left(x^3 + x\right)dx$; $J = \int_{-1}^{1} \left(t^4 + t^2 - 1\right)dt$; $K = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(2t)\,dt$; $L = \int_{0}^{1004\pi} \left|\sin t\right| dt$.

Activité 8

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - 1$ et $g(x) = x - 1$.

1) a) Montrer que : $\forall x \in [0,1]$ on a : $f(x) \geq 0$.

b) Calculer et préciser le signe du réel $\int_{0}^{1} f(x)\,dx$.

2) a) Etudier les variations de la fonction $h : x \mapsto e^x - x$.

b) Comparer f(x) et g(x) dans $[0,1]$ et vérifier que $\int_{0}^{1} f(x)\,dx \leq \int_{0}^{1} g(x)\,dx$.

Activité 9

1) Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a, b] ($a \leq b$) et soit F une primitive de f sur [a, b] .
Montrer que F est croissante sur [a, b] . En déduire que $\int_{a}^{b} f(x)\,dx \geq 0$.

2) Soit f une fonction continue sur un intervalle [a, b] ($a \leq b$). Montrer que :

Si $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \leq 0$ alors $\int_{a}^{b} f(x)\,dx \leq 0$.

3) Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle [a, b] et telles que

$\forall x \in [a,b]$, $f(x) \leq g(x)$.

a) Quel est le signe du réel $\int_{a}^{b} (g(x) - f(x))\,dx$?

b) En déduire que $\int_{a}^{b} f(x)\,dx \leq \int_{a}^{b} g(x)\,dx$.

Intégration et inégalités

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.

- Si $a \leq b$ et $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.
- Si $a \leq b$ et $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \leq 0$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$.
- Si $a \leq b$ et $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Activité 10

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a, b] ($a \leq b$).

a) Justifier l'existence de l'intégrale $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

b) En utilisant les inégalités : $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ pour tout $x \in [a,b]$, montrer qu'on a :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. On a :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Activité 11

1) Soit x un réel positif.

a) Montrer que $\forall t \geq 0$, $e^t \geq 1$.

b) Montrer, en intégrant les deux membres de l'inégalité précédente dans $[0, x]$ qu'on a : $e^x \geq 1 + x$

2) Montrer que $\forall\, x \in [0,+\infty[$ on a : $e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ et retrouver alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$.

3) Soit x un réel positif.

a) Montrer que pour tout réel positif t on a : $1 - t \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1 - t + t^2$.

b) En déduire qu'on a: $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

c) Donner un encadrement de chacun des réels suivants : $\ln\dfrac{11}{10}$ et $\ln\dfrac{101}{100}$.

Inégalités de la moyenne - Théorème de la moyenne

Activité 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I tels que $a < b$.
Montrer que s'il existe deux réels m et M tels que $\forall x \in [a,b],\quad m \leq f(x) \leq M$

alors on a : $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$.

Inégalités de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ ($a < b$) ; m et M sont deux réels.

Si $\forall x \in [a,b],\quad m \leq f(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$.

Activité 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de I tels que $a < b$. On rappelle que l'image de l'intervalle fermé $[a,b]$ par f est un intervalle fermé et on pose $[m, M] = f([a,b])$.

a) Montrer que $m \leq \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq M$.

b) En déduire qu'il existe un réel c appartenant à $[a,b]$ tel que $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Théorème de la moyenne

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ ($a < b$), alors il existe au moins un réel c appartenant à $[a,b]$ tel que $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Le réel $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ s'appelle la valeur moyenne de f sur $[a,b]$.

Activité 3

1) a) Calculer la valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto e^x$ sur $[0,1]$. On note μ cette valeur

b) Résoudre, dans $[0,1]$, l'équation $f(x) = \mu$

2) Soit la fonction $g : x \mapsto x^2$. Résoudre, dans $[-2,2]$, l'équation $g(x) = \lambda$; où λ désigne la valeur moyenne de g sur $[-2,2]$.

Activité 4

La vitesse instantanée d'un mobile en mouvement rectiligne est donnée par $v(t) = 3(2 + t^2)$ où t est la variable temps, exprimée en secondes (s),et v(t) est exprimée en m/s.
On suppose qu'à t = 2 s l'abscisse x(t) = 80m et à t = 4 s l'abscisse x(t) =148 m.
Calculer, de deux façons, la vitesse moyenne du mobile dans l'intervalle de temps $[2,4]$.

Théorème d'intégration par parties

Activité 1

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que leurs fonctions dérivées u' et v' soient continues sur I. Soient a et b deux éléments de I.

a) Montrer que $u'v = (uv)' - v'u$.

b) En déduire que $\int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx = \left[u(x)\, v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx$

c) Calculer $\int_0^1 x\, e^x\, dx$ et $\int_0^{\pi} x \sin x\, dx$.

Théorème d'intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que leurs fonctions dérivées u' et v' soient continues sur I. Soient a et b deux éléments de I.

On a alors, $\int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx = \left[u(x)\, v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx$.

