Partie 1

Chapitre 4

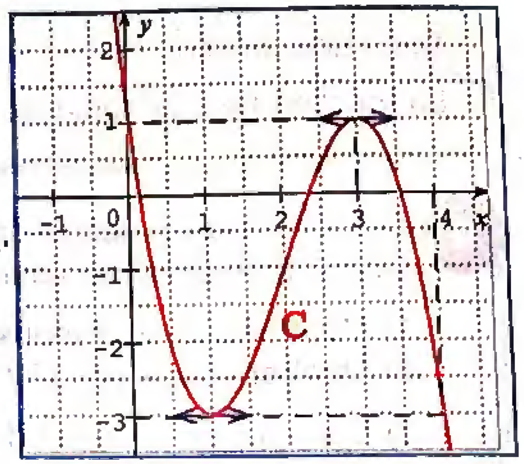
Etude de fonctions

Plan du chapitre

❋	**Activités préliminaires**	
❋	**Cours**	
	❖	Etude d'exemples de fonctions polynômes.
	❖	Etude d'exemples de fonctions rationnelles
	❖	Etude d'exemples de fonctions irrationnelles.
	❖	Etude d'exemples de fonctions trigonométriques.
❋	**Résumé du cours**	
❋	**Avec L'ordinateur**	
❋	**Exercices et Problèmes**	
❋	**Aperçu Historique**	

ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

1 Le plan est muni d'un repère cartésien.
On a représenté ci-contre la courbe C d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.



1) a) Préciser les extrema de f dans [0, 4].
b) Préciser le sens de variation de f sur [0, 4].
c) En déduire le signe de la dérivée f ' sur [0, 4].
d) Résoudre graphiquement, dans [0, 4], l'équation $f(x) = 0$.
2) Sachant que f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$.
a) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois racines dans $\mathbb{R}$.
c) Donner pour chacune des racines un encadrement à 10^{-1} prés.

2 Le plan est muni d'un repère orthogonal $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^2 - 4x + 3}{(x-1)^2}$ et soit C sa courbe représentative dans le repère R.
1) Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2) Etudier la continuité de f sur D.
3) Montrer que la droite $\Delta : x = 1$ est un axe de symétrie de la courbe C.

> Soit f une fonction définie sur D et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit a un réel et Δ la droite d'équation $x = a$.
> La droite Δ est un axe de symétrie de la courbe C si et seulement si pour tout x de D, $(2a - x) \in D$ et $f(2a - x) = f(x)$.

3 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
Soit la fonction $f : x \mapsto \sin(4x)$
1) Montrer que f est une fonction impaire.
2) Préciser le domaine de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$.
3) Calculer les images de 0 ; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$ et π par f.
4) Montrer que la fonction f est périodique de période $\frac{\pi}{2}$.

5) Dresser le tableau de variation de f sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$

et construire sa courbe représentative dans $\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et T un réel **strictement positif**.

La fonction f est périodique de période T si pour tout réel x, f (x + T) = f(x).

4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 2$.
On désigne par C sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) Montrer que pour tout x réel on a : $f(x) = (x - 1)^3 + 2(x - 1) + 1$.
2) Montrer que le point W (1, 1) est un centre de symétrie de C.
3) Donner une équation de C dans le repère $(W, \vec{i}, \vec{j})$
4) Montrer que le point W (1, 1) est un point d'inflexion de la courbe C.
5) Dresser le tableau de variation de f et construire C .

Soit f une fonction définie sur D et C sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Soit W(a,b) un point du plan. Le point W est un centre de symétrie de la courbe C, si et seulement si pour tout x de D, $(2a - x) \in D$ et $f(2a - x) = 2b - f(x)$.

5 1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

a) Etudier la parité de f, en déduire que la droite $(O, \vec{j})$ est un axe de symétrie pour la courbe $\mathcal{C}$.

b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0, +\infty[$ puis construire $\mathcal{C}$.

2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 + x$. On désigne par $\mathcal{C}'$ la courbe représentative de g dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

a) Montrer que g est impaire. En déduire que O est un centre de symétrie pour la courbe $\mathcal{C}'$.

b) Etudier les variations de g sur $[0, +\infty[$ puis construire $\mathcal{C}'$.

6 Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^2+x+1}{x}$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) Déterminer les réels a, b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x}$

En déduire que la courbe C admet au voisinage de l'infini une asymptote oblique que l'on précisera. Quelle est la nature de l'autre asymptôte à C ?

2) Etudier les variations de f et construire sa courbe C.

