Partie 1

Chapitre 2

Dérivabilité

Plan du chapitre

ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

1 1) Déterminer, chaque fois, le nombre dérivé de f en x_0 en utilisant la définition :

a) $f(x) = x^3$, $x_0 = 2$

b) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $x_0 = 1$

c) $f(x) = \dfrac{2}{x}$, $x_0 = (-1)$

d) $f(x) = 5$, $x_0 = 3$

2) Donner, pour chaque résultat trouvé, l'approximation affine de f en x_0.

2 Soit la fonction

$g : x \mapsto \sqrt{x}$ pour $x \in [0,+\infty[$.

a) Déterminer le nombre dérivé de g en $x_0 = 1$.

b) Donner une approximation affine du réel $\sqrt{1,0001}$.

c) En déduire une valeur approchée du réel $\sqrt{10001}$.

3 Le plan est muni d'un repère $(o,\vec{i},\vec{j})$.
Soit la fonction $f : x \mapsto x^2 + 1$

a) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe représentative C_f en son point d'abscisse 1.

b) Tracer (C_f) et la tangente (T).

Nombre dérivé :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit x_0 un réel de I.
On dit que f est dérivable en x_0, s'il existe un nombre réel ℓ tel que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \quad \text{ou encore}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \ell$$

Le réel ℓ , est alors appelé le nombre dérivé de f en x_0 et il est noté $f'(x_0)$.

Approximation affine :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit x_0 un élément de I.

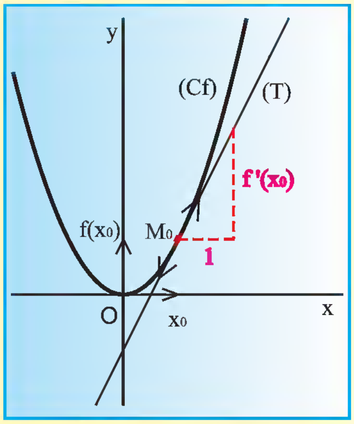
* Si f est dérivable en x_0 alors sa courbe représentative admet au point $A(x_0, f(x_0))$ une tangente (T) dont une équation cartésienne est $y = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$..

* En posant $x = x_0 + h$, on a pour h voisin de zéro, le réel $f(x_0) + hf'(x_0)$ est une valeur approchée de $f(x_0+h)$.
On dit que le réel $f(x_0) + hf'(x_0)$ est une approximation affine de $f(x_0+h)$. On écrit :
$f(x_0 + h) \simeq f(x_0) + hf'(x_0)$.

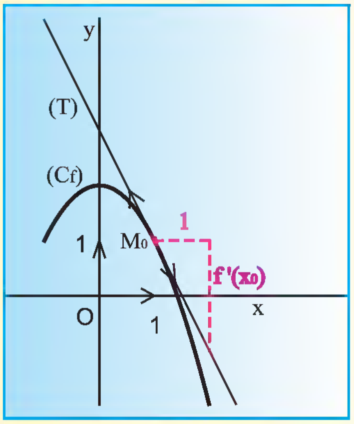
Nombre dérivé et interprétation géométrique :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit x_0 un élément de I.

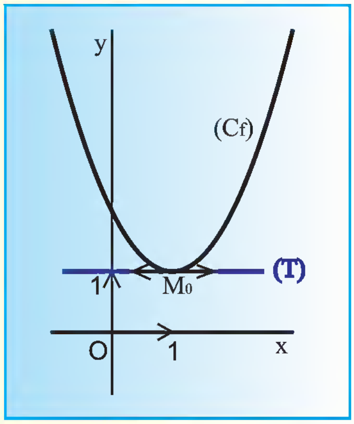
Si f est dérivable en x_0 alors sa courbe représentative (C_f) admet au point $M_0(x_0, f(x_0))$ une tangente (T) de coefficient directeur $f'(x_0)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$



$f'(x_0)>0$.



$f'(x_0)<0$.



$f'(x_0)=0$.

COURS

Dérivabilité à gauche – Dérivabilité à droite

Activité 1 (Continuité et dérivabilité)

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I. On suppose que f est dérivable en un réel x_0 de I. On pose $k(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ si $x \neq x_0$

a) Vérifier que pour $x \neq x_0$, on a $f(x) = f(x_0) + (x - x_0).k(x)$

b) Quelle est la limite de k(x) lorsque x tend vers x_0 ?

c) Trouver alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ et conclure.

Théorème
Si une fonction f est dérivable en x_0 alors elle est continue en x_0.

Activité 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en $x_0 = 0$.

2) a) Calculer le nombre dérivé à gauche de f en $x_0 = 0$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$. Interpréter graphiquement le résultat.

c) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Dérivabilité à gauche – Dérivabilité à droite :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel de I.

* On dit que f est dérivable à gauche en x_0, s'il existe un nombre réel ℓ_1 tel que :

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_1 \text{ ou encore } \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \ell_1$$

Le réel ℓ_1, est alors appelé le nombre dérivé à gauche de f en x_0 et il est noté $f'_g(x_0)$.