Vocabulaire : Cette formule s'appelle formule d'intégration par parties.

Activité 2

1) En utilisant la méthode d'intégration par parties, calculer les intégrales :

$$I = \int_1^e x\ln x\,dx \;;\; J = \int_0^{\frac{1}{2}} (x+1)e^{-x}\,dx \;\text{ et }\; K = \int_1^2 x^2 \ln x\,dx.$$

2) En intégrant par parties deux fois successives, calculer chacune des intégrales suivantes :

$$\int_0^{\ln 2} x^2 e^x dx \;;\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin t\,dt \;;\; \int_1^{e^2} x(\ln x)^2 dx.$$

Activité 3

Pour tout réel strictement positif x, on pose $F(x) = \int_1^x t\ln t\,dt$.

1) Justifier l'existence de F(x) et calculer F (1).

2) En posant u'(t) = t et v(t) = ln t , dans la formule d'intégration par parties ci-dessus, calculer F(x) en fonction de x.

3) a) Montrer alors, que la fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer F'(x).

b) En déduire le sens de variation de F sur $]0,+\infty[$.

Retenons :
Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I et a un élément de I.
La fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur I et on a pour tout x de I, F'(x) = f (x).
La fonction F est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

Exercice résolu

Soit $f : x \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$.

1) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer f '(x).

2) En déduire le sens de variation de f sur $]0,+\infty[$.

3) Calculer f(1). En déduire le signe de f(x) sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$

Solution :

1) La fonction $g : t \mapsto \frac{e^t}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a pour tout x de $]0,+\infty[$ $f'(x) = g(x) = \frac{e^x}{x}$.

2) On a $\forall x \in \left]0,+\infty\right[$ $e^x > 0$ et $x > 0$ d'où $f'(x) > 0$. Donc f est strictement croissante sur $\left]0,+\infty\right[$.

3) On a f(1) = 0 et comme f est strictement croissante sur $\left]0,+\infty\right[$ on en déduit que :
- pour tout $x \in \left]0,1\right[$, $f(x) < f(1)$ donc $f(x) < 0$.
- pour tout $x \in \left]1,+\infty\right[$, $f(x) > f(1)$ donc $f(x) > 0$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	
$f(x)$		$\nearrow$ -	0	$\nearrow$ +	

Calcul d'aires planes - Calcul des volumes de solides de révolution

Activité 1

Soit la fonction $f : x \mapsto 2x - 1$.

1) Tracer la droite Δ représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan tel que $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$ et $\|\vec{j}\| = 3\text{cm}$.

2) Soient A, E et F les points de Δ d'abscisses respectives $\frac{1}{2}$; 1 et $-\frac{1}{2}$. On considère les points : B (1 , 0) ; C (0 , 1) et G $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

a) Calculer en cm² les aires A_1 du triangle ABE et A_2 du triangle AFG.

b) Calculer les intégrales $I_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)\,dt$ et $I_2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt$.

c) On désigne par a l'aire du rectangle OBEC. Vérifier que $A_1 = I_1 . a$ et $A_2 = - I_2 . a$

Activité 2

Le graphique ci-dessous illustre une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $f : x \mapsto 1 - x^2$, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, les droites T_A ,T_B et T_N sont les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points A, B et N d'ascisses respectives 0,1 et $\frac{1}{2}$ de cette courbe.

On note I le point d'intersection de T_A et T_N et I' le point d'intersection de T_B et T_N.

1) Calculer l'aire A_1 du polygone OANB.

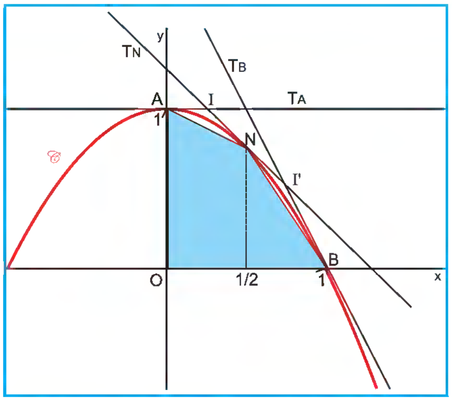
2) Donner les équations des tangentes T_A, T_B et T_N.

3) a) Déterminer les coordonnées des points I et I'.

b) Déterminer l'aire A_2 du polygone OAI I'B .
(On pourra décomposer ce polygone en deux trapèzes convenablement choisis).