On dit que la droite $\Delta : y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $-\infty$ (resp. de $+\infty$) lorsqu'on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (ax+b) \right] = 0$

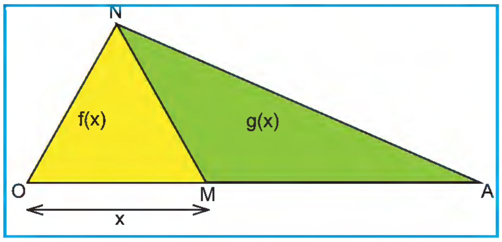
$\left(\text{resp. } \lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (ax+b) \right] = 0 \right)$

COURS

Etude d'exemples de fonctions polynômes

Activité 1

Dans la figure ci-contre, OA = 8, le triangle OMN est équilatéral, M est un point du segment [OA].
On pose OM = x et on désigne par f(x) l'aire du triangle OMN et par g(x) l'aire du triangle AMN.



1) Exprimer f(x) et g(x) en fonction de x.
2) Etudier les fonctions f et g et tracer leurs courbes représentatives dans un même repère orthonormé du plan.
3) Résoudre graphiquement, puis algébriquement, l'équation f(x) = g(x) et l'inéquation f(x) > g(x).

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.
On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Dresser le tableau de variations de f.
   b) Etudier les branches infinies de C.
2) a) Montrer que pour tout réel x on a : $f(x) = (x - 1)^3 - 3(x - 1) + 1$.
   b) En déduire que le point I (1,1) est un centre de symétrie de C.
3) a) Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à C en I.
   b) Montrer que le point I est un point d'inflexion de C.
4) Construire T et C.
5) Déduire la courbe representative C ' de la fonction $g : x \mapsto x^3 - 3x^2$ à partir de celle de f.
6) Construire, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe representative C " de la fonction $h : x \mapsto |x^3 - 3x^2|$

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ et C sa courbe représentative dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On désigne par g et h les fonctions définies sur D par
$g : x \mapsto f(x) + k$
(k réel fixé) et $h : x \mapsto -f(x)$
On a alors, les résultats suivants :
*La courbe représentative de g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est l'image par la translation de vecteur $k\vec{j}$ de la courbe C de f.
**La courbe représentative de h dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est l'image de la courbe C de f par la symétrie axiale d'axe $(O, \vec{i})$.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$.
On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1) a) Montrer que f est une fonction paire.
   b) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}^+$.
   c) Préciser les branches infinies de C.
2) a) Tracer C.
   b) Utiliser le graphique pour déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$, où m est un paramètre réel.
3) Tracer, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et avec une autre couleur la courbe C' représentative de (-f).

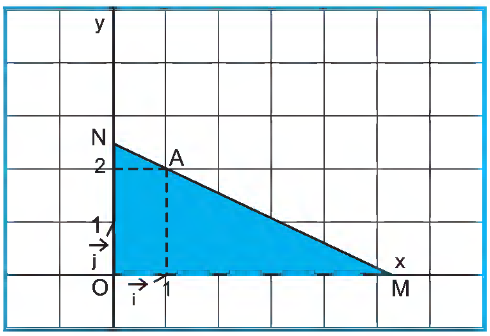
Activité 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 + x + 5$.
1) Montrer f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f '(x).
2) Dresser le tableau de variation de f.
3) Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Etude d'exemples de fonctions rationnelles

Activité 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit A le point de coordonnées (1, 2).
A chaque point M(x, 0) tel que (x >1),
on associe le point N de l'axe (Oy) des ordonnées
de façon que A, M et N soient alignés
(voir figure ci-contre) :



On désigne par S(x) l'aire du triangle OMN.
1) a) Exprimer l'ordonnée de N en fonction de x.
   b) En déduire que $S(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.
2) a) Dresser le tableau de variation de la fonction S sur $]1, +\infty[$.
   b) En déduire x pour que l'aire de OMN soit minimale.
3) a) Déterminer les deux réels a et b tels que pour tout x > 1, $S(x) = ax + b + \dfrac{1}{x-1}$.
   b) En déduire que la droite $\Delta : y = x + 1$ est une asymptote à la courbe représentative (C) de la fonction S au voisinage de $+\infty$.
   c) Tracer Δ et (C) dans le repère .

Activité 2

Soit la fonction $f : x \mapsto 3 + \dfrac{2}{x-1}$ .On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan et par W le point de coordonnées (1, 3).

1) a) Donner une équation de C dans le repère $(W, \vec{i}, \vec{j})$.
   b) En déduire que W est un centre de symétrie de la courbe C.
2) Etudier les variations de f et construire sa courbe C.

Activité 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 1}{3x - 3}$ .On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.

