Partie 1

Chapitre 6

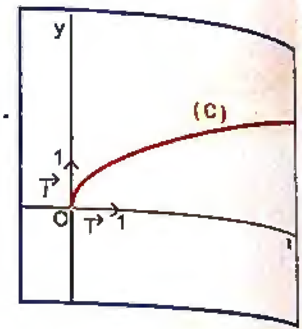
Fonctions logarithmes

Plan du chapitre

❋	**Activités préliminaires**	
❋	**Cours**	
	❖	La Fonction logarithme népérien.
	❖	Dérivée d'une fonction composée du type $(\ln \circ u)$.
	❖	Propriété fondamentale des logarithmes et règles de calcul.
	❖	Etude de la fonction logarithme népérien.
	❖	Etude d'exemples de fonctions du type $x \mapsto \ln(u(x))$
❋	**Résumé du cours**	
❋	**Avec L'ordinateur**	
❋	**Exercices et Problèmes**	
❋	**Aperçu Historique**	

ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

1 On a représenté dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, la courbe (C) de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ pour $x \in [0,+\infty[$.



1) Utiliser le graphique pour conjecturer le sens de variation de f et la nature de la branche infinie de (C).
2) Justifier les résultats obtenus.
3) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(1+x)-f(1)}{x}$.
   Que représente cette limite ?
   Interpréter, graphiquement, le résultat obtenu.
4) Ecrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point A (1, 1).
5) a) Tracer (T).
   b) Quelle conjecture peut-on émettre sur la position relative de la droite (T) et la courbe (C) ?

2 a) Montrer que la fonction $F : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$

b) Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 2.
c) Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

3 Montrer que chacune des fonctions suivantes admet une fonction primitive sur l'intervalle I et donner la primitive F de f, sur I, qui s'annule en a.

a) $f : x \mapsto x^3$; $I =]-\infty,+\infty[$, $a = 0$; b) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $I =]0,+\infty[$, $a = 1$;

c) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$; $I =]0,+\infty[$, $a = 2$. d) $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{(x^2+x)^2}$; $I = [1,+\infty[$, $a = 3$

COURS

La fonction Logarithme Népérien

Activité 1

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

1) Justifier que f admet au moins une fonction primitive sur l'intervalle I.
2) Soit x_0 un élément de l'intervalle I et F l'unique primitive de f sur I qui s'annule en x_0. Montrer que F est strictement croissante sur I.

Définition

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des réels strictement positifs par $f(x) = \frac{1}{x}$.
On appelle fonction logarithme népérien (notée ln) la primitive de f sur $]0,+\infty[$ s'annulant en 1. Ainsi, la fonction ln est définie sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a : $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$ et $\ln(1) = 0$.

Activité 2

En utilisant une calculatrice, trouver une valeur approchée à 10^{-2} près par excès de chacun des réels suivants : $\ln 2$; $\ln 3$; $\ln \pi$; $\ln 5$; $\ln 10$; $\ln \frac{1}{3}$; $\ln \frac{1}{2}$ et $\ln \sqrt{2}$.

Activité 3

Soit la fonction $f : x \mapsto x - \frac{1}{x}$ définie sur $I =]0,+\infty[$.
Déterminer la fonction primitive F de f sur I telle que F (1) = 1.

Activité 4

Soit $g : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.

a) Préciser l'ensemble de définition D de la fonction g.
b) Montrer que g est dérivable sur D et calculer $g'(x)$ pour $x \in D$.

Propriété fondamentale de la fonction ln
Règles de calcul

Activité 1

On considère la fonction g définie, pour tout $x \in]0,+\infty[$, par $g(x) = \ln(ax)$ où a est un réel strictement positif.

1) En remarquant que $g(x) = (\ln \circ u)(x)$ où $u(x) = ax$, montrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x > 0$ on a : $g'(x) = \frac{1}{x}$.
2) En déduire que pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a $g(x) = \ln x + k$ où k est une constante réelle.
3) Calculer g (1).En déduire la valeur de k.
4) Montrer alors, que pour tous réels strictement positifs a et b on a $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Propriété fondamentale

Pour tous réels strictement positifs a et b on a :
$\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Exemples numériques :
$\ln(6) = \ln(2 \times 3) = \ln 2 + \ln 3$
$\ln(10) = \ln 2 + \ln 5$

Activité 2

Soient x et y deux réels strictement positifs.

a) En remarquant que $\frac{1}{x} . x = 1$, montrer que $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

b) Montrer alors que $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.

Activité 3

Soit x un réel strictement positif.

1) a) Exprimer $\ln(x^2)$ en fonction de $\ln(x)$ puis montrer que $\ln(x^3) = 3\ln(x)$.
   b) Montrer, par un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, $\ln(x^n) = n.\ln(x)$.
2) a) Montrer que $\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = -2\ln(x)$.
   b) Soit n un entier relatif négatif. En posant $n' = -n$, prouver que $\ln(x^n) = n.\ln(x)$

Propriétés

Pour tous réels x et y strictement positifs et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

* $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$; $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$; $\ln\left(x^n\right) = n . \ln x$

* Pour tous réels $a_1, a_2, \dots, a_n$ strictement positifs on a : $\ln\left(a_1 . a_2 \dots a_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln a_i$

Activité 4

1) Soit x un réel strictement positif.

a) En remarquant que $x = (\sqrt{x})^2$, exprimer $\ln\sqrt{x}$ à l'aide de ln x .

b) Montrer que pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 2, on a $\ln\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\ln x$.

2) Soit $r = \frac{p}{q}$ un rationnel ($p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$).

a) Soit a un réel strictement positif quelconque et b le réel tel que $b^q = a^p$. Montrer que $\ln b = r.\ln a$ et $b = \sqrt[q]{a^p}$

b) En déduire que $\ln a^r = r.\ln a$

On notera pour tous $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$:
$\sqrt[q]{a} = a^{\frac{1}{q}}$ et $\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$

Propriétés

Pour tout réel x strictement positif et pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on a :
* $\ln x^r = r.\ln x$
* En particulier pour $r = \frac{1}{2}$, on a : $\ln x^{\frac{1}{2}} = \ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$

Activité 5

Simplifier l'écriture, puis donner une valeur approchée, de chacun des réels suivants :

$A = \ln 128 - \ln 32 - \ln 8$; $B = \ln 625 - \ln 50 - \ln 75$

$C = \ln\left(\frac{9^2 \times 4^{-3}}{2^{-5} \times 3^3}\right)$; $D = \ln\left(\frac{\left(4^7 \times 3^{-12}\right)^2}{\left(4^{-1} \times 3^8\right)^{-5}}\right)$; $E = \ln\left(\frac{2^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{1}{8}} \times \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)$

Etude de la fonction : $x \mapsto \ln x$

Activité 1

1) a) Prouver que la fonction ln est dérivable et strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
   b) En déduire que pour tout $x > 0$ on a : si $x < 1$ alors $\ln x < 0$ et si $x > 1$ alors $\ln x > 0$.
2) On suppose que la fonction ln est majorée sur $]1,+\infty[$.
   a) Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = \ell$ où ℓ est finie.
   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(2x)$ .En déduire que $\ell = \ell + \ln 2$.
   c) Que peut-on conclure ?
3) Déterminer, alors, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)$.