4) a) En déduire un encadrement de l'aire A de la région du plan délimitée par la coube C et les axes du repère.

b) Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(t)\,dt$ et vérifier que $A_1 \le I \le A_2$.



c) Calculer l'intégrale $J = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt$. Conjecturer sur l'interprétation graphique de J

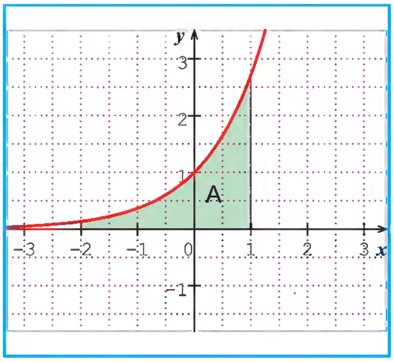
Interprétation géométrique de l'intégrale

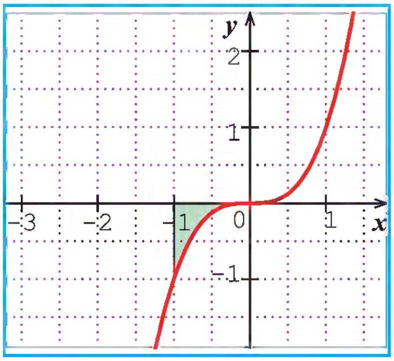
Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. L'unité d'aire (u.a) est l'aire du rectangle de dimensions $\|\vec{i}\|$ et $\|\vec{j}\|$. Soit C la courbe représentative de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et a et b deux réels tels que a < b.

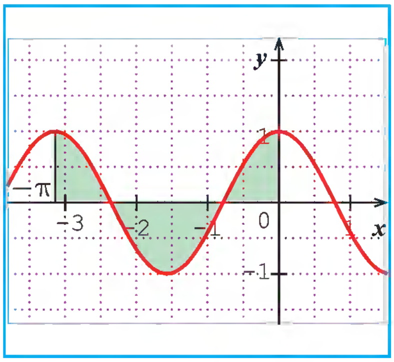
• Si f est continue sur $[a,b]$ et pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \ge 0$ alors $\int_a^b f(x)\,dx$ (u.a) est égal à l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations : x = a et x = b.

• Si f est continue sur $[a,b]$ et pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \le 0$ alors l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations : x = a et x = b est le réel positif $\int_a^b (-f(x))\,dx$ (u.a).

• Plus généralement, si f est continue sur $[a,b]$ et ne garde pas un signe constant sur $[a,b]$ alors l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations : x = a et x = b est égale $\int_a^b |f(x)|\,dx$ (u.a).







$f(x) = e^x$

$A = \int_{-2}^{1} e^x\,dx = \left[e^x\right]_{-2}^{1}$

$= e - e^{-2}$ (u.a)

$f(x) = x^3$

$A = \int_{-1}^{0} -x^3\,dx = \left[-\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{0}$

$= \frac{1}{4}$ (u.a)

$f(x) = \cos 2x$

$A = \int_{-\pi}^{0} |\cos 2x|\,dx$

$= 2$ (u.a)

Activité 3

1) Calculer les intégrales suivantes et interpréter graphiquement chacune d'elles.

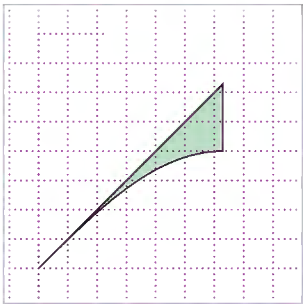
2) Soit la fonction $f : x \mapsto \cos x$ définie sur $[0, \pi]$

a) Tracer la courbe représentative C de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 2$ cm.

b) Calculer, en cm^2, l'aire de la partie du plan limitée par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 0$, $x = \pi$.

Activité 4

Soit le graphique ci-contre, où P et Q



1) Déterminer l'aire du triangle OPQ
2) Calculer, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe d'équation $y = \sin x$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x =$
3) a)En déduire l'aire A de la région du plan limitée par les courbes représentatives des fonctions et les droites d'équations respectives $x = 0$, $x =$

b) Comparer le résultat avec

Activité 5

Théorème

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Soient C_f et C_g les courbes représentatives de f et g dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit a et b deux éléments de I tels que a < b.

• Si pour tout réel x de $[a,b]$ on a : $f(x) \leq g(x)$ alors l'aire de la partie D du plan limitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations x = a et x = b est égale au nombre positif $\int_a^b (g(x) - f(x))\, dx$ (u.a).

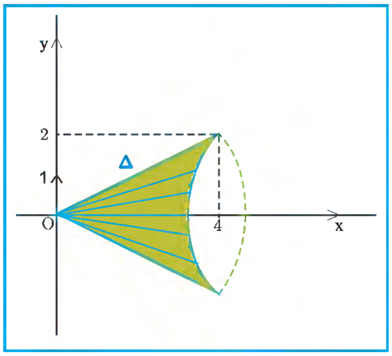
• Plus généralement, l'aire de la partie D du plan limitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations x = a et x = b est égale à $\int_a^b |g(x) - f(x)|\, dx$ (u.a).

Activité 6

Soient f et g les fonctions définies sur IR par $f(x) = x^2 - 2$ et $g(x) = x$. On désigne par C_f et C_g les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) Construire ces courbes et étudier leur position relative.
2) Calculer l'aire de la région du plan limitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations respectives : x = -2 et x = 2.