1) a) Déterminer les réels a et b tels que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - ax\right] = b$.
   b) En déduire que la droite D : y = ax + b est une asymptote oblique à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.
2) Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ possède un centre de symétrie que l'on précisera.
3) Dresser le tableau de variation de f.
4) Tracer $\mathcal{C}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
5) Soit g la restriction de f à l'intervalle I = [2 , $+\infty$ [.
   a) Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
   b) Soit g^{-1} la fonction réciproque de g.
   Etudier la continuité, la dérivabilité et le sens de variation de g^{-1} sur J.
   c) Tracer la courbe représentative (C') de g^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Activité 4

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 3x + 3}$ et soit C sa courbe représentative dans repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2) a) Montrer que C admet une asymptote oblique D dont on donnera une équation cartésienne.
   b) Etudier la position de C par rapport à D.
3) Montrer que la courbe C possède un centre de symétrie I que l'on précisera et donner une équation cartésienne de la tangente à C au point I.
4) a) Tracer, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, D, T et C.
   b) Construire la courbe représentative C' de la fonction $|f|$ à partir de celle de f et préciser les éléments remarquables de C '.

Activité 5

Soit la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x^2+4}{x}$ et soit C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Préciser l'ensemble de définition de g et étudier sa parité.
2) Etablir le tableau de variation de g sur $]0, +\infty[$.
3) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[g(x) - x\right]$. En déduire que C_g admet deux asymptotes que l'on précisera.
b) Etudier la position de la courbe C_g par rapport à la droite $\Delta : y = x$.
4) Tracer C_g et ses asymptotes.
5) Soit la fonction $h : x \mapsto \dfrac{x^2+4}{|x|}$. Construire la courbe représentative de h à partir de celle de g.

Activité 6

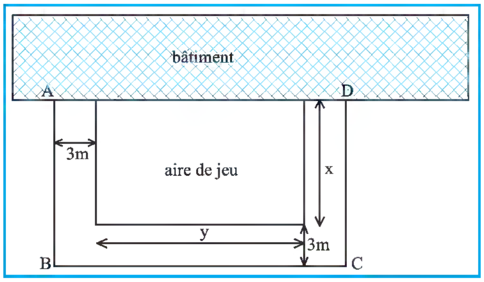
Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x^2-18x+25}{x^2-6x+8}$. On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) Préciser l'ensemble de définition D de f et calculer les limites de f aux bornes de D.
2) Montrer que C_f admet un axe de symétrie que l'on précisera.
3) En déduire que C_f admet trois asymptotes que l'on précisera.
4) Etablir le tableau de variation de f.
5) Tracer C_f.
6) Soit la fonction $g : x \mapsto \dfrac{5x^2-30x+41}{x^2-6x+8}$.

a) Montrer que pour tout x de D, $g(x) = f(x) + k$ où k est une constante réelle que l'on précisera.
b) En déduire que la courbe Cg représentative de g s'obtient de celle de f par une transformation géométrique simple que l'on caractérisera.
c) Tracer C_g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
d) Dresser le tableau de variation de g.
e) Construire, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et avec une autre couleur, la courbe représentative de $|g|$.

Activité 7

On veut construire le long d'un bâtiment une aire de jeu rectangulaire de 450 m².
De plus, on souhaite que les dimensions de ce rectangle soient supérieures ou égales à 10 m.
Cet espace de jeu est entouré sur trois côtés d'une allée de 3 m de large comme l'indique le croquis ci-contre :



L'ensemble est clôturé sur les trois côtés [AB], [BC] et [CD]. On s'intéresse à la longueur L de la clôture.
On note x et y les dimensions, en mètres, de l'aire du jeu.

1) a) Démontrer que $y = \dfrac{450}{x}$, puis justifier que $x \in [10,45]$.

b) Exprimer L à l'aide de x.

2) Soit f la fonction définie sur $[10,45]$ par $f(x) = 2x + 12 + \dfrac{450}{x}$

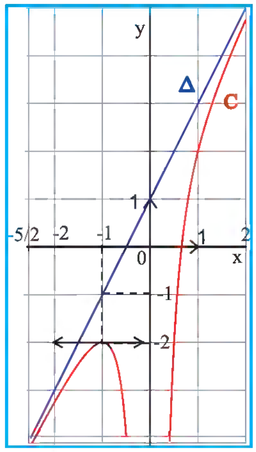
a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

c) Déduire de l'étude précédente les dimensions à donner à l'aire de jeu pour que la longueur de la clôture soit la plus petite possible. Quelle est alors cette longueur ?.

Activité 8

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On a représenté ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur]-2,5;2] .



1) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) En déduire le signe de la dérivée f ' sur]-2,5;2] .

c) Préciser le(s) extremum(s) relatif(s) éventuels de f sur]-2,5;2] .

2) Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel k, le nombre des solution(s) de l'équation f(x) = k dans]-2,5;2] .

