Partie 1

Chapitre 7

Fonctions exponentielles

Plan du chapitre

ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

1 1) Soit la fonction $f : x \mapsto 1-\sqrt{x}$ pour $x \in [0,+\infty[$.
a) Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera puis expliciter $f^{-1}(x)$ pour x appartenant à J.
b) Citer les différentes propriétés de f^{-1}
2) Représenter les courbes de f et f^{-1} dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

2 Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :
a) $\ln x = 1$; b) $\ln x = 0$; c) $\ln x = 2$; d) $\ln x = -3$; e) $\ln x = -1$; f) $\ln x = 0.5$

3 1) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 - 4x - 5 = 0$:
2) En déduire la résolution, dans $\mathbb{R}$, de l'équation $(\ln x)^2 - 4\ln x - 5 = 0$.

4 Montrer que chacune des fonctions suivantes admet une fonction primitive sur l'intervalle I et donner la primitive F de f, sur I, qui s'annule en a.

a) $f : x \mapsto \dfrac{2}{x+1}$; $I =]-1,+\infty[$, $a = 0$; b) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x.\ln x}$; $I =]1,+\infty[$, $a = e$.

5 Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'ensemble D sur lequel elle est dérivable et calculer $f'(x)$ pour x élément de D.

a) $f : x \mapsto \ln(x+1)^2$; b) $f : x \mapsto \ln\sqrt{x^2+x-2}$; c) $f : x \mapsto \ln|x^2-x|$

COURS

La fonction exponentielle de base e

Activité 1

Soit la fonction $f : x \mapsto \ln x$.
1) Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
2) On note f^{-1} la fonction réciproque de f. Calculer $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(1)$.
3) Prouver que la fonction f^{-1} est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$.

Théorème et définition

La fonction logarithme népérien est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque est la fonction exponentielle de base e, notée exp, qui est aussi une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$.
Ainsi, la fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \in \left]0,+\infty\right[$;
$(\ln)^{-1} = \exp$ et $(\exp)^{-1} = \ln$; $\exp(0) = 1$; $\exp(1) = e$.

Activité 2

Montrer que pour tous nombres réels x et y tels que $y > 0$, on a :

a) $\exp(x) = y \Leftrightarrow x = \ln y$

b) $\ln\left[\exp(x)\right] = x$

c) $\exp\left(\ln y\right) = y$

Retenons :

$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \left]0,+\infty\right[$ on a :

$\exp(x) = y \Leftrightarrow x = \ln y$

$\ln\left[\exp(x)\right] = x$ et $\exp\left(\ln y\right) = y$

Activité 3

1) Montrer que pour tous nombres réels x et y on a :

a) $\exp(x) = \exp(y) \Leftrightarrow x = y$

b) $\exp(x) < \exp(y) \Leftrightarrow x < y$

2) En déduire que pour tout réel a on a :

a) $a < 0 \Leftrightarrow 0 < \exp(a) < 1$.

b) $a > 0 \Leftrightarrow \exp(a) > 1$.

Retenons :

$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$ on a :

$\exp(x) = \exp(y) \Leftrightarrow x = y$

$\exp(x) < \exp(y) \Leftrightarrow x < y$

Activité 4

Simplifier l'écriture de chacun des réels suivants :

$m = \exp(3 \ln 2)$; $n = \exp(-3 \ln 2)$; $p = \ln \left[\exp\left(\frac{1}{3}\right)\right]$; $q = \ln\left[\frac{e}{\exp\left(\frac{1}{2}\right)}\right]$; $r = \ln \sqrt{\exp(-3)}$.

Activité 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes:

a) $\ln^2 x + \ln x - 12 = 0$ b) $\frac{2\exp(x) - 3}{\exp(x) + 1} = \frac{5}{3}$ c) $\exp(3x-1) < 1$

d) $\exp\left(2x^2 + x + 1\right) \geq \exp(1 - x)$.

Théorème fondamental - Règles de calcul

Activité 1

Soient a et b deux nombres réels. On pose $x = \exp(a)$ et $y = \exp(b)$.
1) Exprimer à l'aide de a et b, ln x et ln y.
2) Vérifier que $a + b = \ln(xy)$.
3) En déduire que $\exp(a + b) = \exp(a) . \exp(b)$

Théorème fondamental

Quels que soient les nombres réels a et b, on a : $\exp(a + b) = \exp(a) . \exp(b)$

Activité 2

1) Soit a un réel.
   a) Calculer de deux façons $\exp(a + (-a))$.
   b) En déduire que $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$.
2) Soient a et b deux réels, montrer que $\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$.

Propriétés

Quels que soient les nombres réels a et b, on a :

- $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$
- $\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$

Activité 3

Soit r un rationnel .

a) Calculer $\ln(e^r)$ et $\ln[\exp(r)]$.

b) Conclure.

Propriétés

* Quel que soit le rationnel r, on a : $\exp(r) = e^r$.
* D'une façon générale, on étend la notation précédente à tous les nombres réels, donc pour tout x réel on a : $\exp(x) = e^x$.
* Ainsi, pour tous réels a et b on a : $e^{a+b} = e^a \times e^b$; $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$; $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
* $e^0 = 1$ et $e^1 = e$.

Activité 4

Soit a un réel et r un rationnel .

Montrer que $\left(e^a\right)^r = e^{ar}$

Propriété

Pour tous a réel et r rationnel on a : $\left(e^a\right)^r = e^{ar}$

Activité 5

1) Soit a un réel. Ecrire plus simplement les expressions suivantes :

$$A = \left(e^a + e^{-a}\right)^2 - \left(e^a - e^{-a}\right)^2 \ ; \ B = \frac{(e^a)^2}{e \times e^{a^2}}$$

2) On considère les équations suivantes :

(E) : $e^{-3x} - 2e^{-2x} + e^{-x} = 0$

(F) : $e^{4x} + 3e^{3x} + 3e^{2x} + e^x = 0$

a) Vérifier que :

$e^{-3x} - 2e^{-2x} + e^{-x} = e^{-x}(e^{-x} - 1)^2$

$e^{4x} + 3e^{3x} + 3e^{2x} + e^x = e^x(e^x + 1)^3$

b) Résoudre alors, dans $\mathbb{R}$, les équations (E) et (F).