Retenons :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

Activité 2

1) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.
2) Exprimer $\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ en fonction de $\ln x$.
3) En déduire $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x)$

Retenons :

$\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$

Activité 3

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln x$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

Propriétés

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \ln x$. La fonction f est dérivable et strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

i) Pour tous réels strictement positifs a et b on a :
   * $(\ln a = \ln b) \Leftrightarrow (a = b)$
   * $(\ln a > \ln b) \Leftrightarrow (a > b)$

ii) Pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a :
   * $(\ln x < 0) \Leftrightarrow x \in]0,1[$
   * $(\ln x > 0) \Leftrightarrow x \in]1,+\infty[$
   * $(\ln x = 0) \Leftrightarrow x = 1$

Activité 4

1) Dresser le tableau de variation de la fonction ln.
2) En déduire qu'il existe un réel unique e supérieur à 1 et tel que $\ln e = 1$.
3) Vérifier que $2 < e < 3$.
4) Montrer que $\forall r \in \mathbb{Q}$, on a $\ln e^r = r$.

x	0	1	e	$+\infty$
f '(x)		+		
f(x)	$-\infty$	0	1	$+\infty$

Retenons :
$\ln e = 1$.
$\ln 1 = 0$.
$2 < e < 3$.
$e \approx 2{,}71828$;
$\forall r \in \mathbb{Q}$, on a $\ln e^r = r$
e s'appelle la base du logarithme népérien.

Activité 5

Soit g la fonction définie sur I = $]1,+\infty[$ par $g(x) = 2\sqrt{x} - \ln x$.

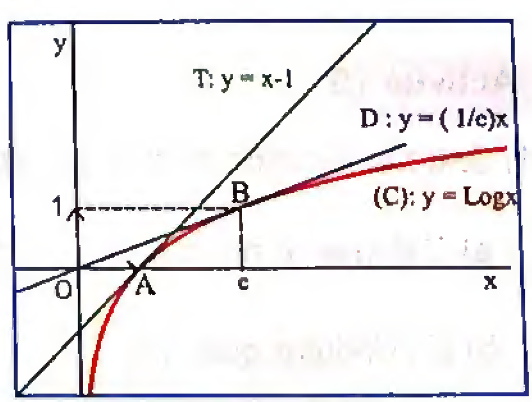
1) Montrer que g est dérivable sur I et que $g'(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$.
2) En déduire que g est strictement croissante sur I.
3) a) Calculer g(1).
   b) En déduire le signe de g(x) sur I et qu'on a $\forall\, x \in I,\ 2\sqrt{x} > \ln x$.
4) Montrer alors que $\forall\, x \in I,\ 0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{2}{\sqrt{x}}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$.

Retenons :
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

Activité 6

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \ln x$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$du plan.

1) Préciser les branches infinies de la courbe (C).
2) Donner une équation cartésienne de la tangente T à (C) au point A (1, 0).
3) Donner une équation cartésienne de la tangente D à (C) au point B(e, 1).
4) Soit $g(x) = x - 1 - \ln x$.
a) Dresser le tableau de variation de g sur $]0,+\infty[$.
b) En déduire le signe de g(x) puis la position relative de T et (C).
c) Etudier de même la position relative de D et (C).
5) Tracer T, D et (C).



6) a) Montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis, qu'il existe un réel $c \in \left]1, e\right[$ tel que la tangente au point d'abscisse c à la courbe (C) soit parallèle à la droite (AB).

b) Déterminer la valeur de c.

Activité 7

1) En remarquant que $x.\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ pour x > 0, calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} x.\ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

2) En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} x.\ln x$.

Retenons :

$\lim\limits_{x \to 0^+} x.\ln x = 0$

Activité 8

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} x - \ln(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - \ln(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(\sqrt[3]{x})}{x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2\ln(x)$; $\lim\limits_{x \to 0^+} (2x+1)\ln(x)$

Activité 9

1) Soit $r \in \mathbb{Q}_+^*$.

a) Montrer que $\forall\, x \in \left]0, +\infty\right[$ on a : $\frac{1}{r} \ln\left(x^r\right) = \ln x$.

b) Calculer alors, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^r}$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^r.\ln(x)$.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-\frac{2}{3}}.\ln(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt[3]{x}.\ln(x)$.

On admet que :

$\forall\, r \in \mathbb{Q}_+^*$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^r = 0$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^r = +\infty$

Retenons :

$\forall r \in \mathbb{Q}_+^*$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^r.\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$

Activité 10

1) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \ln x$.

a) Calculer le nombre dérivé de f en $x_0 = 1$.

b) En déduire que $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

2) Calculer $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{(x-1)^3}$.

Retenons :

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

Résolution d'équations et d'inéquations

Activité 1

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, chacune des équations suivantes :
$1 + \ln x = 0$; $2 - \ln x = 0$; $1 + 3\ln x = 0$;

$\ln(3x-5)=0$; $\ln|3x+7| = \ln 4$; $\ln(x^2+1)=0$; $\ln(x^2-4x+7)=\ln 2$; $\ln\left(\dfrac{3x-4}{x+2}\right)=\ln(x-2)$

Activité 2

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

$\ln(2x-3)<\ln(x+5)$; $\ln|4-x| - \ln 2 \geq 0$

$\ln(3x^2+5x-2)>0$; $\ln\left(\dfrac{2x-3}{5x+1}\right)\leq 0$;

$2\ln(2+x\sqrt{3})-\ln(2-x\sqrt{3})\geq \ln 2$; $\ln(x-1)+\ln(x+2)\leq \ln(x^2-1)$

$$[\ln(u(x))\geq \ln(v(x))] \Leftrightarrow \begin{cases} u(x)>0 \\ v(x)>0 \\ u(x)\geq v(x) \end{cases}$$

Exercice résolu

Une société, dont le chiffre d'affaire est de 600.000 DT, prévoit de l'augmenter de 5% par an.
Au bout de quel nombre d'années peut-on avoir un chiffre d'affaire supérieur ou égal à 900.000 DT ?

Solution :

Soit n le nombre d'années, C_0 le chiffre d'affaire initial et C_n le chiffre d'affaire à l'année n.
On a alors, $C_0 = 600,000$ et $C_{n+1} = C_n + 0,05\, C_n$ ou encore $C_{n+1} = 1,05\, C_n$

La suite (C_n) est géométrique de raison $q = 1,05$ et de premier terme C_0 .