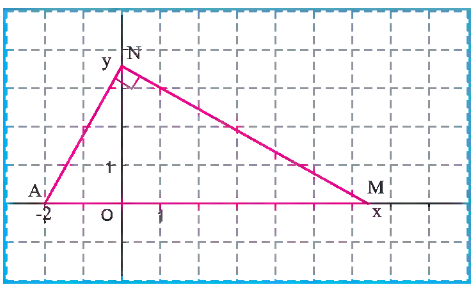
3) Préciser le signe de l'expression [f(x) - (2x + 1)] pour x ∈]-2,5;2].

4) Sachant que pour tout x ∈]-2,5;2] on a $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x^2}$, déterminer les réels a, b et c.

Etude d'exemples de fonctions irrationnelles

Activité 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit A le point de coordonnées (-2, 0).
A chaque point M(x, 0) de l'axe des abscisses, on associe le point N(0, y) de l'axe des ordonnées de façon que le triangle AMN soit rectangle en N ;
(voir figure ci-contre) :



1) Exprimer y en fonction de x.

2) On pose y = f(x).
Etudier et représenter graphiquement la fonction f ainsi obtenue.

Activité 2

Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x - 4}$
On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
1) Préciser l'ensemble de définition D de f et calculer les limites de f aux bornes de D.
2) Montrer que la droite $\Delta : x = -\frac{3}{2}$ est un axe de symétrie de C.
3) Dresser le tableau de variation de f.
4) a) Montrer que $\forall x \in \left]0,+\infty\right[$ on a $f(x) = x\sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}}$.

b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

c) Montrer que $\forall x \in \left]0,+\infty\right[$ on a $f(x) - x = \dfrac{3 - \frac{4}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}} + 1}$

d) Montrer que la droite $D : y = x + \frac{3}{2}$ est une asymptote oblique à C.

e) Montrer que C admet une autre asymptote oblique D'.

5) Tracer C et les droites Δ , D et D'.

Activité 3

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 16}$
1) Montrer que la droite D : y = x + 1 est asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$.
2) Etudier le comportement asymptotique de f au voisinage de $(-\infty)$.
3) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
4) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
5) Calculer $f^{-1}(x)$ pour x élément de J.
6) Tracer les courbes représentatives de f et f^{-1} dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Activité 4

Soit $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}}$

1) Déterminer l'ensemble de définition D de f et déterminer les limites de f aux bornes de D.
2) Etudier les variations de f.
3) Tracer la courbe représentative C de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Etude d'exemples de fonctions trigonométriques

Activité 1

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$

1) Etudier et construire, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative (C) de f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.
2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0, \pi]$.
   a) Montrer que g est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$ et déterminer
   $g^{-1}(0)$; $g^{-1}(1)$; $g^{-1}(\frac{1}{2})$ et $g^{-1}(-\frac{1}{2})$
   b) Construire la courbe représentative (C ') de g^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

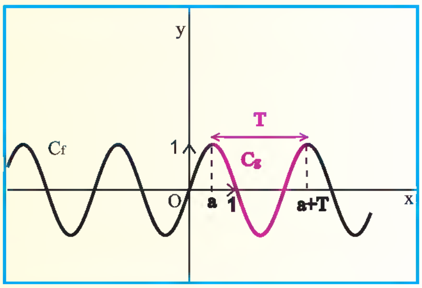
Activité 2

Soit la fonction $f : x \mapsto 2\sin x - \sin 2x$

1) a) Montrer que $f'(x) = 4(1-\cos x)(\cos x + \frac{1}{2})$
   b) En déduire le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.
2) a) Montrer que f est 2π périodique.
   b) Etudier la parité de f. En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $[0, \pi]$ et préciser les transformations géométriques qui permettent de tracer la courbe représentative de f sur $[-\pi, 3\pi]$.
3) Tracer, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-\pi, 3\pi]$.

Théorème

Si f est une fonction périodique de période T et g est sa restriction à un intervalle [a, a+T] où a est un réel, alors sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ se déduit de la courbe représentative de g par des translations de vecteurs $(kT\vec{i})$; $k \in \mathbb{Z}$
Il suffit donc d'étudier f sur [a, a+T].



Activité 3

Soit la fonction f définie par $f(x) = \text{tg}x$.

1) a) Préciser l'ensemble de définition et la période de f .
   b) Montrer que f est impaire.

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

a) Etudier les variations de g et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

b) Montrer que g admet une fonction réciproque dont on précisera l'ensemble de définition et l'ensemble sur lequel elle est dérivabilité.