Activité 7



Le plan est muni d'un repère orthonormé R = $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2}x$. On désigne par Δ sa courbe représentative dans le repère R et par D la région du plan limitée par la droite Δ, l'axe des abscisses et les droites d'équations : x = 0 et x = 4. On note S le cône de révolution engendré par la rotation de D autour de l'axe $(O,\vec{i})$.
   a) Calculer le volume V du cône S.
   b) Calculer l'intégrale $\int_0^4 \pi (f(t))^2\, dt$ et le comparer avec V.
2) Soit a et b deux réels tels que a < b et soit g la fonction définie sur $[a,b]$ par g(x) = 2. Soit C_g la courbe représentative de g dans le repère R. On considère les points A(a, 0), B(a, 2), C(b,2) et D(b,0) et on désigne par S le solide engendré par la rotation du rectangle ABCD autour de l'axe des abscisses $(O,\vec{i})$.
   a) Quelle est la nature du solide S ?
   b) Déterminer, le volume V de S en fonction de a et b.
   c) Calculer l'intégrale $\int_a^b \pi (g(t))^2\, dt$ et comparer le résultat obtenu avec V.

Théorème admis

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ (a < b) et soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan. On considère la partie P du plan limitée par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = a et x = b. Soit V le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la partie P autour de l'axe des abscisses. Alors on a : $V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$ (u.v) (unité de volume)

Activité 8

Soit f la fonction définie sur $[0,\pi]$ par $f(x) = \sin\frac{x}{2}$.

1) Tracer la courbe représentative C de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

2) Calculer l'aire du domaine D du plan limité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \pi$.

3) Calculer le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de D autour de l'axe des abscisses. (On rappelle que pour tout réel x on a: $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos x}{2}$)

Activité 9

Soit $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ où R est un nombre réel strictement positif donné et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que : $M(x,y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \left(x^2 + y^2 = R^2,\ -R \le x \le R \text{ et } y \ge 0\right)$.

b) Reconnaître alors $\mathscr{C}$.

c) Tracer $\mathscr{C}$ (On choisira une valeur de R comprise entre 1 et 3).

2) Soit D le domaine du plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = -R et x = R. Soit V le volume de la boule engendrée par la révolution de D autour de l'axe $(O,\vec{i})$

Montrer que $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Activité 10

Soit $f(x) = \ln x$.

1) Construire la courbe représentative C de f dans un repère orthonormé du plan $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2) Calculer l'aire A de la portion P du plan limitée par C , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = 1 et x = e.

3) Calculer le volume du solide engendré par la rotation de la portion P au tour de l'axe des abscisses.

RÉSUMÉ DU COURS

Intégrale d'une fonction continue :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soit a et b deux éléments de I. On appelle intégrale de a à b de f le réel $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I

Propriétés de l'intégrale :

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b et c sont des éléments de I. Alors on a :

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ et $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.
- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ (relation de Chasles) .
- Pour tous réels k_1 et k_2 on a : $\int_a^b \left(k_1 f(t) + k_2 g(t)\right)dt = k_1\int_a^b f(t)\,dt + k_2\int_a^b g(t)\,dt$.
- Si $a \leq b$ et $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.
- $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.
- Si $a \leq b$ et $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.
- Si f est paire sur $[-a,a]$ alors on a: $\int_{-a}^a f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$.
- Si f est impaire sur $[-a,a]$ alors on a : $\int_{-a}^a f(t)\,dt = 0$.
- Si f est périodique de période T alors on a : $\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$.

Inégalités de la moyenne - Théorème de la moyenne :

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ (a < b) alors il existe un réel c appartenant à $[a,b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. Le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ s'appelle la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ et cette valeur moyenne est atteinte par f sur $[a,b]$, au moins une fois en c.

Théorème d'intégration par parties :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que leurs fonctions dérivées u' et v' soient continues sur I. Soit a et b deux éléments de I. On a :

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx = \left[u(x)\,v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx .$$

(c'est la formule d'intégration par parties).

Fonction définie à l'aide d'une intégrale :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un élément de I.

La fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur I et on a :

Pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$. La fonction F est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

Application de l'intégrale au calcul d'aires planes :

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. L'unité d'aire (u.a) est l'aire du rectangle de dimensions $\|\vec{i}\|$ et $\|\vec{j}\|$.

* Si f est continue sur $[a,b]$ et $a < b$ alors l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b |f(x)|\,dx$ (u.a).

* Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Soit C_f et C_g les courbes représentativesde f et g dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit a et b deux éléments de I tels que $a < b$.

l'aire $\mathscr{A}$ de la région D du plan limitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale au nombre réel positif $\int_a^b |g(x) - f(x)|\,dx$ (u.a) .