Donc $C_n = (1,05)^n .C_0$

Ainsi, la résolution du problème posé revient à la résolution de l'inéquation :
$600.000(1,05)^n \geq 900.000$. Donc n est solution de l'inéquation $(1,05)^n \geq 1,5$.
Ce qui équivaut à $(\ln (1,05)^n \geq \ln 1,5)$ équivaut à $n.\ln(1,05) \geq \ln(1,5)$ équivaut à

$$n \geq \frac{\ln(1,5)}{\ln(1,05)} \simeq 8,3$$

Donc, à partir de la 9ème année le chiffre d'affaire de la société sera supérieur à 900.000 DT.

Activité 3

La population d'une ville augmente de 5% par an. En 2000, on compte 80.000 habitants. En quelle année la population de cette ville dépassera-t-elle 100.000 habitants ?
Indication : Désigner par n le rang de l'année après 2000 et vérifier alors qu'on a : $(1,05)^n \geq 1,25$ puis déterminer n.

Dérivée d'une fonction du type : $x \mapsto \ln(u(x))$

Activité 1

1) Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 5)$. En remarquant que $f(x) = (\ln \circ u)(x)$ où $u(x) = x^2 - 2x + 5$, montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

2) Soit $g(x) = \ln|x|$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et qu'on a : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g'(x) = \dfrac{1}{x}$.

3) On considère une fonction u dérivable sur une partie D de $\mathbb{R}$ et telle que $\forall x \in D,\ u(x) \neq 0$.
Soit f la fonction définie sur D par $f(x) = \ln|u(x)|$. Montrer que f est dérivable sur D et que $\forall x \in D,\ f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Théorème

* Si u est une fonction dérivable sur une partie D de $\mathbb{R}$ et telle que $\forall x \in D,\ u(x) > 0$, alors la fonction f définie sur D par $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur D et on a :

$$\forall x \in D, \quad f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

* Si u est une fonction dérivable sur une partie D de $\mathbb{R}$ et telle que $\forall x \in D,\ u(x) \neq 0$, alors la fonction f définie sur D par $f(x) = \ln|u(x)|$ est dérivable sur D et on a :

$$\forall x \in D, \quad f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Activité 2

1) Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln|x^2 - 1|$. Déterminer l'ensemble D sur lequel la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$ pour $x \in D$.

2) Soit g la fonction définie sur $I =]1, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.Déterminer la primitive G de la fonction g sur I telle que $G(\sqrt{2}) = 0$

Retenons:

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et telle que $\forall x \in I,\ u(x) \neq 0$, alors les primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sont les fonctions F définies sur I par $F(x) = \ln|u(x)| + k$,où k est une constante réelle arbitraire.

Activité 3

1) Montrer que chacune des fonctions suivantes admet une fonction primitive sur l'intervalle I et donner la primitive F de f, sur I, qui s'annule en a.

a) $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$; $I = \left]-\infty,+\infty\right[$, $a = 0$ b) $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+2}$; $I = \left[-1,1\right]$, $a = 0$

c) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x.\ln x}$; $I = \left]1,+\infty\right[$, $a = 2$ d) $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$; $I = \left]0,+\infty\right[$, $a = 1$

2) Montrer que la fonction $F : x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2\ln x - \dfrac{1}{4}(x^2-1)$ est la primitive de la fonction $f : x \mapsto x\ln x$ sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1.

Etude d'exemples de fonctions du type : $x \mapsto \ln(u(x))$

Activité 1

Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln(1 + x)$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D de g.
2) Montrer que g est dérivable sur D et qu'on a $\forall x \in D$, $g'(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
3) En déduire $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ puis donner une approximation affine de $\ln(1 + h)$ pour h «voisin de zéro ».
4) Donner une valeur approchée pour chacun des réels suivants : $\ln(1{,}01)$; $\ln(0{,}99)$ et $\ln(0{,}97)$.

Retenons :

* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

* Pour x « voisin de 0 » on a :

x est une approximation affine de $\ln(1+x)$.

Activité 2

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \;;\; \lim_{x \to 0^+} x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \;;\; \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\ln(x+1)} \;;\; \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x^2-3x+1)}{x}$$

Activité 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \ln(x+1)$.

1) Déterminer l'ensemble D de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de D.
2) Etudier le sens de variation de f.
3) a) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α .
   b) Prouver que $0{,}7 < \alpha < 0{,}8$.
4) Construire la courbe représentative C de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.(On prendra 4cm pour unité graphique).
5) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.
   b) Tracer la courbe représentative C' de f^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Activité 4

Soit g la fonction définie par $g(x) = 2x - 1 + \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

1) Déterminer l'ensemble D de définition de g et calculer les limites de g aux bornes de D.
2) Etudier les variations de g sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$ et $]0, +\infty[$.
3) a) Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α dans $]0, +\infty[$.
   b) Donner un encadrement de α à 10^{-1} prés par défaut.
4) Etudier les branches infinies de la courbe représentative C de g.
5) Construire C dans un repère orthonormé du plan.

Activité 5

I - Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x.\ln x - x$.

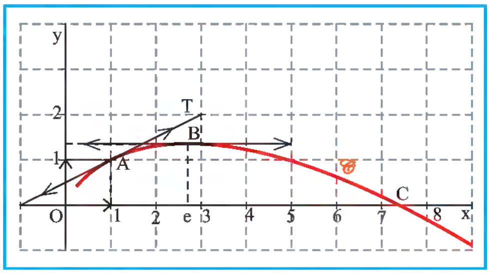
1) a) Montrer que f est dérivable et calculer f '(x) pour x > 0.
   b) En déduire la primitive F de la fonction ln s'annulant en 1.
   c) Donner le sens de variation de f.
2) Calculer les limites de f(x) quand x tend vers 0^+ et quand x tend vers $+\infty$.
3) a) Résoudre l'équation f(x) = 0.
   b) En déduire le signe de f(x).

II - Soit la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(0) = 0$ et pour x > 0, $g(x) = 2x^2.\ln x - 3x^2$.

1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité à droite de g en 0.
   b) Calculer g'(x) pour x > 0.
   c) Déduire, de **I-**, le sens de variation de g.
   d) Calculer la limite de g(x) quand x tend vers $+\infty$ et dresser le tableau de variation de g.
2) a) Résoudre l'équation g(x) = 0.
   b) Construire la courbe C de g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Retenons :
Une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$ est du type $x \mapsto x.\ln x - x + k$ où k est une constante réelle arbitraire.

Activité 6



Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Le graphique ci-contre représente une partie de la courbe C d'une fonction f définie sur $]0, +\infty[$. T est la tangente à C au point A(1, 1).

1) Par lecture graphique :
   a) Donner le coefficient directeur de T.
   b) Donner f(1), f '(1) et f '(e) .
   c) Déterminer les réels x de $]1, +\infty[$ qui vérifient $f'(x) < 0$.