3) Résoudre, dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{2x-4} \leq 1$.

sigmaths.net

Etude de la fonction : $x \mapsto e^x$

Activité 1

Soient f et g les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x$ et $g(x)=\ln(e^x)$.

1) En utilisant la dérivabilité de la fonction ln sur $]0,+\infty[$, prouver que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x on a : $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.
3) a) Prouver que pour tout réel x, $g'(x) = 1$.
   b) En déduire que pour tout réel x on a $f'(x) = f(x)$.
   c) Déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Retenons :

* La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est elle-même.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $\exp'(x)=\exp(x)=e^x$.

* La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Activité 2

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x-x-1$.
   a) Etudier les variations de f et calculer f (0).
   b) En déduire que $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^x \geq x+1$.
   c) Prouver alors que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.
2) En utilisant la formule $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$, montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$.

Retenons :

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$.

Activité 3

On se propose de calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}$

a) En posant $y=e^x$, montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = \lim\limits_{y\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\frac{\ln y}{y}}\right)$

b) Conclure.

Retenons :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}=+\infty$

sigmaths.net

sigmaths.net

Activité 4

1) Etablir le tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto e^x$.
2) Tracer dans le même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes représentatives des fonctions ln et exp.
3) Donner les équations des tangentes à la courbe de la fonction exp aux points A(0 ;1) et B(1 ;e).

Le tableau de variations de $f : x \mapsto e^x$

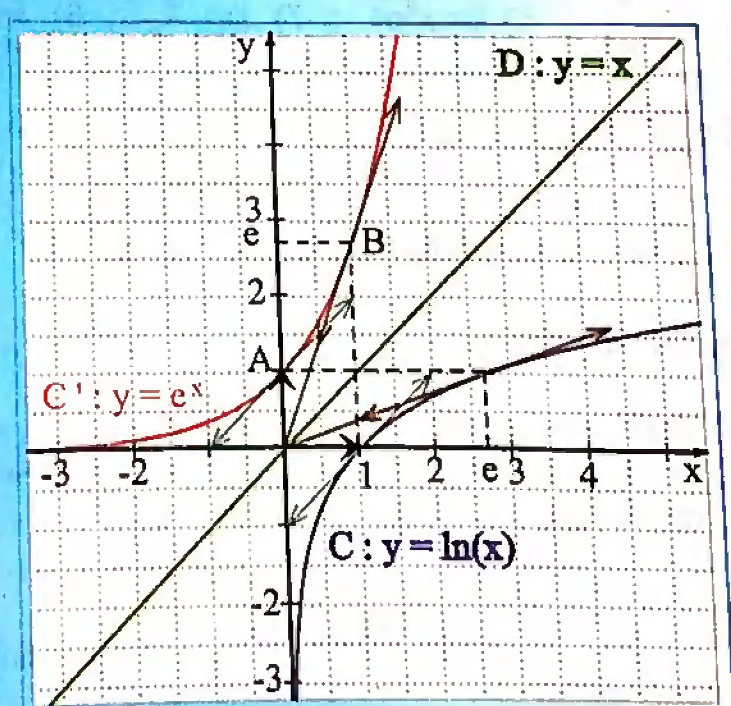
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'(x)				+			
f(x)	0	↗	1	↗	e	↗	$+\infty$

* $\forall x \in \left]-\infty, 0\right]$ on a : $0 < e^x \leq 1$.
* $\forall x \in [0,1]$, on a : $1 \leq e^x \leq e$.
* $\forall x \geq 1$, $e^x \geq e$.

Courbes représentatives de $f : x \mapsto e^x$ et $f^{-1} : x \mapsto \ln x$

$C' : y = e^x$;
$C : y = \ln x$;
$D : y = x$;
On a : $C' = S_D(C)$

- Une équation de la tangente à C' au point A(0, 1) est : $y = x + 1$;
- Une équation de la tangente à C' au point B(1, e) est : $y = ex$.



sigmaths.net

sigmaths.net

Activité 5

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$. (On pourra poser X = -x).

2) a) Vérifier que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel x,

$$x^n e^x = \left(\frac{x}{n}e^{\frac{x}{n}}\right)^n \times n^n.$$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x$.

3) Soit r un rationnel positif et x un réel strictement positif.

a) Exprimer $\ln\left(\frac{e^x}{x^r}\right)$ à l'aide de x, r et ln x.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^x}{x^r}\right)$.

c) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^r}$.

Retenons :

$\lim\limits_{x\to-\infty} x e^x = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty,\ \forall\, r \in \mathbb{Q}_+$

Activité 6

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x - e^x$; 3) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x).e^{-x}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x}$; 6) $\lim\limits_{x\to0} x^2e^{\frac{1}{x}}$; 7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x}$

Activité 7

Soit $f : x \mapsto e^x$.

1) a) Calculer le nombre dérivé de f en $x_0 = 0$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

2) a) Ecrire une approximation affine de f en $x_0 = 0$.

b) En déduire qu'il existe une fonction $\varphi : x \mapsto \varphi(x)$ définie sur un intervalle contenant zéro telle qu'on ait : $e^x = 1 + x + x\varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x\to0} \varphi(x) = 0$.

Retenons : $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

Pour x « voisin de 0 » on a : 1+ x est une approximation affine de e^x.

sigmaths.net

sigmaths.net

Activité 8

1) Donner une valeur approchée pour chacun des réels suivants :

$e^{0.01}$; $e^{0.1}$; $e^{-0.03}$ et $e^{10^{-6}}$.

2) Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{2x}$; c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin x}-1}{x}$; d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x}-1}{\sin x}$; e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}$

Dérivée de e^u - Primitive de $u'.e^u$ où u est une fonction dérivable

Activité 1

1) Soit u une fonction dérivable sur une partie D de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On considère la fonction f définie sur D par $f(x) = e^{u(x)}$
Montrer que f est dérivable sur D et calculer f '(x).

2) Soit g la fonction numérique définie par $g(x) = e^{\left(\frac{x-1}{x^2}\right)}$.
Déterminer l'ensemble D sur lequel g est dérivable puis calculer g'(x) pour x appartenant à D.

Retenons :
Si u est une fonction numérique dérivable sur une partie D de $\mathbb{R}$ alors la fonction $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur D et pour tout x de D on a : $f'(x) = u'(x).e^{u(x)}$.

Activité 2

Déterminer, dans chaque cas, l'ensemble D sur lequel f est dérivable et calculer f '(x) pour $x \in D$.

1) $f(x) = e^{x^2}$; 2) $f(x) = xe^x$; 3) $f(x) = \ln(e^x - 1)$; 4) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$; 5) $f(x) = e^{\sin x}$

Activité 3

1) Déterminer les fonctions primitives de la fonction $f : x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$.
2) Soit u une fonction numérique dérivable sur un intervalle I. Déterminer les fonctions primitives de la fonction $g : x \mapsto u'(x).e^{u(x)}$ sur I.

sigmaths.net

sigmaths.net

Retenons :
Si u est une fonction numérique dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors les primitives sur I de la fonction $f : x \mapsto u'(x).e^{u(x)}$ sont les fonctions du type $x \mapsto e^{u(x)} + k$ où k est une constante réelle arbitraire.

Activité 4

Déterminer, dans chaque cas, une fonction primitive de f sur l'intervalle I :

1) $f(x) = xe^{x^2}$; $I = \mathbb{R}$ 2) $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$; $I =]0,+\infty[$ 3) $f(x) = e^{2x}$; $I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$; $I =]0,+\infty[$ 5) $f(x) = (e^x - 1)^2$; $I = \mathbb{R}$ 6) $f(x) = (2x+3)e^{x^2+3x-1}$; $I = \mathbb{R}$.

Fonctions puissances

Fonctions du type : $x \mapsto a^x$ où $a \in]0, +\infty[$

Activité 1

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $r \in \mathbb{Q}$.

1) Simplifier $\ln(a^r)$ et $\ln(e^{r.\ln a})$.

2) En déduire que $a^r = e^{r.\ln a}$.

Définition

Soit a un réel strictement positif.

La fonction $f : x \mapsto a^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $a^x = e^{x.\ln a}$

Activité 2

a étant un réel strictement positif. Soit la fonction $f : x \mapsto a^x$.

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f '(x).
2) Dresser le tableau de variation de f ; distinguer les trois cas : $0 < a < 1$, $a > 1$ et $a = 1$.
3) Etudier les variations de chacune des fonctions $g : x \mapsto 2^x$ et $h : x \mapsto (0,5)^x$ et tracer leurs courbes représentatives dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

sigmaths.net

sigmaths.net

Activité 3

a est un réel strictement positif ; x et y sont deux réels et r est un rationnel.

Montrer les formules suivantes : $a^{x+y}=a^x.a^y$; $a^{-x}=\frac{1}{a^x}$; $a^{x-y}=\frac{a^x}{a^y}$; $\left(a^x\right)^r=a^{r.x}$.

Activité 4

Ecrire plus simplement chacun des réels suivants :

$a=(3{,}1)^{2\sqrt{3}}\times(3{,}1)^{1-\sqrt{12}}$; $b=(0{,}5)^{\frac{3}{4}}\times(0{,}5)^{-\frac{7}{4}}$; $c=\frac{3^{\pi-2}\times 9}{27^{\frac{1}{3}}}$; $d=\frac{\left((1{,}5)^{-\frac{2}{7}}\right)^3}{(1{,}5)^{-\frac{7}{6}}}$.

Activité 5

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
a) $2^x=16$; b) $3^x=5$; c) $10^x=5$; d) $(0{,}5)^x=8$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
a) $5^x>10$; b) $2^x<5$; c) $3^x\geq 1$; d) $(0{,}5)^x\leq 8$.

3) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $X^2-5X+4=0$.
b) En déduire la résolution, dans $\mathbb{R}$, des équations suivantes :
$2^{2x}-5\times 2^x+4=0$; $3^{-2x}-5\times 3^{-x}+4=0$.

Fonctions du type : $x\mapsto x^r$ où r est un rationnel.

Activité 1

Soit $x>0$; comparer $x^{\frac{1}{2}}$ et $e^{\frac{1}{2}\ln x}$

Définition

Soit r un rationnel. La fonction $f : x \mapsto x^r$ est définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = e^{r\ln x}$.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f : x\mapsto 3x^{\frac{1}{3}}$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x>0$ on a : $f'(x)=x^{-\frac{2}{3}}$ puis dresser le tableau de variation de f.

3) Montrer que $\forall x\in[1000;1001]$ on a: $(10{,}1)^{-2}\leq f'(x)\leq 10^{-2}$.

4) En déduire que $10{,}0032\leq\sqrt[3]{1001}\leq 10{,}0033$; (utiliser les inégalités des accroissements finis).

sigmaths.net

sigmaths.net

Etude d'exemples de fonctions du type : $x \mapsto \exp(u(x))$

Activité 1

Soit $f(x) = e^{-x^2}$

1) Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(x)$.
2) a) Etudier la parité de f.
   b) Dresser le tableau de variation de f sur $]0,+\infty[$.
   c) Montrer que $f''(x) = e^{-x^2}.P(x)$ où P(x) est un polynôme de degré 2 que l'on déterminera.
   d) Etudier les points d'inflexion de la courbe représentative C de f.
3) Tracer la courbe C dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Activité 2

Soit $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$

a) Préciser l'ensemble D de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de D.
b) Dresser le tableau de variation de f.
c) Tracer la courbe représentative C de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$du plan.