3) a) Calculer $g^{-1}(0)$; $g^{-1}(1)$; $g^{-1}(\sqrt{3})$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g^{-1}(x)$

b) Tracer la courbe représentative de g^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

4) Construire,dans le repère$(O, \vec{i}, \vec{j})$la courbe représentative de f sur l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Activité 4

On considère la fonction f définie par $f(x) = \text{tg}x + \sin(2x)$.

1)a) Déterminer l'ensemble de définition D de f

b) Montrer que f est π périodique.

c) Etudier la parité de f.

d) En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

2) Etudier f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ puis tracer, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sa courbe représentative sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Activité 5

Soit $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

1) a) Déterminer l'ensemble de définition D de f .

b) Montrer que $\forall x \in D$,$(x+\pi) \in D$ et $f(x+\pi) = f(x)$ .Interpréter ce résultat.

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$. Etudier les variations de g et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé du plan.

Activité 6

Soit $f(x) = \dfrac{1}{\cos(\frac{\pi}{4}x)}$

1) Déterminer l'ensemble de définition et la période de f.

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle [0, 2[.

a) Etudier le sens de variation de g .

b) En déduire que g réalise une bijection de [0, 2[sur un intervalle J que l'on précisera.

c) Tracer, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, les courbes représentatives de g et g^{-1}.

RÉSUMÉ DU COURS

Plan d'étude d'une fonction numérique :

Pour étudier une fonction numérique f et tracer convenablement sa courbe représentative C, il importe d'étudier les propriétés de f telles que **parité, variation, branches infinies,** etc.,. On disposera, également, de moyens tels que : **changement de repère, utilisation de transformations planes ou une transformation d'écriture conduisant à un changement de repère** et permettant d'alléger le procédé de construction de la courbe C.

Plan d'étude : En général, on adopte la démarche suivante (lorsque l'énoncé de l'exercice ne suggère aucun autre plan d'étude) :

1ère étape : Détermination de l'ensemble D sur lequel la fonction f est définie.

2ème étape : Réduction de domaine d'étude :

- si f est paire ou impaire le domaine d'étude de f est $D_e = D \cap \mathbb{R}_+$.
- si f est périodique de période T, il suffit d'étudier f sur un domaine du type $D_e = D \cap [a, a+T]$

3ème étape : Calcul des limites de f aux bornes de son ensemble de définition (ou d'étude).

4ème étape : Etude du sens de variation de f et consignation des résultats dans un tableau de variations.

5ème étape : Etude du comportement asymptotique de la courbe C.

6ème étape : Construction de quelques points de la courbe C ainsi que les asymptotes éventuelles ou les éléments de symétrie de C et les tangentes aux points particuliers etc.

7ème étape : Construction de C dans un repère convenablement choisi.

* Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[\alpha, +\infty[$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ ($a \in \mathbb{R}^*$) et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = b$ ($b \in \mathbb{R}$)
alors la droite D : y = ax + b est une asymptote oblique à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$. (Si b = $+\infty$ ou $-\infty$ la courbe possède une branche parabolique de direction la droite D : y = ax au voisinage de $+\infty$).

Le résultat est vrai pour une fonction f définie sur un intervalle du type $]-\infty, \alpha]$ et x tendant vers $-\infty$.

* Soit f une fonction définie sur D et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit a un réel et Δ la droite d'équation x = a.

La droite Δ est un axe de symétrie de la courbe C si et seulement si pour tout x de D, $(2a - x) \in D$ et $f(2a - x) = f(x)$.

* Soit f une fonction définie sur D et C sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Soit W(a,b) un point du plan. Le point W est un centre de symétrie de la courbe C, si et seulement si pour tout x de D, $(2a - x) \in D$ et $f(2a - x) = 2b - f(x)$.

AVEC L'ORDINATEUR

Activité 1

1) Utiliser un logiciel pour :
 - tracer un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ et placer le point A(0, 4) dans ce repère.
 - tracer le cercle (C) de diamètre [OA] et marquer un point N sur (C) distinct de 0.
 - tracer la tangente à (C) en A. Cette tangente coupe la droite (ON) en un point P.
 - marquer le point M intersection de la parallèle à (AP) passant par N et de la perpendiculaire à (AP) en P.
 - conjecturer l'ensemble des points M , lorsque N varie sur le cercle (C).

2) On désigne par (x,y) les coordonnées du point M.

a) Montrer que $y = \dfrac{64}{x^2+16}$.

b) Etudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{64}{x^2+16}$ et représenter graphiquement l'ensemble des points M.

Activité 2

1) Utiliser un logiciel de géométrie pour :
- construire un triangle ABC isocèle de sommet principal A, inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 1.
- placer H le pied de la hauteur issue de A.
- marquer α l'angle $H\hat{O}C$ (prendre $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$).
- calculer l'aire du triangle ABC.
- faire varier α (en déplaçant par exemple le point C sur le cercle) pour obtenir un tri angle ABC ayant la plus grande aire possible S.
- donner une valeur approchée de S et la valeur de α correspondante.