2) Sachant que f est définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{2}\left[2 - \ln x\right]$;
   a) Retrouver par le calcul l'ordonnée du point B où la fonction f admet un extremum global.
   b) Déterminer l'abscisse du point C, autre que O, où la courbe représentative de f rencontre l'axe des abscisses.
   c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
   d) Montrer que f admet un prolongement par continuité g en 0 que l'on précisera.
   e) Etudier la dérivabilité de g à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
   f) Dresser le tableau de variation de g et tracer, en utilisant une autre couleur, sa courbe représentative C ' dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Activité 7

Soit $g(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

1) Préciser l'ensemble D de définition de g et calculer les limites de g aux bornes de D.
2) Dresser le tableau de variation de g et calculer g(10).
3) En déduire que g réalise une bijection de D sur $\mathbb{R}$.
4) Déterminer les branches infinies de la courbe représentative C de g.
5) Construire C dans un repère orthonormé du plan.

Activité 8

Soit f la fonction définie par $f(x)=\ln\sqrt{\left|x^2+2x-3\right|}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) Déterminer l'ensemble de définition D de f et calculer les limites de f aux bornes de D.
2) Montrer que la droite Δ : x = -1 est un axe de symétrie pour la courbe C .
3) Montrer que f est dérivable sur D et déterminer sa fonction dérivée.
4) Dresser le tableau de variation de f.
5) Préciser les points d'intersection de C avec l'axe des abscisses et écrire une équation de la tangente à C en chacun de ces points.
6) Tracer C.

Exercice résolu

Soit $f(x)=\dfrac{1}{x(1+\ln x)}$.

1) Préciser l'ensemble D de définition de f.
2) Etudier les variations de f sur D.
3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I=\left]\dfrac{1}{e},+\infty\right[$.

   a) Montrer que g est une bijection de I sur g(I) puis construire les courbes représentatives de g et de g^{-1} dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

   b) Calculer g(e) et $\left(g^{-1}\right)'\left(\dfrac{1}{2e}\right)$.

Solution :

1) f est définie en tout réel x strictement positif tel que $1+\ln x\neq 0$.

$1+\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{e}$. D'où l'ensemble de définition de f est :

$$D=\left]0,\frac{1}{e}\right[\cup\left]\frac{1}{e},+\infty\right[$$

2) f est dérivable sur D et on a $\forall x\in D,\ f'(x)=-\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$ avec $u(x)=x(1+\ln x)$.

Donc : $\forall x\in D,\ f'(x)=\dfrac{-2-\ln x}{\left[x(1+\ln x)\right]^2}$. Ainsi, pour tout x de D, f '(x) possède le même signe que -2 - ln x .

$-2-\ln x>0 \Leftrightarrow -2>\ln x \Leftrightarrow \ln e^{-2}>\ln x \Leftrightarrow e^{-2}>x$

donc $f'(x)>0 \Leftrightarrow \left(x<\dfrac{1}{e^2} \text{ et } x\in D\right)$.

Par conséquent, f est strictement croissante sur $\left]0,\dfrac{1}{e^2}\right[$ et elle est strictement décroissante sur $\left]\dfrac{1}{e^2},\dfrac{1}{e}\right[\cup\left]\dfrac{1}{e},+\infty\right[$.

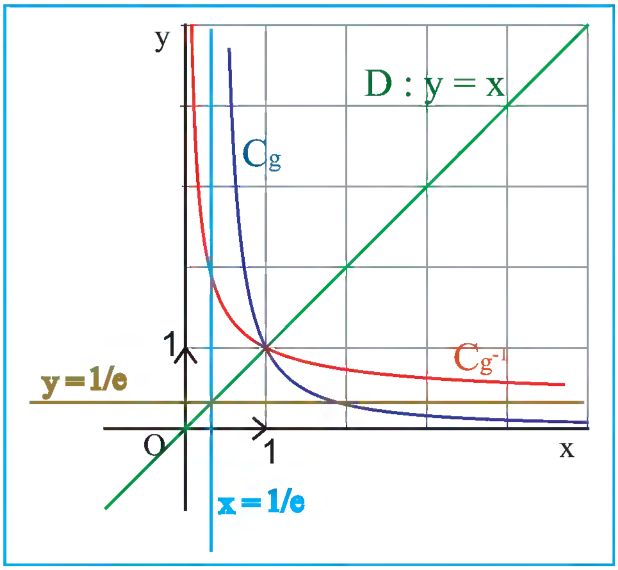
3) a) La restriction g de f à l'intervalle $I = \left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$ est continue et strictement décroissante, donc g réalise une bijection de I sur l'intervalle

$$g(I) = \left]\lim_{x \to +\infty} f(x), \lim_{x \to \left(\frac{1}{e}\right)^+} f(x)\right[= \left]0, +\infty\right[.$$

b) $g(e) = \frac{1}{2e}$, par conséquent $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2e}\right) = \frac{1}{g'(e)} = -\frac{4}{3}e^2$.

Courbes représentatives de g et de g^{-1} :

On a : $C_{g^{-1}} = S_D(C_g)$ où D est la droite d'équation y = x.



Activité 9

Soit f la fonction définie par f (x) = x + ln(2x - 1) et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$du plan.

1) Préciser l'ensemble D de définition de f et montrer que la courbe C admet une branche parabolique de direction la droite Δ : y = x puis étudier la position relative de C par rapport à Δ.

2) a) Monter que f réalise une bijection de D sur un intervalle J que l'on précisera.

b) En déduire que l'équation f(x) = 0 admet, dans D, une solution unique α et vérifier que $0,7 < \alpha < 0,8$.

3) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f.

a) Calculer $(f^{-1})'(1)$.

b) Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite Δ et les courbes C et C' représentatives respectives de f et f^{-1} .

RÉSUMÉ DU COURS

La fonction logarithme népérien (notée ln):

La fonction ln est une fonction strictement croissante et dérivable sur]0, +∞[.
Elle réalise une bijection de]0, +∞[sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in$]0, +∞[on a :
$(\ln)'(x) = \dfrac{1}{x}$; ln 1 = 0 ; ln e = 1; (e ≈2,72).

Pour tout $x \in$]0, +∞[on a :	Pour tous réels strictement positifs a et b on a :
• $(\ln(x) < 0) \Leftrightarrow x \in]0,1[$ • $(\ln(x) > 0) \Leftrightarrow x \in]1,+\infty[$ • $(\ln(x) = 0) \Leftrightarrow x = 1$	• $(\ln a = \ln b) \Leftrightarrow (a = b)$ • $(\ln a > \ln b) \Leftrightarrow (a > b)$

Propriétés :

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

• $\ln xy = \ln x + \ln y$; $\ln \dfrac{x}{y} = \ln x - \ln y$; $\ln \dfrac{1}{x} = -\ln x$

• $\ln x^r = r.\ln x$, $(r \in \mathbb{Q})$. En particulier, pour $r = \dfrac{1}{2}$, on a : $\ln \sqrt{x} = \dfrac{1}{2} \ln x$

Limites usuelles :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \; ; \; \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \; ; \; \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \; ; \; \lim_{x \to 0^+} x.\ln x = 0 \; ; \; \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

Pour x « voisin de 0 » on a : x est une approximation affine de ln (1+x).

$$\forall r \in \mathbb{Q}_+^*, \quad \lim_{x \to 0^+} x^r.\ln x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$$

Résolution d'équations et d'inéquations :

$$[\ln(u(x)) = \ln(v(x))] \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) > 0 \\ v(x) > 0 \\ u(x) = v(x) \end{cases} \quad ; \quad [\ln(u(x)) \geq \ln(v(x))] \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) > 0 \\ v(x) > 0 \\ u(x) \geq v(x) \end{cases}$$

Fonction logarithme décimale :

C'est la fonction, notée log , définie sur]0, +∞[par $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10} \approx 0{,}43 \ln x$.