Exercice résolu

Soit $\begin{cases} f(x) = e^{\frac{x-1}{x^2}} & \text{pour } x \in \mathbb{R}^*. \\ f(0) = 0 \end{cases}$

a) Préciser l'ensemble D de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de D.
b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 0$.
c) Dresser le tableau de variation de f.
d) Tracer la courbe représentative C de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Solution :

a) $D = \mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$.

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x-1}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{x-1}{x^2}} = e^0 = 1.$

De même on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{x-1}{x^2}} = e^0 = 1.$

b) On a $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x-1}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x-1}{x^2} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{y \to -\infty} e^y = 0 = f(0).$

sigmaths.net

sigmaths.net

Donc f est continue en $x_0 = 0$

On a : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\frac{x-1}{x^2}}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x-1}{x^2}\right) e^{\frac{x-1}{x^2}} \cdot \dfrac{x}{x-1} = 0$ car

$\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x-1}{x^2}\right) e^{\left(\frac{x-1}{x^2}\right)} = \lim\limits_{T \to -\infty} T e^{T} = 0$. Donc f est dérivable en $x_0 = 0$ et $f'(0) = 0$.

c) Puisque f est du type $x \mapsto e^{u(x)}$ où $u(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$ et u est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, la fonctionb f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a : $f' : x \mapsto u'(x) \cdot e^{u(x)}$ donc $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 2x}{x^4}\, e^{\frac{x-1}{x^2}}$.

Ainsi, le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme $(-x^2 + 2x)$ et par conséquent le tableau de variation de f est :

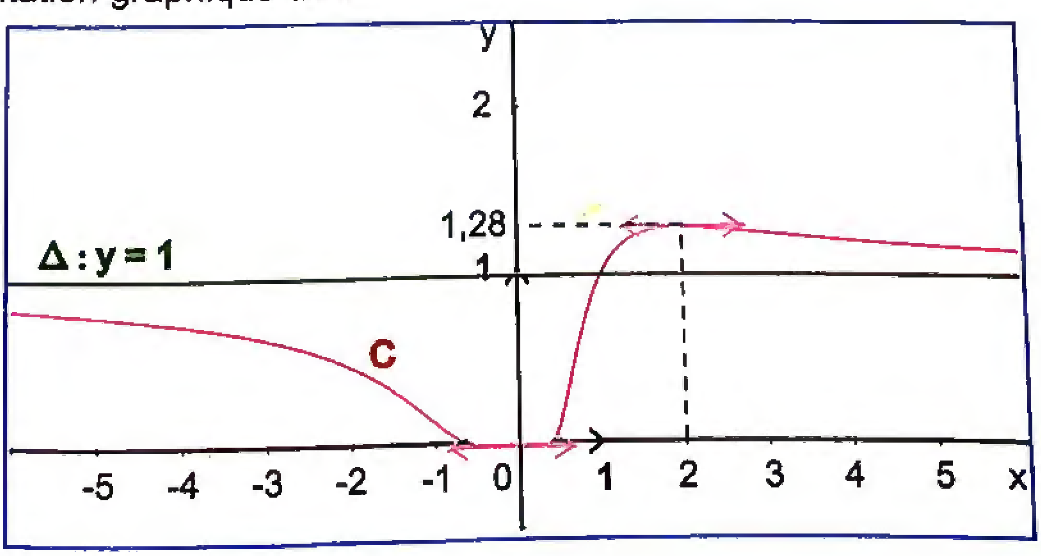
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	1	↘	0	↗	$e^{\frac{1}{4}}$	↘	1

$f(2) = e^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}28$.

La droite Δ d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative C de f au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$.

La courbe C est en dessous de la droite Δ au voisinage de $-\infty$ et elle est au dessus de Δ au voisinage de $+\infty$.

d) Représentation graphique de f :



sigmaths.net

sigmaths.net

Activité 3

Soit f la fonction définie sur [-2, +∞] par $f(x)=e^{\frac{x}{x+2}}$ si $x\neq -2$ et $f(-2)=0$.
a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en (-2).
b) Dresser le tableau de variation de f.
c) Préciser l'asymptote et la demi-tangente éventuelles à la courbe représentative C de f.
d) Tracer C dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Activité 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\sin x}$.
1) Montrer que f est périodique de période 2π.
2) Donner le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.
3) Tracer, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, la courbe représentative C de la restriction de f à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Activité 5

En l'absence de facteurs inhibiteurs, l'accroissement d'une population est proportionnel à la population et à la durée. La croissance d'une population est une fonction exponentielle du temps.
Supposons par exemple que le taux annuel d'accroissement de la population mondiale est égal à 2%, on aura : $P(x+1)-P(x)=0{,}02.P(x)$ et par suite on obtient, approximativement, $P(x)=P(x_0).e^{0{,}02(x-x_0)}$.
Si l'on sait que $P(1996)=3\times10^9$ alors on a : $P(x)=3\times10^9.e^{0{,}02(x-1996)}$.
1) Tracer la courbe représentative de la fonction P sur [1996; 2008] .
2) Donner une estimation de la population mondiale en l'an 2500.

sigmaths.net

sigmaths.net

RÉSUMÉ DU COURS

La fonction exponentielle :

* La fonction exponentielle de base e, notée exp, est la réciproque de la fonction logarithme népérien.