Application de l'intégrale au calcul des volumes de solides de révolution :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ ($a < b$) et soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$du plan.On considère la partie P du plan limitée par C , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

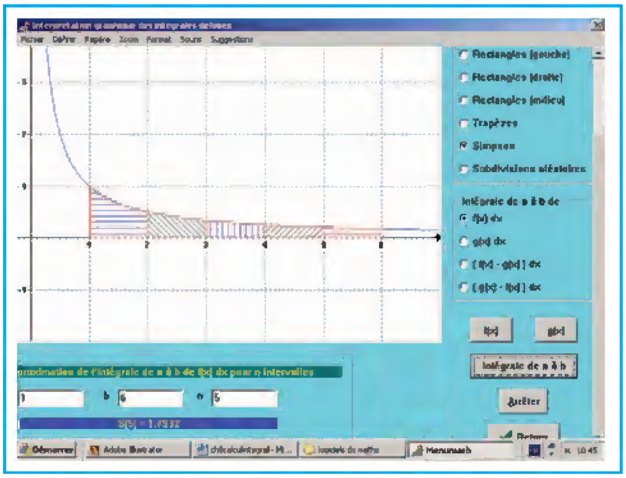
Le volume du solide engendré par la rotation de la partie P autour de l'axe des abscisses est $V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx$ (unité de volume).

AVEC L'ORDINATEUR

Activité 1

1) On se propose de déterminer une approximation S(n) de l'intégrale $\int_1^6 \frac{dx}{x}$ pour n subdivisions de $[1\ ,6]$ par l'une des méthodes proposées par le logiciel Menumath ; (Ressources utiles sur Internet : www.edunet.tn ; www.evt.edunet.tn; http://www.clickteam.com ; http://thot.cursus.edu/rubrique.asp?no=11863)

- Utiliser le logiciel et choisir, dans Troisième niveau (1) la rubrique relative aux intégrales définies puis choisir interprétation graphique.
- Dans le menu Définir ; choisir définir f et écrire l'expression de f(x) = 1/x, et prendre a = 1 et b = 6
- Dans le menu Repère, prendre les précautions nécessaires pour obtenir une courbe représentative convenable de f : (par exemples : prendre $x_{min} = -3$; $x_{max} = 7$; $y_{min} = -2$; $y_{max} = 5$; etc.)
- Taper f(x) pour voir la courbe de f puis cocher, par exemple, Simpson pour la méthode d'approximation utilisée et taper intégrale de a à b puis lire S(n) pour n = 5.
- Calculer $\int_1^6 \frac{dx}{x}$ .En déduire une valeur approchée de ln 6 . Vérifier ce résultat à l'aide de la calculatrice.
- Donner, d'autres valeurs pour n et lire, chaque fois S(n).
- Reprendre le travail précédent avec les autres méthodes (Rectangles, Trapèzes, etc.)



2) Utiliser le logiciel Menumath pour déterminer des approximations des intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \ln(t+1)\,dt;\ \ J = \int_{-2}^{5} \sqrt{t^2+1}\,dt;\ \ K = \int_{-1}^{3} t^2\cos(t+1)\,dt.$$

Activité 2

CALCUL D'UNE INTÉGRALE AVEC UN LOGICIEL

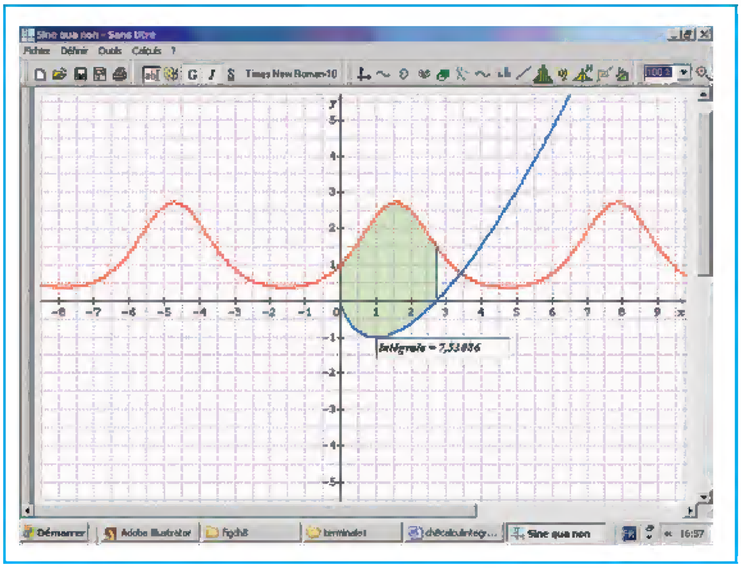
1) Utilisation du Logiciel Sine qua non :

(Ressources sur Internet: http://perso.orange.fr/patrice.rabiller/SineQuaNon/menusqn.htm)

Soient f et g les deux fonctions numériques définies par :

$f(x) = e^{\sin(x)}$ et $g(x)=x \ln x - x$. Utiliser le logiciel Sine qua non pour :

- Afficher les axes du repère orthonormé et utiliser le menu Définir (ou bien l'icône correspondante) pour écrire les expressions exp(sin(x)) de f(x) et x*ln(x)-x de g(x).
- Choisir des couleurs différentes pour les courbes de f et g et valider avec OK. Ainsi, les courbes représentatives de f et g vont apparaître sur l'écran.
- Choisir l'icône correspondante au calcul d'intégrales et calculer l'aire A de la région du plan limitée par les courbes de f et g et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = e$.