2) a) Calculer BC et AH en fonction de α .
 b) En déduire l'aire du triangle ABC en fonction de α .

3) a) Utiliser le repère orthonormé du logiciel pour représenter graphiquement

la fonction $f : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \sin x(1+\cos x)$.

b) Lire sur le graphique une valeur approchée de x pour laquelle f(x) est maximal.

4) a) Montrer que f'(x) = (2cosx - 1)(cosx + 1), x un réel de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) Dresser le tableau de variation de f sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

c) Déterminer la valeur de α pour laquelle l'aire du triangle ABC est maximale.

d) Préciser ce maximum et la nature du triangle ABC.

EXERCICES ET PROBLÈMES

1 On considère les fonctions f et g définies par :

$f(x) = x^2 - x + 1$ et $g(x) = -x^2 - 2x + 2$

On désigne par C_f et C_g leurs représentations graphiques respectives dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Etudier les variations de chacune des fonctions f et g.

2) a) Etudier la position relative de C_f et C_g.

b) Construire les courbe C_f et C_g.

2 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Dresser le tableau de variations de f.

b) Déterminer les abscisses des points d'intersection de C avec l'axe de abscisses $(O, \vec{i})$.

c) Etudier les branches infinies de C.

d) Tracer C.

3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$

a) Etudier les variations de f .

b) Préciser les branches infinies de C_f.

c) Construire C_f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

4 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 6x$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Etudier la parité de f, en déduire que O est un centre de symétrie pour C_f.

2) Etudier f et dresser son tableau de variations.

3) a) Déterminer les cordonnées des points d'intersection de C_f et de l'axe des abscisses.

b) Préciser les branches infinies de C_f.

4) a) Déterminer une équation de la tangente T à C_f en O.

b) Etudier la position de C_f par rapport à T.

c) Tracer T et C_f.

5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

1) Dresser le tableau de variations de f.

2) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions et donner un encadrement à l'unité prés pour chacune de ces solutions.

3) a) Préciser les branches infinies de C_f.

b) Construire C_f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) Montrer que $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x^2-4x) - 1$

2) Montrer que le point W(2 ; -1) est un centre de symétrie pour C_f.

3) a) Déterminer l'équation Y = F(X) de C_f dans le repère $(W, \vec{i}, \vec{j})$.

b) Etudier la fonction F.

c) Construire C_f.

7 Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 4x + 3}$$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Préciser le domaine de définition D_f de f et calculer les limites de f aux bornes de D_f.
2) En déduire que C_f admet trois asymptotes que l'on précisera.
3) Etablir le tableau de variation de f.
4) Tracer C_f.
5) Montrer que C_f admet un axe de symétrie que l'on précisera.

6) Soit la fonction $g : x \mapsto \dfrac{4x^2-9x+9}{x^2-4x+3}$.

a) Montrer que g(x) = f(x) + k où k est une constante réelle que l'on précisera.
b) En déduire que la courbe C_g représentative de g s'obtient de celle de f par une transformation géométrique simple que l'on précisera.
c) Tracer C_g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
d) Utiliser C_g pour dresser le tableau de variation de g

8 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^2}{|x+1|-|x-1|}.$$

1) a) Déterminer l'ensemble de définition D de f .
b) Montrer que f est impaire.
2) Déterminer un prolongement par continuité de f en 0. On notera g ce prolongement .
3)a) Etudier la dérivabilité de g en 0 .
b) Dresser le tableau de variations de g.
4) a) Préciser les branches infinies de la courbe représentative C de g.
b) Tracer C dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

9 Soit f la fonction définie par

$$f : x \mapsto \frac{x^2+2x-1}{x+1}$$

et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) a) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$
b) En déduire les équations des asymptotes à C_f.
2) Etudier les variations de f et tracer C_f.

10 On considère la fonction f définie par

$$f : x \mapsto \frac{x^4-1}{x^2}$$

1) a) Préciser l'ensemble de définition de f.
b) Dresser le tableau de variations de f.
2) a) Préciser les branches infinies de la courbe représentative C de f.
b) Tracer la parabole P : $y = x^2$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
c) Calculer $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \left[f(x) - x^2\right]$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
d) Tracer C dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

11 Soit f la fonction définie sur IR par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x + \dfrac{2}{3} & \text{si } x \in \left]-\infty, 2\right[\\ f(x) = \dfrac{x^2}{x+1} & \text{si } x \in \left[2, +\infty\right[\end{cases}$$

Et soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
1) a) Préciser le domaine de définition de f et étudier la continuité de f en 2.
b) Etudier la dérivabilité à gauche et à droite de f en 2. La fonction f est-elle dérivable en 2 ?
Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2) a) Déterminer les réels a, b et c tels que :

$$\forall x \in \left[2, +\infty\right[, \ f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

b) En déduire que C_f admet une asymptote oblique D au voisinage de $+\infty$ et étudier la position relative de C_f et D.
c) Préciser la branche infinie de C_f au voisinage de puis tracer C_f et D.