Ainsi, $\exp : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$, $x \mapsto \exp x = e^x$; $(\ln)^{-1} = \exp$ et $(\exp)^{-1} = \ln$

* La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x) = e^x$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et on a :	Pour tous réels a et b on a :
• $(0 < e^x < 1) \Leftrightarrow x \in]-\infty,0[$ • $(e^x > 1) \Leftrightarrow x \in]0,+\infty[$ • $(e^x = 1) \Leftrightarrow x = 0$	• $(e^a = e^b) \Leftrightarrow (a = b)$ • $(e^a > e^b) \Leftrightarrow (a > b)$

Propriétés :

Pour tous réels x et y, on a :

- $e^{x+y} = e^x . e^y$
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$;
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$;
- $\left(e^x\right)^r = e^{rx}$, (quel que soit $r \in \mathbb{Q}$). En particulier, pour $r = \dfrac{1}{2}$, on a : $\sqrt{e^x} = e^{\frac{1}{2}x}$.

Résolution d'équations et d'inéquations :

$e^{u(x)} = e^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) = v(x)$

$e^{u(x)} \leq e^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) \leq v(x)$

Limites usuelles :

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0^-$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Pour x « voisin de 0 » on a : $e^x \simeq 1 + x$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0, \forall n \in \mathbb{N}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^r} = +\infty; \forall r \in \mathbb{Q}_+$

sigmaths.net

sigmaths.net

Dérivée d'une fonction du type $x \mapsto e^{u(x)}$:

Si u est une fonction numérique dérivable sur une partie D de $\mathbb{R}$ alors la fonction $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur D et sa fonction dérivée est $f' : x \mapsto u'(x).e^{u(x)}$

Primitive d'une fonction du type $f : x \mapsto u'(x).e^{u(x)}$:

Si u est une fonction numérique dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors les fonctions primitives sur I de la fonction $f : x \mapsto u'(x).e^{u(x)}$ sont les fonctions du type $x \mapsto e^{u(x)} + k$ où k est une constante réelle arbitraire.

Fonctions puissances : Soit a un réel strictement positif et r un rationnel.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $a^x = e^{x.\ln a}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^r = e^{r.\ln x}$

sigmaths.net

sigmaths.net

AVEC L'ORDINATEUR

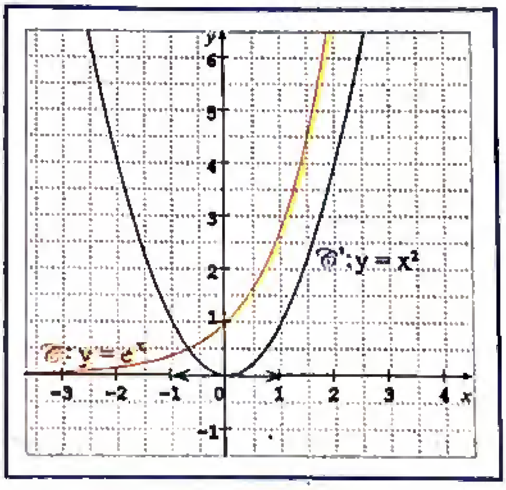
Activité 1

Soit f_1 et f_2 les fonctions définies par $f_1(x) = e^x$ et $f_2(x) = x^2$. On désigne par $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ les courbes représentatives respectives de f_1 et f_2 dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

On se propose d'étudier la position relative des courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.

1) Avec le logiciel **Sine qua non**, Ressource sur Internet : (http://perso.orange.fr/patrice.rabiller/SineQuaNon/menusqn.htm).

- Montrer les axes du repère.
- Définir les fonctions $f_1(x) = \exp(x)$ et $f_2(x) = x\text{^}2$ (choisir deux couleurs différentes pour les courbes)
- Valider avec OK pour obtenir les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ de f_1 et f_2.
- Conjecturer sur la position relative des courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.
- En déduire qu'il existe un réel $a \in]-1, 0[$ tel que pour tout $x > a$, $e^x > x^2$
- Prouver alors que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.



2) Soit $\varphi(x) = e^x - x^2$.

a) Déterminer la fonction dérivée φ' et la fonction dérivée seconde φ'' de φ.

b) Etudier le signe de $\varphi''(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation de la fonction φ'.

c) En déduire que pour tout réel x, $\varphi'(x) > 0$ et que φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

d) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$. En déduire que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

e) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[-1; 0]$ puis déterminer, par la méthode de dichotomie, une valeur approchée de α.

f) En déduire que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

g) Donner la position relative des courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.