2) Utilisation du Logiciel Dérive : pour calculer l'intégrale $I = \int_{-1}^{2} x^3 \ln(1+x^2)dx$

- Ouvrir le logiciel Dérive et taper l'expression suivante : $x \wedge 3 * \ln(1+x \wedge 2)$ puis valider par entrée : l'expression $x^3.\ln(1+x^2)$ va apparaître sur l'écran . Après, cliquer sur la raccourcie $\int f$ et cocher **intégral définit** puis écrire les bornes -1 et 2 et taper **simplify**.
- Il va apparaître sur l'écran les étapes du calcul et la valeur de l'intégrale I : c'est à-dire on trouve $I = \frac{15}{4}\ln 5 - \frac{9}{8}$.

Utiliser le logiciel Dérive pour calculer les intégrales

$$I = \int_0 t^2 \sin t dt; \quad J = \int_{-2}^{5} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt; \quad K = \int_1^3 t^2 \ln t dt$$

EXERCICES ET PROBLÈMES

1 Calculer les intégrales suivantes :

$\int_2^1 (2x+1)dx$; $\int_1^2 (x^2-2x+3)dx$

$\int_0^1 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx$; $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

$\int_1^2 \frac{x^2+x+1}{x}dx$; $\int_0^2 (1-|x-1|)dx$;

$\int_2^3 \frac{1}{3x+2}dx$; $\int_0^1 e^{2x}dx$; $\int_1^2 \frac{x}{x+1}dx$

$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$; $\int_2^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$

2 On considère les fonctions numériques suivantes :

$f : x \mapsto \frac{3x-5}{2x-1}$; $g : x \mapsto \frac{x^2+2x-5}{x+4}$

et $h : x \mapsto \frac{e^x-2}{e^x+1}$

1) Déterminer les réels a et b tels que

$f(x) = a + \frac{b}{2x-1}$ puis calculer $\int_1^2 f(x)dx$

2) Déterminer les réels a, b et c tels que

$g(x) = ax + b + \frac{c}{x+4}$ puis calculer $\int_{-3}^0 g(x)dx$

3)Déterminer les réels a et b tels que

$h(x) = a + \frac{be^x}{e^x+1}$ puis calculer $\int_0^1 h(x)dx$

3 1) Montrer que pour tout x différent de -1 on a :

$\frac{x^2+2x}{x+1} = x+1-\frac{1}{x+1}$ puis calculer $\int_0^1 \frac{x^2+2x}{x+1}dx$

2) Calculer l'intégrale suivante :

$I = \int_0^1 (t+1)\ln(t+1)dt$

4 On considère la fonction numérique f définie par :

$f(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$

1) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel strictement positif x on a :

$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2}$

2) Soit $\alpha \in]1,+\infty[$

a) Calculer $\int_1^\alpha f(t)dt$

b) Calculer $A(\alpha) = \int_1^\alpha \frac{\ln t}{(1+t)^3}dt$

c) Calculer $\lim_{\alpha \to +\infty} A(\alpha)$

5 Calculer par intégration par parties :

$\int_0^1 xe^x dx$; $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$; $\int_1^x \ln t dt$;

$\int_0^\pi e^x \cos x dx$; $\int_1^e x(\ln x)^2 dx$

6 On considère les deux intégrales suivantes :

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x \cos x)^2 dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x \sin x)^2 dx$

1) Calculer $I + J$

2) Calculer $I - J$ en utilisant une intégration par parties.

3) En déduire les valeurs de I et J.

7 Vérifier que pour tout réel non nul x on a :

$\frac{e^x}{e^x-1} = 1 + \frac{1}{e^x-1}$

2) a) Calculer l'intégrale $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^t}{e^t-1}dt$

b) Calculer alors, l'intégrale

$J = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{e^t-1}dt$

3) Soit l'intégrale $K = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2t}}{e^t - 1} dt$

Calculer $K - I$, en déduire la valeur de K.

8 Soit $g(x) = (1 - x)e^{-x} + 1$

1) Etudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.
2) En déduire que pour tout réel x on a : g(x) > 0.

II- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = xe^{-x} + x$

On désigne par C la courbe représentative f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, f '(x) = g(x).
b) Dresser le tableau de variation de f.
2) a) Montrer que la droite D : y = x est une asymptote à C au voisinage de $+\infty$.
b) Etudier la position de C par rapport à D.
c) Donner une équation de la tangente T à C en son point d'abscisse 1.
d) Tracer T, D et C.
3) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On désigne par l'aire de la partie du plan limitée par C, D et les droites d'équations x = 0 et x = α.
Calculer $A(\alpha)$ et $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} A(\alpha)$.
4) Pour x < 1, on pose $h(x) = \ln(g(x) - 1)$.
a) Vérifier que $h(x) = -x + \ln(1 - x)$.
Et que $\frac{-x}{1-x} = 1 - \frac{1}{1-x}$.
b) Calculer l'intégrale $I = \int_{-1}^{0} \ln(1 - t)dt$.
c) En déduire l'intégrale $J = \int_{-1}^{0} h(t)dt$.