12 Soit f la fonction définie par

$$f : x \mapsto \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$$

et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) Préciser l'ensemble de définition D de f et calculer les limites de f aux bornes de D.

2) a) Déterminer les réels a, b et c tels que

$$f(x) = ax + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

b) En déduire les équations des asymptotes à C_f.

2) Dresser le tableau de variation de f .

3) Tracer C_f.

4) Discuter, graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de points d'intersection de C_f et la droite D : y = x + m.

13 Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Déterminer D_f et étudier la continuité de f sur D_f.

b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en (-1) et à droite en 3.Interpréter graphiquement les résultats.

c) Déterminer $\lim\limits_{-\infty} f$ et $\lim\limits_{+\infty} f$.

2) a) Montrer que :

$$\forall x \in D_f - \{-1;3\}, \text{ on a } f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$$

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Vérifier que :

$$\forall x \in D_f ; f(x) = \sqrt{(x-1)^2 - 4}$$

b) Montrer que : $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) + x - 1] = 0$

et que $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x + 1] = 0$.

c) En déduire que la courbe C admet deux asymptotes obliques D et D'.

4) Tracer D, D' et C.

14 On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{(x-2)^2 - 1}$$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D de f

2) a) Montrer que D : x = 2 est un axe de symétrie pour C.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que la droite Δ_1 d'équation y = x - 2 est une asymptote à C au voisinage de +∞ et que la droite Δ_2 d'équation y = -x -2 en est une asymptote à C au voisinage de -∞.

3) Tracer D, Δ_1, Δ_2 et C.

15 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = 1 - \sqrt{x^2 + x}$$

et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1)a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Montrer que la droite $D : x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe C.

c) En déduire qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle [0, +∞[.

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Déterminer f'(x) pour tout x ∈]0, +∞[.

c) Dresser le tableau de variation de f sur]0, +∞[.

3) Montrer que la droite $D : y = -x + \frac{1}{2}$ est asymptote à C en +∞ .

b) Etudier la position de C par rapport à D.

c) Déterminer l'équation de l'asymptote D' à C au voisinage de -∞ .

4) Tracer D, D' et C_f.

5) Déduire de C_f la courbe représentative C_g de la fonction $g(x) = 1 - \sqrt{x^2 + |x|}$ et construire C_g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

16 A chaque entier naturel n on considère la fonction f_n définie par

$f_n(x) = x^n\sqrt{x-1}$

1) Déterminer le domaine de définition de f_n.
2) Donner, pour $n \geq 1$, le tableau de variation de la fonction f_n.
3) Représenter dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan les fonctions f_0, f_1 et f_2.

17 Soit f la fonction définie sur IR par :

$f(x) = \sin(2x + \frac{2\pi}{3})$

1) Montrer que f est périodique et préciser une période de f.
2) a) Calculer f '(x) et résoudre dans l' intervalle $[0, \pi]$ l' équation f '(x)= 0 .
b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.
3) Représenter la restriction de f à l'intervalle $[0, 2\pi]$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
4) Utiliser la courbe obtenue, pour donner selon la valeur du paramètre réel k, le nombre de solutions de l'équation f(x) = k dans $[0, 2\pi]$.

18 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = sin(2x) - 2sin x.
1) Etudier la parité de f.
2) Quelle est la période de f ?
3) Compléter l'étude de f et représenter la restriction de f à l'intervalle $[-\pi, \pi]$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

19 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x + \cos^2 x$.
1) Montrer que f est 2π -périodique.
2) Montrer que la droite $\Delta : x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
3) Etudier et représenter graphiquement la restriction g de f à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
4) Tracer la courbe de la restriction de f à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

20 Soit la fonction

$g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) = \operatorname{tg}x - x$

1) Etudier les variations de g et déduire le signe de g(x) pour x appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = x\sin(\frac{\pi}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.
3) Soit h la restriction de f à $]2, +\infty[$.
a) Etudier le sens de variation de h.
b) Tracer la courbe représentative de h dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
c) Montrer que h est une bijection de $]2, +\infty[$ sur un intervalle J.