sigmaths.net

Activité 2

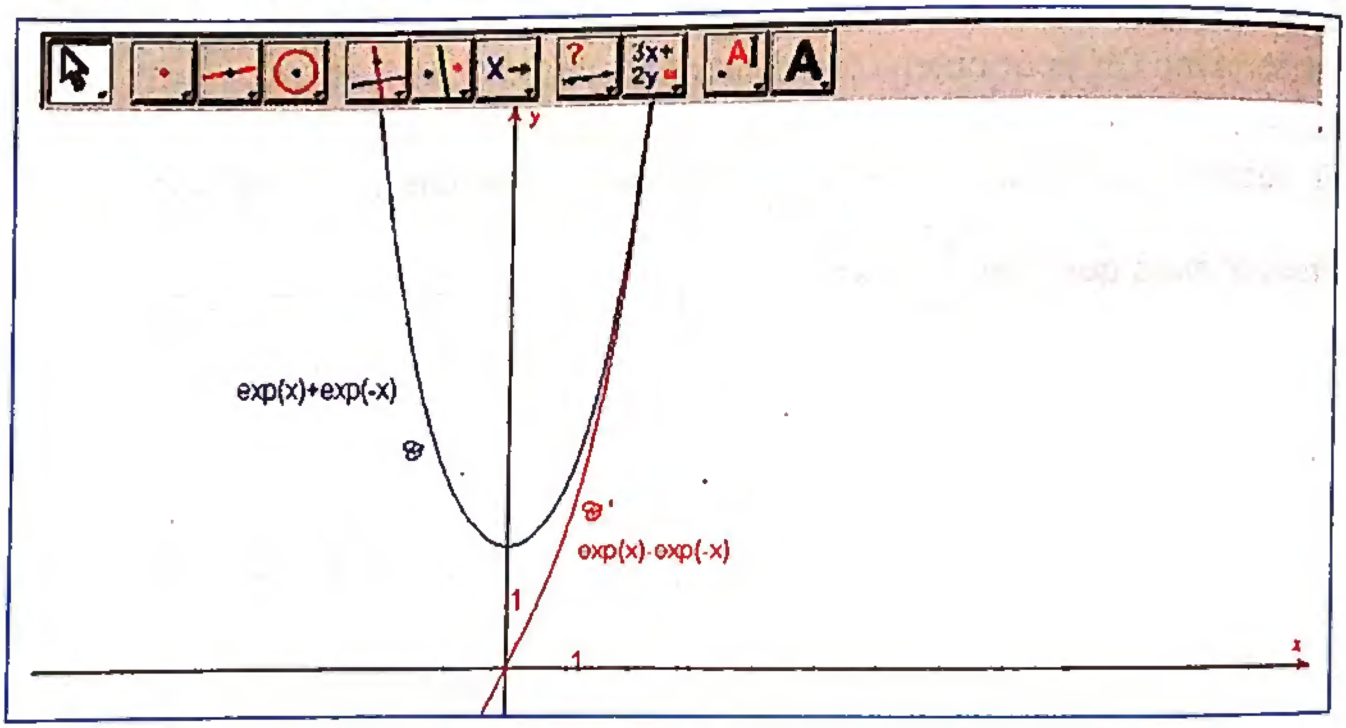
sigmaths.net

Soit f et g les fonctions définies par $f(x) = e^{x} + e^{-x}$ et $g(x) = e^{x} - e^{-x}$. On désigne par (C) et (C ') les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

On se propose d'étudier la position relative des courbes (C) et (C ').

1) Avec le logiciel Cabri, Ressource sur Internet :
(http://www.cabri.com/v2/pages/fr/index.php) :

- Ecrire les expressions exp(x) + exp(-x) et exp(x) - exp(-x).
- Montrer les axes du repère.
- Appliquer les expressions précédentes sur l'un des axes du repère. On obtient ainsi, les courbes (C) et (C ').
- Conjecturer sur la position relative des courbes (C) et (C ')



2) Sur l'intervalle [-2; 2], la partie de la courbe (C) de f s'appelle une chaînette parce qu'elle correspond à la forme obtenue lorsqu'on laisse pendre une chaîne maintenue aux deux extrémités. Galilée pensait que cette courbe devait être une parabole .Nous allons voir que ce n'est pas le cas.

Soit h la fonction définie sur [-2; 2] par $h(x) = ax^2 + b$.

a) Montrer que lorsque $h(0) = f(0)$ et $h(2) = f(2)$ alors $b = 2$ et $4a + b = e^2 + e^{-2}$.

b) Donner une valeur approchée de a à 10^{-2} prés.

c) En déduire une valeur approchée de $f(1) - h(1)$ à 10^{-2} prés.

d) Conclure.

sigmaths.net

EXERCICES ET PROBLÈMES

1 Simplifier chacune des expressions suivantes :

$a = \ln\sqrt{e^3}$; $b = \ln e^{\sqrt{3}}$; $c = e^{-\ln 3}$; $d = e^{\ln 2 - \ln 5}$

$A = \left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2$;

$B = e^{2x} + e^{-2x} - \left(e^x - e^{-x}\right)^2$

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$e^x = -3$; $e^x = e$; $3e^x = e^{-x}$;

$e.e^{3x-1} = 1$; $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$;

$e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$; $e^{x^2} = \dfrac{1}{9}$;

$e^{-x^2-12x-35} = 1$; $e^{x^2-5x} = e^{-6}$

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$e^x < 1$; $e^x > e$; $e^{x+2} < e^{2x-1}$; $e^{3x-1} < 2$

$e^{-x^2} > e^{-1}$; $e^{-x} > 3$; $e^{2x} - 3e^x + 2 > 0$

4 Simplifier chacune des expressions suivantes :

$e^{\ln|x|}$; $e^{|\ln x|}$; $\ln(e^{|x|})$

5 Soit P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

1) Montrer que 3 est une racine de P puis déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel x, on ait :

$P(x) = (x-3)(ax^2 + bx + c)$

2) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation P(x) = 0.

3) En déduire la résolution de l'équation

$(E) : e^{3x} - 3e^{2x} - 4e^x + 12 = 0$

6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

$\ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) = 2$; $e^{3x+4} = 4$; $e^x - e^{-x} = \dfrac{15}{4}$

$e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$; $e^{2x} - 4e^x - 5 > 0$;

$\left|e^{x-1} - 1\right| \leq 3$; $2e^{3x-1} - 3e^{2x-1} + e^{x-1} \leq 0$

7 Soient les deux fonctions :

$f : x \mapsto xe^{-x}$; $g : x \mapsto x^2e^{-x}$

1) Dresser les tableaux de variation de f et g.

2) Représenter graphiquement, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan les courbes de f et g et préciser leurs positions.

8 Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^x - x\right)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{3x} - 2e^x\right)$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2xe^{-x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3e^{-x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{-x} + 2x\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^{3x} - 1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x - x}{2x^2}\right)$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x - 3}{e^x + 2x}\right)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{xe^x}{e^x - 1}\right)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2e^x$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^ne^x$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2e^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + \dfrac{1}{x}\right)e^x$; $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{e^{x\ln 2} - 1}{x}\right)$

$\lim\limits_{x \to 0} x^2e^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{x-1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln\left(1 + e^x\right)}{e^x}$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln\left(1 + e^x\right)}{e^x}$; $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{e^{x+1} - e}{x}\right)$;

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{x-1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+\frac{1}{x}\right)e^{x}$;

$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x}$

9 Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité puis calculer f '(x).