9 Soit $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$; (x > 0) .

1) Tracer la courbe représentative C de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.
2) Calculer l'aire A de la région du plan limitée par C , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = 1 et x = e

10 Soit f la fonction définie dans $[0, +\infty[$ par :

$f(x) = x\ln(x + 2)$ On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.(unité graphique : 3 cm).

1) Dresser le tableau de variation de f .
2) Soit la droite Δ : y = x ; étudier la position relative de C par rapport à Δ puis tracer Δ et C .
3) a) Montrer que f admet une fonction réciproque dont on précisera l'ensemble de définition et construire, dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative C 'de f^{-1}.
b) Vérifier que pour x distinct de -2 on a :
$\frac{x^2}{x+2} = x - 2 + \frac{4}{x+2}$
c) Calculer l'intégrale $I = \int_0^{e-2} f(t)dt$
d) Calculer, en cm² l'aire A de la région du plan comprise entre les courbes représentatives de f et de f^{-1}.

11 (Intensité et quantité d'électricité)

Pendant un intervalle de temps $[t_1, t_2]$; $t_1 \leq t_2$ un courant continu d'intensité I transporte la quantité d'électricité $Q = I.(t_2 - t_1)$. Lorsque l'intensité est une fonction I (t) du temps t alors la quantité d'électricité transportée dans l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ est $Q = \int_{t_1}^{t_2} |I(t)| dt$. Soit un courant alternatif d'intensité maximale I_m de pulsation ω, de phase φ tel que :

$I(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$

Calculer la quantité d'électricité transportée à chaque demi-période et la valeur moyenne de l'intensité correspondante.

12 (Puissance et Énergie)

Pendant un intervalle de temps $[t_1, t_2]$; $t_1 \leq t_2$ un courant continu d'intensité I fournit, dans une portion de circuit ayant à ses bornes une différence de potentiel U, une énergie :
$W = U.I.(t_2 - t_1)$. Lorsque I et U sont des fonctions du temps, t, alors :

$W = \int_{t_1}^{t_2} U(t).I(t)dt$

Soit un courant alternatif d'intensité $I(t) = I_m \cos(\omega t)$ dans une résistance R.
La différence de potentiel aux bornes de la résistance est alors :

$$U(t) = R.I(t) = U_m \cos(\omega t)$$

Calculer l'énergie fournie pendant une période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

13 Soit $f(x) = \sin^2 x;\ x \in [0,\pi]$.

1) Tracer la courbe représentative C de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

2) Linéariser $\sin^2 x$ et $\sin^4 x$.

3) Calculer l'aire A de la portion D du plan formée des points M (x, y) tels que:

$$\begin{cases} 0 \le x \le \pi \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$$

4) Calculer le volume du solide obtenu par rotation de la courbe C autour de l'axe des abscisses.

14 Soit $f(x) = 1 + 2\cos^2 x;\ x \in [0,\pi]$

1) Etudier les variations de f sur $[0,\pi]$.

2) Tracer la courbe représentative C de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

3) On désigne par D le domaine du plan limité par C , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \pi$.

a) Calculer l'aire A du domaine D.

b) Calculer le volume du solide de révolution engendrée par la rotation de D autour de l'axe (O,i).

15 A- Soit k la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $k(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$

1) a) Déterminer les limites de k en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Etudier le sens de variation de k puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

2) Démontrer que l'équation k(x) = 0 admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une dans l'intervalle $[1,+\infty[$ qui sera notée α. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

3) En déduire le signe de k(x) sur $\mathbb{R}$.

B-Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x+1)e^{-x} \text{ et } g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1};$$

Leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan sont notées C_f et C_g ; (unité graphique : 2cm)

1) Démontrer que les deux courbes passent par le point A (0 ;1) et admettant en ce point la même tangente.

2) a) Démontrer que pour tout réel x on a :

$$f(x) - g(x) = \frac{(2x+1)k(x)}{x^2+x+1}$$ où k est la fonction étudiée dans la partie A- .

b) Etudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire la position relative des courbes C_f et C_g.

3) a) Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (-2x-3)e^{-x} - \ln(x^2+x+1)$ est une primitive de la fonction $f - g$.

b) Calculer l'aire A de la partie du plan limité par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \dfrac{1}{2}$.

16 I- Soit g la fonction numérique définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x) = (1-x)e^{-x}$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) a) Dresser le tableau de variation de g.

b) En déduire que pour tout x ≥ 0 on a: g(x) ≤ 1.

II- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x.\ln(-x) & \text{si } x < 0 \\ x.(2 - e^{-x}) & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Et soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan avec $\|\vec{i}\| = 2$ cm.