21 Soit la fonction

$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \sqrt{\operatorname{tg}x}$

1) Etudier f et tracer sa courbe représentative C_f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
2) Montrer que f est une bijection.
3) On pose $g = f^{-1}$.
a) Etudier la dérivabilité de g et déterminer sa fonction dérivée.
b) Calculer g(0) et g(1) et tracer C_g avec C_f.
c) Montrer que :

$\forall \in \left]0, +\infty\right[, \; g(x) + g(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$

4) Soit $h : \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\to \mathbb{R}, \; h(x) = g(\frac{1}{\cos(\pi x)})$

a) Montrer que h est dérivable et donner son tableau de variation.
b) Montrer que h est prolongeable par continuité sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

22 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = $-2\cos^2 x + 2\cos x + 1$.
1) a) Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2\sin x(2\cos x - 1)$$
b) Résoudre, dans $[0, \pi]$, l'équation : $2\sin x(2\cos x - 1) = 0$
c) Dresser le tableau de variation de la restriction de f à l'intervalle $[0, \pi]$.
d) Tracer, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la restriction de f à l'intervalle $[0, \pi]$.
2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.
a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on précisera.
b) Déterminer le domaine D de dérivabilité de g^{-1}.
c) Soit $t \in J$, calculer $\left(\cos(g^{-1}(t))\right)$ et $\left(\sin(g^{-1}(t))\right)$ en fonction de t, en déduire $\left(g^{-1}\right)'(t)$ pour $t \in D$

23 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{1-x^2}{2+x}$
1) a) Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-2\},\ f(x) = -x + 2 - \frac{3}{x+2}$$
b) Calculer f '(x) et f ''(x).
c) En déduire que f ' est strictement décroissante et déterminer l'image de [-1, 1] par f '.
d) Dresser le tableau de variation de f
e) Montrer que $\forall x \in [0, 1],\ |f'(x)| \le \frac{2}{3}$.
f) En déduire que .
$$\forall x, y \in [0, 1],\ |f(x) - f(y)| \le \frac{2}{3}|x - y|$$
2) Tracer la courbe représentative C de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(t) = \frac{1-\sin^2 t}{2+\sin t}$$
a) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(\pi - t) = g(t)$
b) Expliquer comment l'étude et la représentation graphique de la restriction de g à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ permet de construire la courbe représentative de g.
c) Prouver que g'(t) = f'(sin t) x cos t .
d) Montrer que l'équation g'(t) = 0 admet une solution unique $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
e) Calculer la valeur exacte de $g(\alpha)$.
f) Construire la courbe de la restriction de g à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans un repère orthonormé convenablement choisi.
4) a) Résoudre graphiquement l'équation g(t) = t.
b) Montrer que l'équation g(t) - t = 0 admet une solution unique t_0 appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
5) Soit la suite réelle (u_n) définie sur N par
$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1-\sin^2(u_n)}{2+\sin(u_n)}$$
a) Montrer que $|u_{n+1} - t_0| \le \frac{2}{3}|u_n - t_0|$.
b) Montrer par récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - t_0| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - t_0|$$
c) En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

24 Etudier et représenter graphiquement chacune des fonctions suivantes dans un repère du plan:
$f(x) = \sin^2 x - \sin x$ et $g(x) = \cos(3x)\cos^2 x$.

25 1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

a) Vérifier que pour tout réel x on a :

$$g'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

b) Etudier les variations de g et en déduire que pour tout réel x : $g(x) > 0$.
2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2+1}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
a- Vérifier que pour tout réel x on a : $f'(x) = g(x)$.
b- Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.
Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
c- Dresser le tableau de variation de f.
3) a- Montrer que la droite $\Delta : y = 2x - 1$ est une asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.
b- Ecrire une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ en O et étudier la position de T par rapport à $\mathcal{C}$.
c- Tracer $\mathcal{C}$,T et Δ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (on placera les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses -1 et 1).
4) a- Vérifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
b- Calculer $(f^{-1})'(\sqrt{2})$ [f^{-1} étant la fonction réciproque de f].
c- Tracer $\mathcal{C}'$ la courbe représentative de f^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(D'après Bac tunisien 2004)

APERÇU HISTORIQUE

René Descartes
Français (1596 ; 1650)

Je pense…donc… je suis !

Statue de Descartes à Descartes (La Haye)

Mathématicien et philosophe français, il est le fondateur du rationalisme moderne. Son œuvre “ Le discours de la méthode “ se compose d'essais “ pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences “.
En optique, Descartes découvrit la loi de la réfraction de la lumière.
En mathématiques, il instaura la géométrie analytique et permit ainsi l'étude des courbes en les définissant par leurs équations relativement à un repère.
Il contribue ainsi à la naissance de la théorie des équations.
La démarche scientifique est le fondement de son œuvre
(Expérimentation, conjecture, doute, recherche d'une certitude …).