1) $f : x \mapsto e^{-x^2+2x}$;

2) $f : x \mapsto e^{\frac{1}{x^2-1}}$;

3) $f : x \mapsto e^{\sqrt{x^2-x-2}}$;

4) $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$;

10 Soit $f(x) = 2e^{2x} - e^{x}$

1) Préciser l'ensemble D de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de D.
2) Etudier le sens de variation de f.
3) Résoudre l'équation f(x) = 0.
4) Construire la courbe représentative C de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
5) Soit g la restriction de f à l'intervalle

$I = \left[\ln(\frac{1}{4}),+\infty\right[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} dont on précisera l'ensemble J de définition.
b) Tracer la courbe représentative C' de g^{-1} dans le repère .
c) Calculer $g^{-1}(x)$ pour x appartenant à J.
6) Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en ln (0,5).

11 Soit $f(x) = \dfrac{e^{x}}{e^{2x}+1}$

1) Préciser l'ensemble D de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de D.
2) Montrer que f est une fonction paire.
3) Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative C dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
4) Soit g la fonction définie par
g(x) = ln (tan(x))
Montrer que g est une bijection de
$I = \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.
5) Soit h l'application réciproque de g.
a) Quel est le sens de variation de h sur $\mathbb{R}$?
b) Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée h' est égale à f.
c) Retrouver alors, le sens de variation de h.

12 Soit $f(x) = 2x + \dfrac{e^{x}}{e^{x}-1}$ .On désigne par C la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer l'ensemble D de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de D.
2) a) Montrer que le point I(0 ; 0,5) est un centre de symétrie de C.
b) Etudier les variations de f et construire C.
3) Soit k un paramètre réel. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation :
(E) : $2x.e^{x} + (1-k)e^{x} - 2x + k = 0$
(indication : montrer que (E) est équivalente à f(x) = k).

13 Soient les deux fonctions :

$f : x \mapsto e^{x} + e^{-x} - 2;\quad g : x \mapsto e^{x} - e^{-x}$

1) Dresser les tableaux de variation de f et g.

2) Représenter graphiquement, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan les courbes de f et g.

3) a) Montrer que g admet une fonction réciproque et construire, dans le repère, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative de g^{-1}.

b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.

c) Calculer $(g^{-1})'(1,5)$.

4) Montrer que la restriction de f à $[0, +\infty[$ est une bijection. Etudier et représenter graphiquement son application réciproque.

14 Soit $f(x) = x - 1 + e^{-x}$.

1) Etudier et représenter graphiquement f.

2) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α comprise entre 1 et 2.

15 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = xe^{2x+1} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x(1 - \ln x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1) Etudier la continuité de f en zéro.

2) Etudier la dérivabilité de f en zéro.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) Préciser les branches infinies de la courbe C représentative de f.

5) Tracer C dans un repère orthonormé du plan.

16 Soit $f(x) = \sqrt{1 - e^{2x}}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D de f puis montrer que :

$$x \in D - \{0\},\quad \frac{f(x)}{x} = \frac{-1}{\sqrt{-x}}\sqrt{2\left(\frac{e^{2x} - 1}{2x}\right)}$$

2) calculer $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) Etudier les variations de f.

4) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} dont on précisera l'ensemble E de définition.

b) Calculer $f^{-1}(x)$ pour x appartenant à E.

c) Tracer dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes représentatives de f et f^{-1}.

5) Soit $g(x) = -x + \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x} - 1\right)$.

a) Montrer que :

$\forall x \in D - \{0\},\ g(x) = \ln(f(x))$

b) Etudier les variations de g et tracer sa courbe dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

17 Soit $g(x) = -x - 1 + e^{x}$.

1) Etudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire que :

$\forall x \in]-1, +\infty[$ on a : $e^{-x} \leq \frac{1}{1+x}$.

3) Soit $f(x) = \ln(1 + x) + e^{-x}$.

a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition $I =]-1, +\infty[$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Donner une équation de la tangente T à la courbe C de f au point d'abscisse zéro.

d) Construire T et C dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

18 Une lame de verre absorbe 4 % de la lumière qui la traverse.

1) Quelle est la proportion de la lumière incidente qui traverse 20 lames identiques superposées ?

2) Combien faut-il de lames pour absorber 40 % de la lumière incidente ?

19 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3^x$.

1) Etudier et représenter graphiquement f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Résoudre graphiquement puis par le calcul l'inéquation $3^x \leq 6$.

20 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

1) Etudier et représenter graphiquement f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Résoudre graphiquement puis par le calcul l'inéquation $\left(\frac{1}{5}\right)^x \leq 5$.

21 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}.\sin(2x)$.

1) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}, \ -e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$

2) Exprimer $f(x+\pi)$ et $f(x+\frac{\pi}{2})$ en fonction de f(x).

3) Etudier la restriction de f à $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ et la représenter graphiquement dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

22 1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2x} - e^x + 1$.

a) Etudier les variations de g .

b) Tracer, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, la courbe C_g.

c) Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. Discuter graphiquement, suivant les valeurs de k, le nombre de solutions réelles de l'équation

(E) : $e^{2x} - e^x + 1 - k = 0$

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)$

a) Montrer que $f(x) = 2x + \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)$

b) Montrer alors que la droite D : y = 2x est une asymptote à la courbe représentative C de f.

c) Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

d) Tracer, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe C_f . (On précisera la tangente à C_f en son point d'ordonnée nulle).