Dérivée d'une fonction du type $x \mapsto \ln(u(x))$:

Si u est une fonction dérivable sur une partie D de $\mathbb{R}$ et telle que $\forall x \in D,\ u(x) \neq 0$

alors la fonction f définie sur D par $f(x)=\ln|u(x)|$ est dérivable sur D et on a :

$\forall x \in D, \quad f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Primitive d'une fonction du type $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ **:**

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et telle que $\forall x \in I,\ u(x) \neq 0$, alors les primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sont les fonctions définies sur I par $F(x)=\ln|u(x)|+k$ où $k \in \mathbb{R}$.

Primitive de la fonction : $x \mapsto \ln(x)$

Une primitive de la fonction : $x \mapsto \ln(x)$ sur $]\,0\,,+\infty\,[$ est du type :

$x \mapsto x\ln(x)-x+k$ où k est une constante réelle arbitraire.

AVEC L'ORDINATEUR

Activité

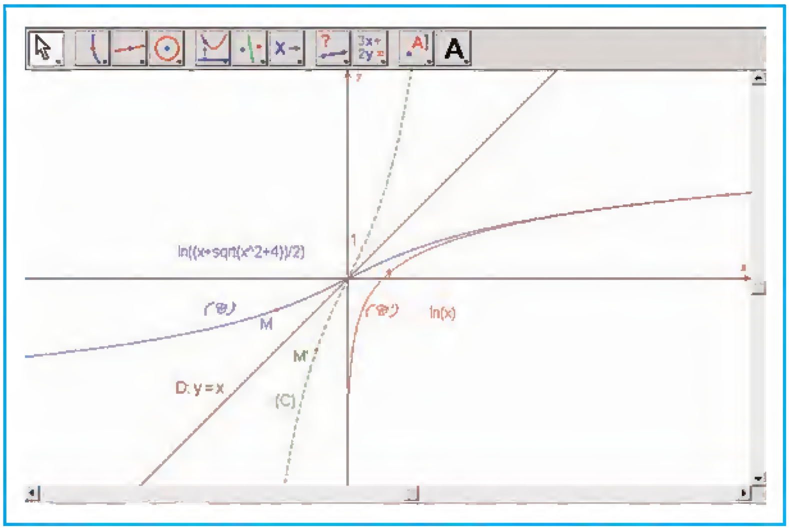
Soit $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$ et g(x)= ln(x). On désigne par ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}$') les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

On se propose d'étudier la position relative des courbes ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}$').

I - Avec le logiciel Cabri II plus,

(Ressource sur Internet : http://www.cabri.com/v2/pages/fr/index.php)

- Ecrire les expressions ln ((x+ sqrt(x^2+4)) / 2) et ln(x).
- Montrer les axes du repère.
- Appliquer chacune des expressions précédentes sur l'un des axes du repère pour obtenir les courbes ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}$').
- Conjecturer sur la position relative des courbes ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}$').
- Conjecturer, l'ensemble de définition de f , le sens de variation de f et le(s) élément(s) de symétrie de ($\mathscr{C}$).
- En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
- Construire, avec une autre couleur la courbe (C) représentative de f^{-1}.



II - 1) a- Calculer, pour x réel, l'expression $\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(x-\sqrt{x^2+4}\right)$

b- En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x+\sqrt{x^2+4}>0$ et que $D_f=\mathbb{R}$. Montrer que f est impaire.

2) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3) En déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

4) Montrer que $\forall x \in \left]0,+\infty\right[$, $f(x)-g(x)>0$.

5) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\ln(x))=0$ et préciser la position relative de ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}$').

EXERCICES ET PROBLÈMES

1 Soient les fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x \ln x$ et $g(x) = x^2 \ln x$.

1) Calculer $g'(x)$ pour $x > 0$.
2) Vérifier que pour $x > 0$, $g'(x)-x = 2 f(x)$.
3) En déduire une fonction primitive de la fonction f sur $]0, +\infty[$.

2 Déterminer l'ensemble D sur lequel la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$ pour $x \in D$.

1) $f(x) = \ln(2x+1)$; 2) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

3) $f(x) = \sqrt{\ln(x+1)}$; 4) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

5) $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$; 6) $f(x) = \ln\left|x^2 + x - 2\right|$

7) $f(x) = \ln\left|\cos x\right|$; 8) $f(x) = \ln^2(2x+1)$

9) $f(x) = \ln(\ln x)$; 10) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)$

11) $f(x) = \dfrac{x + \ln x}{x}$; 12) $f(x) = x\ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|$.

3 Dans chacun des cas suivants donner une fonction primitive F de f sur l'intervalle I :

a) $f(x) = \dfrac{1}{4x-3}$; $I = \left]\dfrac{3}{4}, +\infty\right[$;

b) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x}$; $I =]0, +\infty[$;

c) $f(x) = \dfrac{\ln^2 x}{x}$; $I =]0, +\infty[$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x + 1)}$; $I =]e^{-1}, +\infty[$;

e) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln^2 x}$; $I =]1, +\infty[$;

f) $f(x) = \dfrac{2x+1}{2x^2+2x+1}$; $I =]-\infty, +\infty[$;

g) $f(x) = \dfrac{2x+4}{x-1}$; $I =]1, +\infty[$.

4 1) On donne la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par $g(x) = \dfrac{x^2+4x+7}{x+2}$.

a) Déterminer les réels a, b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R} - \{-2\}$, $g(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+2}$

b) En déduire la fonction primitive G de g sur $]-2, +\infty[$ qui s'annule en (-1).

2) Déterminer la primitive F de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{(x+1)^2}$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$ telle que $F(0) = 0$ (indication : écrire, tout d'abord, f(x) sous la forme $\dfrac{\alpha}{(x+1)^2} + \dfrac{\beta}{x+1}$ où α et β sont deux réels).

5 Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

a) $\ln(2x-1) = 0$; b) $\ln(2x+1) - 1 = 0$;

c) $\ln(x+1) - \ln(2-x) + \ln 2 = \ln 7 - \ln(4-x)$

d) $\ln^2 x - 3\ln x - 4 = 0$; e) $\ln\left|2x+1\right| = 2\ln 2$

f) $\dfrac{1}{2}\ln\left|x+1\right| = \ln\left|x+2\right|$

g) $\ln\left|x+3\right| + \ln\left|x+5\right| = \ln 15$

6 Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations et inéquations suivantes :

$\ln^2 x - \ln\dfrac{1}{x} - 2 = 0$; $1 + \ln x = \dfrac{6}{\ln x}$;

$\ln x - 2\ln(x-4) + \ln 2 = 0$; $\ln\left|x+1\right| < 1$;

$\ln\left|x\right| < -\ln\left|3x+2\right|$; $2\ln x \geq 1$;

$\ln(2-x) + \ln 2 < \ln(x+1)$;

$\ln\left(x^2 - 4e^2\right) < 1 + \ln(3x)$.