1) Montrer que f est continue en 0.

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite puis à gauche en 0.

b) Interpréter graphiquement ces résultats.

3) a) Montrer que pour tout x > 0 on a : $f'(x) = 2 - g(x)$,
en déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0,+\infty[$.

b) Calculer $f'(x)$ pour x < 0.

c) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

4) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x)$, en déduire que la courbe (C) admet une asymptote oblique dont on donnera une équation cartésienne.

b) Montrer que (C) admet une branche parabolique dont on donnera la direction.

5) a) Calculer f (-1) puis tracer la courbe (C).

b) Tracer, dans le même repère que (C), la courbe (C') symétrique de (C) par rapport à l'axe des abscisses.

III- Soit $\alpha \in]-1,0[$ et soit $A(\alpha)$ l'aire, en cm², de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (C') et les droites d'équations respectives : $x = \alpha$ et $x = -1$.

1) Calculer $\int_1^{\alpha} f(t)dt$ (effectuer une intégration par parties).

2) En déduire, l'aire $A(\alpha)$.

3) a) Calculer $\lim\limits_{\alpha \to 0} A(\alpha)$.

b) Interpréter graphiquement la valeur de cette limite

17 I- Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

1) Dresser le tableau de variation de g.

2) En déduire que pour tout réel x strictement positif, on a : $g(x) > 0$.

II- Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par:
$f(x) = x + 2 + \dfrac{\ln x}{x}$.

1) a- Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout réel x strictement positif on a : $f(x) = x + 2 + \dfrac{\ln x}{x}$.

b- Dresser le tableau de variation de f.

2) Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a- Montrer que C admet une asymptote oblique Δ dont on donnera une équation cartésienne.

b- Etudier la position relative de C et Δ.

3) Pour tout réel x de $[1,+\infty[$, on considère les points M(x, f(x)) et N (x, x + 2).

a- Vérifier que la distance MN est égale à $\dfrac{\ln x}{x}$.

b- Pour quelle valeur x_0 de x la distance MN est-elle maximale ?

c- Montrer que la tangente T à au point d'abscisse x_0 est parallèle à Δ .

4) Tracer Δ, T et C dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5) a- Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe C et les droites d'équations respectives :
$y = x + 2$, $x = 1$ et $x = e$

b- Soit α un réel strictement supérieur à e. Déterminer α pour que l'aire de la partie du plan limitée par la courbe et les droites d'équations respectives :
$y = x + 2$, $x = e$ et $x = \alpha$ soit égale à A.

(D'après bac tunisien 2003)

APERÇU HISTORIQUE

Leibniz

Henri Léon Lebesgue
(1875 - 1941)

Dans « Nouveaux essais sur l'entendement humain » (1705), Leibniz présente une classification des nombres. Il distingue ainsi l'entier, le rompu (nombre rationnel), le sourd (nombre irrationnel) et le transcendant. Le terme de « rompu » est issu de la traduction du mot « kasr » utilisé par les mathématiciens arabes et signifiant « brisé ».

C'est dans ce journal qu'il publie, en 1684, la plus importante et la plus controversée de ses découvertes, celle du calcul différentiel et intégral.

Ses premiers travaux sur les séries infinies le mènent de fil en aiguille à prolonger les découvertes passées du calcul infinitésimal (calcul dans l'infiniment petit) à partir de la géométrie des courbes, en particulier de leurs tangentes.

Leibniz n'obtient pourtant pas la paternité du calcul différentiel et intégral car au même moment, le très célèbre mathématicien, physicien et astronome anglais Isaac Newton (1642 ; 1727) établie la même découverte.

Henri Léon Lebesgue (28 juin 1875 à Beauvais - 26 juillet 1941 à Paris) est un mathématicien français. Il est reconnu pour sa théorie d'intégration publiée originalement dans sa dissertation Intégrale, longueur, aire à l'Université de Nancy en 1902.

Élève brillant dès l'école élémentaire, Lebesgue étudia plus tard à l'École normale supérieure. Il a enseigné au lycée de Nancy et à Rennes. Il se fera alors connaître par sa théorie de la mesure, laquelle prolonge les premiers travaux importants d'Émile Borel, l'un de ses professeurs et plus tard son ami.

Il mit au point une théorie des fonctions mesurables (1901) en se basant sur les résultats d'Émile Borel : les tribus boréliennes.

Lebesgue a révolutionné et généralisé le calcul intégral. Sa théorie de l'intégration (1902-1904) est extrêmement commode d'emploi, et répond aux besoins des physiciens. En effet, elle permet de rechercher et de prouver l'existence de primitives pour des fonctions « irrégulières » et recouvre différentes théories antérieures qui en sont des cas particuliers :

* fonctions en escalier et fonctions continues de Riemann
* fonctions bornées de Darboux
* fonctions à variation bornée de Stieltjes

Il a également été professeur à la Sorbonne, puis au collège de France. Il sera élu à l'Académie des sciences en 1922.