23 On considère la fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}\,.e^{-x}$ et on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en -1.

b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c) Calculer la limite de f en $+\infty$.

d) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) Dresser le tableau de variation de f.

3) Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

4) Montrer que l'équation f(x) = x admet une solution unique α dans $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et que $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

5) Tracer $\mathscr{C}$.

(D'après Bac Tunisien 2004)

24 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2e^{-x} + x - 2$ et ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 4 cm).

1) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et vérifier que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $-2e^{-x} + 1 > 0$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet dans $\mathbb{R}$ exactement deux solutions dont l'une est nulle ; on notera α l'autre solution et on vérifiera que : $1{,}5 < \alpha < 1{,}6$.

3) a) Montrer que la courbe ($\mathscr{C}$) admet une asymptote oblique Δ d'équation $y = x - 2$ au voisinage de $(+\infty)$.
b) Préciser la nature de la branche infinie de la courbe ($\mathscr{C}$) au voisinage de $(-\infty)$.
4) a) Donner une équation cartésienne de la tangente T à la courbe ($\mathscr{C}$) à l'origine O.
b) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -2e^{-x} + 2x - 2$. Etudier le sens de variation de g et déduire le signe de g(x).
c) En déduire la position de ($\mathscr{C}$) par rapport à T.
5) Tracer Δ , T et ($\mathscr{C}$) .
6) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[\ln 2,+\infty[$ et h^{-1} la fonction réciproque de h.
a) Dresser le tableau de variation de h^{-1}.
b) Tracer la courbe de h^{-1} dans le même repère .

(D'après Bac Tunisien 2005)

25 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$ et soit C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ [unité : 2 cm].
1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
b) Montrer que pour tout réel x on a :
$f'(x) = \dfrac{2e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2}$ puis dresser le tableau de variation de f.
c) Montrer que le point I $(0,\frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.
d) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à $\mathscr{C}$ au point I.
2) a) Montrer que pour tout réel t on a :
$f'(t) \leq \dfrac{1}{2}$.
b) Montrer que $\forall x \geq 0$ on a : $f(x) \leq \frac{1}{2}(x+1)$.
c) Déterminer la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à (T).
3) Tracer (T) et $\mathscr{C}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
4) a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.
b) Soit $y \in]0, 1[$.
Déterminer le réel x tel que f(x) = y.
c) En déduire la représentation graphique dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction g définie sur $]0, 1[$ par

$g(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$.

(D'après Bac Tunisien 2002)

26 Pour effectuer un examen médical, On injecte par piqûre intramusculaire une dose de 3 cm^3 d'une substance médicamenteuse dans le sang d'un malade à l'instant t = 0 (t est exprimé en heures).
Expérimentalement, on montre que la quantité Q(t) de substance, exprimée en cm^3 , présente dans le sang à l'instant t est donnée par : $Q(t) = \dfrac{1}{3}\, t \,.\, e^{3-t}$

1) Quel volume du médicament reste présent dans le sang au bout de 90 minutes ?
2) Quel volume du médicament le patient a-t-il éliminé au bout d'une demi heure ? d'une heure ?
3) Déterminer Q'(t) et dresser le tableau de variation de Q sur $[0 , +\infty[$
4) Montrer que la tangente T à la courbe (C) de la fonction Q dans le repère orthogonal au point d'abscisse 2, a un coefficient directeur approximativement égal à (-0,9).
5) Tracer T et (C).
6) Déterminer graphiquement, au bout de combien de temps la quantité de médicament dans le sang est inférieur à 0,5 cm^3.

APERÇU HISTORIQUE

C'est à partir des progressions numériques de **Stifel** (1487 - 1567) que **Neper** peut, après vingt ans de travail, inventer les logarithmes qui portent le nom de « logarithmes népériens » . Neper prend comme base la limite du nombre $\left[1+\frac{1}{n}\right]^{n}$ quand n devient de plus en plus grand, c'est à dire quand n tend vers $+\infty$. Il trouve un nombre sensiblement égal à 2,718 … **Euler** (1707 - 1785) appelle ce nombre « le nombre de Neper » qu'il baptise « e ».

Ainsi, la fonction logarithme était née et c'est sa réciproque que l'on appelle désormais « la fonction exponentielle ».

Il est fréquent de traduire par : « croissance exponentielle » un phénomène qui croit rapidement ; la croissance logarithmique est, quant à elle, plus lente et progressive.

La plupart des réactions biologiques (exemple : écoulement des liquides dans l'organisme) suivent des variations logarithmiques ou exponentielles

Euler propose le célèbre π pour le nombre *Pi,* la lettre **i** pour une racine carrée de -1 et le fameux e base des logarithmes népériens.

Il établit à ce sujet, une formule liant ces trois nombres : $e^{i\pi}+1=0$ et une seconde mettant en relation la trigonométrie et l'analyse complexe : $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

Dans Institutiones calculi intégralis (1768/70), **Euler** développe également le calcul différentiel de Wilhelm Gottfried von **Leibniz** (1646 ; 1716) et la méthode des fluxions d'Isaac **Newton** (1642 ; 1727). Il prolonge les travaux de **Bernoulli** et met en place la notion d'équation aux dérivées partielles et le calcul des variations par la recherche des extrema sur les courbes.

En 1755, il publie Institutiones calculi differentialis, cum ejus usa in analysin infinitorum ac doctrinis serierum qui renferme ses recherches sur les séries.

Dans Vollständige Anleitung zur Algebra (Introduction complète à l'algèbre), publié en allemand en 1770, il présente ses travaux d'algèbre élémentaire et démontre des théorèmes fondamentaux.

En géométrie, il démontre une formule due à René Descartes (1596 ; 1650) et qui porte aujourd'hui son nom :

S - A + F = 2

où S, F et A désignent respectivement le nombre de sommets, de faces et d'arêtes d'un polyèdre convexe.