7 Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-\ln x\right)$; $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\sqrt{x}\ln x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^3}{\ln x}$; $\lim\limits_{x\to0^+}\left(x-\ln x\right)$; $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+2)}{x+3}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}2\ln^3 x-\ln^2 x+3\ln x-4$; $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(x+1)}{x\ln x}$;

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(x+1)}{4x}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{x}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{2}{3}}\ln x$; $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{3}{2}}\ln x$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\sqrt[3]{x}}{x}$; $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\ln(\frac{x}{2})}{x-2}$;

$\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2}{x\ln x}$; $\lim\limits_{x\to1}\ln\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right|$.

8 Soient f et g les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - 1 - \ln x$ et

$g(x)=\ln x-\dfrac{x-1}{x}$.

1) Etudier le sens de variation des fonctions f et g.
2) En déduire que

$\forall x\in\left]1,+\infty\right[,\ \dfrac{x-1}{x}<\ln x<x-1$

9 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=2x-x\ln|x| & \text{si } x\neq0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2)a) Montrer que f est impaire.
b) Etudier les variations de f puis tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé du plan.

10 Soit la fonction f définie par $f(x)=\ln\left|x^2-1\right|$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f puis étudier la parité de f.
2) Dresser le tableau de variation de f.
3) Préciser les branches infinies de la courbe représentative C de f et tracer C dans un repère orthonormé du plan.
4) Soit g la fonction définie par :

$$g(x)=x\ln\left(x^2-1\right)+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-2x.$$

Montrer que g est une primitive de f sur $]1, +\infty[$

11 Soit $f(x)=\ln\left|\dfrac{3x-6}{x+2}\right|$. On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Etudier les variations de f sur chaque intervalle sur lequel elle est définie.
2) Montrer que le point Ω (0,ln3) est un centre de symétrie de C.
3) Déterminer l'intersection de C avec les axes du repère.
4) Tracer C.
5) Soit g la restriction de f à l'intervalle]-2. 2[.

a) Montrer que g est une bijection de]-2. 2[sur un intervalle J que l'on précisera.
b) Montrer que la fonction réciproque g^{-1} de g est dérivable en $y_0 = \ln 3$ et calculer $(g^{-1})'(\ln 3)$.

12 1) Soit $g(x) = x\ln^2 x - 1$

a) Etablir le tableau de variation de g sur $]0, +\infty[$.
b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à]2 , 3[.
c) Etudier le signe de g(x) sur $]0, +\infty[$.
2) On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x\ln x + 1}{\ln x} & \text{si } x \neq 1 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) Préciser l'ensemble de définition D de f.
b) Montrer que f est continue à droite en 0.
c) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.
d) Etudier les variations de f sur $]0, +\infty[$.
e) Montrer que $f(\alpha) = \alpha + \sqrt{\alpha}$
f) Montrer que la droite D : y = x est une asymptote à la courbe représentative C de f.
g) Tracer C dans un repère orthonormé du plan. (On prendra $\alpha \simeq 2.5$).

13 Soit la fonction f définie par :
$f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2) Calculer f '(x) et f "(x) lorsqu'ils existent.
3) Etudier les variations de f .
4) Montrer que f réalise une bijection de D sur]0, +∞[.
5) Montrer que la courbe C de f possède un point d'inflexion et déterminer une équation de la tangente à C en ce point.
6) Construire la courbe C dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

14 Soient f et g les fonctions définies sur]0, +∞[par :

$g(x) = 2x\sqrt{x} - 3\ln x + 6$ et $f(x) = \dfrac{3\ln x}{\sqrt{x}} + x - 1$

1) Etudier le sens de variation de g et déduire le signe de g(x).
2) Etudier les limites de f en 0^+ et en +∞.
3) Déterminer le sens de variation de f.
4) Montrer que la droite D : y = x - 1 est une asymptôte à la courbe C de f.
5) Etudier la position relative de D et C.
6) Tracer D et C dans un repère ortho normé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

15 On considère la fonction f définie sur

$[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x\ln x}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2) Soit g la fonction définie sur]0, +∞[par g(x) = x + 1 + ln x.
a) Etudier les variations de g.
b) Etablir que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique β et que $0.27 < \beta < 0.28$.
3) a) Pour x > 0, calculer f '(x).
b) Dresser le tableau de variation de f.
c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \ln x)$ et interpréter le résultat graphiquement
4) Construire dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes C de f et C' de la fonction ln.

16 Combien de fois une cellule s'est-elle divisée en 2 si on en compte 10^6 ?
Indication : Désigner par n le nombre de divisions et vérifier, alors, qu'on a : $2^n = 10^6$ puis déterminer n.

17 Le rôle particulier joué par les ions H_3O^+ en solution aqueuse a permis d'introduire la notion de pH. Par définition :

$$pH = -\log\left[H_3O^+\right] = -\frac{\ln\left[H_3O^+\right]}{\ln 10}$$ Où $\left[H_3O^+\right]$

désigne la concentration (en moles / litre) des ions H_3O^+ dans la solution aqueuse.
1) Calculer le pH correspondant à une concentration $\left[H_3O^+\right] = 2{,}3.10^{-3}$.
2) Quelle est la concentration en ions H_3O^+ d'une solution aqueuse de pH = 9,4 ?

18 Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0.1; 6] par :
$y = f(x) = 70{,}228 + 5{,}104\,x + 9{,}222\ln x$.
On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
(1 cm représente une unité sur l'axe des abscisses et 1 cm représente 10 unités sur l'axe des ordonnées).
Compléter le tableau suivant en arrondissant à l'entier le plus proche :

x	0.1	0.3	0.5	1	2	3	4	5	6
y									

2) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C).
3) Une formule empirique permet d'estimer la taille $y = f(x)$ en cm d'un enfant, de moins de 6 ans, en fonction de son âge x en années.
a) Estimer la taille d'un enfant de deux ans et demi, à 1cm prés.
b) Evaluer l'âge d'un enfant mesurant 1m .

19 Le polonium est un métal radioactif souvent associé au radium dans ses minerais ; élément (Po) de numéro atomique 84. Il se décompose spontanément de la manière suivante :
Tous les 138 jours, sa masse diminue de moitié. Si on a une masse de 10 g au départ, au bout de combien de temps restera-t-il 0,1 g ?
Indication : Désigner par n le nombre de périodes (138 jours) et vérifier alors qu'on a : $(0{,}5)^n = 0{,}01$ puis déterminer n.

20 Etude de la trajectoire d'une balle de golf
1) Soit t le temps (en secondes) écoulé depuis la frappe de la balle par le golfeur et soit h(t) la hauteur (en mètres) de la balle par rapport au sol à l'instant t jusqu'à ce qu'elle retombe. Dans un premier temps, on considère la fonction h définie par : $h(t) = -5t^2 + 20t$; pour $t \geq 0$.
a) A quel instant t, la balle retombera-t-elle sur le sol ?
b) A quel instant t, la balle atteint-t-elle sa hauteur maximale ? Préciser cette hauteur.
2) Si on tient compte de la résistance de l'air et du matériau constituant la balle, on estime que la hauteur de la balle en fonction du temps t est donnée plus précisément par $h(t) = -5t^2 + 11t - 2\ln(t+1)$.
a) Calculer h (0). Interpréter le résultat.
b) Etudier les variations de h.
c) A quel instant la balle atteint-t-elle sa hauteur maximale ? Préciser la valeur approchée au mètre prés de cette hauteur maximale.
d) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de l'instant où la balle retombe sur le sol.

21 On considère les deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par :
$u : x \mapsto \sqrt{x^2+1} + x$
$v : x \mapsto \sqrt{x^2+1} - x$
1) a) Calculer u(x) . v(x), en déduire que u(x) et v(x) sont de même signe.
b) Montrer que pour tout réel x, u(x) et v(x) sont strictement positifs.
indication : vérifier que
$$\forall x \in \mathbb{R}\text{ , on a } \sqrt{x^2+1} \geq |x|$$
2) a) Calculer u'(x).
b) En déduire la fonction primitive F de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$ telle que F(0) = 0.
3) a) Montrer que F est une fonction paire.
b) Etudier le sens de variation de F.
c) construire la courbe représentative C de F dans un repère orthonormé du plan.

d- Donner l'équation de la tangente T à la courbe représentative de F en son point d'abscisse 0.

22 **I**- Soit g la fonction définie sur]0, +∞[par g(x) = x + (x - 2) ln x.

1) a) Montrer que $g'(x) = 2\left(\frac{x-1}{x}\right) + \ln x$.

b) En déduire que :

si $x > 1$ alors $g'(x) > 0$ et

si $0 < x < 1$ alors $g'(x) < 0$

2) a) Etudier les variations de g.

b) En déduire que, pour tout réel x >0 on a $g(x) \geq 1$.

II- Soit f la fonction définie sur]0, +∞[par $f(x) = 1 + x \ln x - (\ln x)^2$.

1) a) Vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ et étudier les variations de f.

b) En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

2) Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité : 2 cm).

a) Ecrire une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

b) Etudier les variations de la fonction h définie sur]0, +∞[par h(x)=x-1-ln x. En déduire le signe de h(x) pour x > 0.

c) Montrer que f(x) - x = (lnx -1).h(x) et en déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à T.

3) Tracer $\mathscr{C}$, T et la courbe $\mathscr{C}'$ représentative de f^{-1}.

(D'après Bac Tunisien 1995)

23 Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = 1 + \ln\left[x(2-x)\right]$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité de longueur est 4 cm.

1) a) Montrer que l'ensemble de définition de f est]0,2[.

b) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que la droite d'équation x = 1 est un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

b) Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec la droite $(O, \vec{i})$. On notera x_0 la plus petite.

3) Soit φ la fonction définie sur]0,2[par φ(x) = f(x) - x.

a) Dresser le tableau de variation de la fonction φ .

b) En déduire que l'équation φ(x) =0 admet exactement deux solutions dont l'une est 1 et l'autre sera notée α . Vérifier que :

$x_0 < \alpha < 0{,}3$ et que $\ln\left[\alpha(2-\alpha)\right] = \alpha - 1$

c) Préciser le signe de φ (x) et en déduire la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite Δ : y = x .

4) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ (on prendra 0,2 comme valeur approchée de x_0).

5) Soit g la restriction de f à l'intervalle I =]0, 1] .

a) Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour x appartenant à J ; (g^{-1} étant la fonction réciproque de g).

(D'après Bac Tunisien 1996)

24 1) Soit g la fonction définie sur]0, +∞[par g(x) = -1 + x + 2 ln x.

a) Etudier le sens de variation de g.

b) Calculer g(1) puis déterminer le signe de g(x) sur]0, +∞[.

c) En déduire que :

si $x > 1$ alors $g(\frac{1}{x}) < 0$ et

si $0 < x < 1$ alors $g(\frac{1}{x}) > 0$

2) On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln x \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

a) Montrer que f est dérivable à droite en zéro.

b) Montrer que pour tout x > 0 on a

$f'(x) = x.g(\frac{1}{x})$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet dans $]0, +\infty[$ exactement une solution α telle que $\frac{7}{4} < \alpha < 2$.

3) a) Vérifier que la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}$ de f au point O a pour équation y = x.

b) Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

c) Tracer Δ et $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ [unité graphique : 2cm]

(D'après Bac Tunisien 2000)

25 Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1 , 1\}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Le graphique ci-dessous représente une partie de la courbe $\mathscr{C}$ et la droite D d'équation y = x. La partie représentée de $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale en O et deux asymptotes d'équations respectives x = -1 et x = 1.

I- Dans cette partie, utiliser le graphique pour répondre aux questions.

1) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f dans [-2, 2]. (On ne cherchera pas à déterminer f(2) ni f(-2)).

c) Donner le nombre de solutions de l'équation f(x) = x dans [-2, 2]. On désigne par α celle qui appartient à]0, 1[.

2) Soit g la restriction de f à [0, 1[.

a) Vérifier que g réalise une bijection de [0, 1[sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Soit $\mathscr{C}'$ la courbe représentative de la fonction réciproque de g. Tracer $\mathscr{C}'$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

II- On suppose qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1 , 1\}$ on a $f(x) = ax + b + \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$.

1) a) Montrer que $f'(x) = a - \frac{2}{x^2 - 1}$.

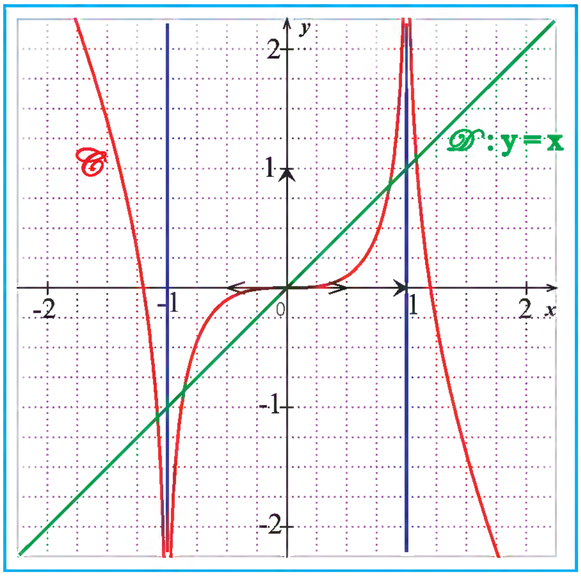
b) Montrer que a = -2 et b = 0.

2) On suppose dans la suite du problème que : $f(x) = -2x + \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$

a) Montrer que f est impaire.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) Montrer que la droite Δ d'équation y = -2x est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ de f.



4) Tracer Δ et compléter le graphique donné pour obtenir la courbe $\mathscr{C}$.

(D'après Bac Tunisien 2004)

APERÇU HISTORIQUE

John Neper ou Napier, baron de Merchiston (1550 - 1617) Mathématicien Ecossais

John Napier (ou Neper), né en 1550 au château de Merchiston prés d'Edimbourg est sans contestation le père des logarithmes qui, désormais, portent le nom de logarithmes népériens.

Après des études très moyennes à l'école de Saint-André, il effectue quelques voyages en Europe et rejoint sa famille en 1571.

Alors qu'il travaillait à simplifier les calculs trigonométriques des astronomes, il fut amené à généraliser les travaux de Nicolas Chuquet et Michael Stifel sur les similitudes entre progressions arithmétiques et géométriques (typ. 1,2,3,…et 10,100,1000…).

Partant de la relation : $2\sin(A)\sin(B) = \cos(A-B) - \cos(A+B)$ dans laquelle le produit de deux fonctions trigonométriques s'exprime comme somme de deux autres fonctions, Neper cherche une suite de nombres telle que le produit de deux de ces nombres puisse s'exprimer à l'aide de leur somme : pour cela, il construit , à l'aide de la cinématique, deux suites de nombres telles que l'une croît dans une progression arithmétique pendant que l'autre décroît dans une progression géométrique.

C'est ainsi que naquit la théorie des logarithmes népériens (1614). Il publia une méthode de calcul des logarithmes et des tables qui connurent un succès immédiat car la demande était forte. Il perfectionna ensuite sa méthode avec le mathématicien anglais **Henry Briggs** en introduisant la notion de logarithmes décimaux, plus utile en pratique. Par la suite Briggs continua l'œuvre de Neper et les tables logarithmes furent ainsi mises au service des mathématiciens.

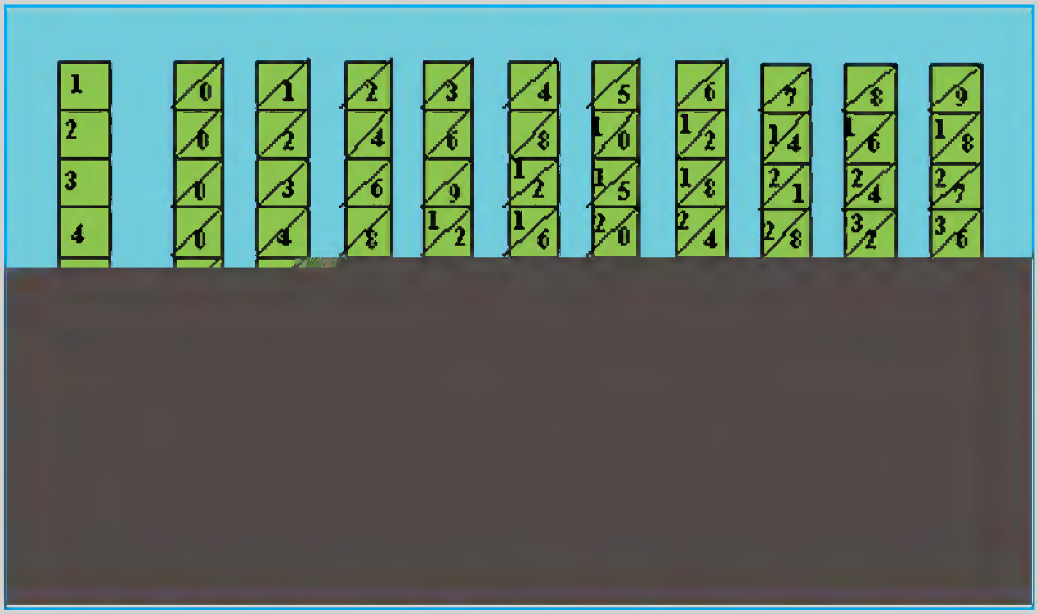
Parallèlement à la découverte de Neper, le suisse **Burgy** invente lui aussi les logarithmes mais ne nous a laissé aucune trace de ses méthodes de calcul.

Neper publie un livre sur l'Apocalypse et acquiert en même temps une certaine réputation de magicien. Il met au point un système de réglettes qui permet d'effectuer les multiplications d'une manière plus simple que d'habitude.

Réglettes de Neper.- Instrument de calcul, inventé par le mathématicien écossais Neper en 1617 et utilisé pour la multiplication et la division. Il est composé de 10 réglettes qui contiennent les neuf premiers multiples des nombres de 0 à 9. Dans chaque petit carré, le chiffre des unités est en bas d'une diagonale et celui des dizaines est en haut.

Une réglette maîtresse placée à gauche et contenant les entiers de 1 à 9 sert à lire le multiplicateur.

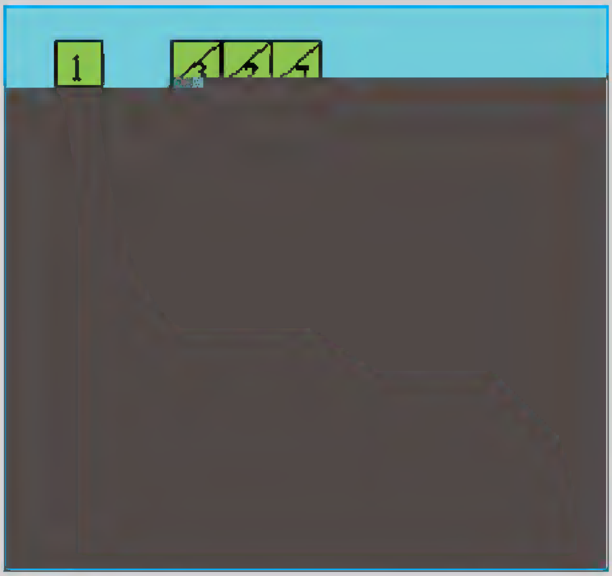
…/ …



La multiplication est ramenée à l'addition, parallèlement à la diagonale des carrés, **comme dans la multiplication arabe**. La division est ramenée à la soustraction.

Par exemple, pour faire la multiplication de 327 et de 546, on prend d'abord les réglettes 3, 2 et 7 ; on lit le résultat des produits par 5, 4 et 6 ; on place les résultats dans le bon ordre comme il est illustré à droite et on additionne en oblique.

2 = 2 on note 2 ; 8 + 4 + 2 = 14 on note 4 et on retient 1 ; 1+ 5 + 2 + 8 + 1 + 8 = 25 on note 5 et on retient 2 ; 2 + 3 + 0 + 2 + 1 = 8 on note 8 ; 1 + 5 + 1 = 7 on note 7 ; 1 = 1 on note 1. Le résultat de la multiplication de 327 par 546 est donc 178 542.



Bâtons de Neper ou tablettes de Neper