* On dit que f est dérivable à droite en x_0, s'il existe un nombre réel ℓ_2 tel que

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_2 \text{ ou encore } \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \ell_2$$

Le réel ℓ_2, est alors appelé le nombre dérivé à droite de f en x_0 et il est noté $f'_d(x_0)$

Remarques :

* On peut avoir une fonction continue en x_0 mais non dérivable en x_0.
* Si f n'est pas continue en x_0 alors elle n'est pas dérivable en x_0.

Activité 3

Soit la fonction $f : x \mapsto |x^2 - 1|$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) a) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$.

b) En déduire que (C) admet une demi-tangente à gauche et une demi-tangente à droite au point A(1,0).

c) Tracer les deux demi-tangentes à (C) en A.

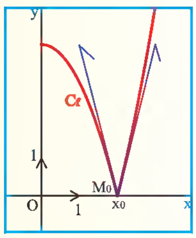
2) a) Montrer que f est une fonction paire.

b) construire la courbe (C).

Interprétation géométrique du nombre dérivé à gauche et du nombre dérivé à droite

* Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et dérivable à gauche en x_0 de I. Le nombre $f'_g(x_0)$ représente la pente de la demi-tangente à gauche à la courbe représentative de f en son point $M_0(x_0, f(x_0))$.Une équation cartésienne de cette demi tangente est donnée par : $\begin{cases} y = f'_g(x_0).(x - x_0) + f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}$

* Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et dérivable à droite en x_0 de I. Le nombre $f'_d(x_0)$ représente la pente de la demi-tangente à droite à la courbe représentative de f en son point $M_0(x_0, f(x_0))$.Une équation cartésienne de cette demi tangente est donnée par : $\begin{cases} y = f'_d(x_0).(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$



Lorsque $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$ la courbe de f admet deux demi-tangentes de directions différentes en $M_0(x_0, f(x_0))$.
On dit alors, que le point M_0 est un point anguleux pour la courbe de f.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel de I.
La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si f est à la fois dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Activité 4

Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x-4}$ pour $x \in [2,+\infty[$.

1) Etudier la dérivabilité de f à droite en 2.

2) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) Tracer la courbe (C_f) de f dans un repère $(o,\vec{i},\vec{j})$.

Commentaires :

Pour $f : x \mapsto \sqrt{2x-4};\ x \in [2,+\infty[$;

On a $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = +\infty$, on dit alors que la courbe représentative de f possède une demi-tangente verticale au point $M_0\ (2, f\ (2))$.

Plus généralement : si f est une fonction définie sur D et vérifiant pour x_0 de D,

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty \ (\text{ou } -\infty) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty \ (\text{ou } -\infty)$$

alors f n'est pas dérivable en x_0 et sa courbe représentative possède une demi-tangente verticale au point $M_0(x_0, f(x_0))$.

Dérivabilité sur un intervalle Fonction dérivée

Activité 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 4 & \text{si } x \leq 2 \\ f(x) = 8 - \dfrac{16}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty, 2[$ et $]2, +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x < 2$ et pour $x > 2$.
3) a) Etudier la dérivabilité de f en $x_0=2$.
   b) La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Dérivabilité sur un intervalle

* Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I.
La fonction f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel x_0 de I. Dans ce cas f possède une fonction dérivée notée f ' définie sur I, qui à tout x de I associe f '(x).
* Soit a un réel.
- La fonction f est dérivable sur $[a,+\infty[$ si elle est dérivable sur $]a,+\infty[$ et dérivable à droite en a.
- La fonction f est dérivable sur $]-\infty, a]$ si elle est dérivable sur $]-\infty, a[$ et dérivable à gauche en a.
* Soient a et b deux réels tels que $a < b$. La fonction f est dérivable sur $[a, b]$ si elle est dérivable sur $]a, b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b.

Activité 2

Recopier et compléter le tableau suivant

Fonction f	Fonction dérivée f '	Ensemble de dérivabilité de f
$f : x \mapsto x^6 + 3x^4 + 5x^2 + 6$		
$f : x \mapsto \dfrac{-3x+1}{2x-1}$		
$f : x \mapsto 3\sqrt{x} + \dfrac{2}{x^3}$		
$f : x \mapsto 2\cos(3x+1)$		
$f : x \mapsto \operatorname{tg} x$		

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	f '(x)
$f : x \mapsto k$	$f'(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$
$f : x \mapsto ax+b$	$f'(x) = a, \quad x \in \mathbb{R}$
$f : x \mapsto x^n$; $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	$f'(x) = nx^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}$
$f : x \mapsto \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad x \in \mathbb{R}^*$
$f : x \mapsto \frac{1}{x^n}$; $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}, \quad x \in \mathbb{R}^*$
$f : x \mapsto \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0.$
$f : x \mapsto \sqrt{ax+b}$	$f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}, \quad ax+b > 0.$
$f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$	$f'(x) = \frac{ad-cb}{(cx+d)^2}, \quad x \neq -\frac{d}{c}$
$f : x \mapsto \sin(ax+b)$	$f'(x) = a.\cos(ax+b), \quad x \in \mathbb{R}$
$f : x \mapsto \cos(ax+b)$	$f'(x) = -a.\sin(ax+b), \quad x \in \mathbb{R}$
$f : x \mapsto \tan x$	$f'(x) = 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$f : x \mapsto \text{cotan}(x)$	$f'(x) = -(1+\text{cotan}^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Activité 3

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = 4x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$.

1) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de chacune de ces fonctions.

2) Calculer les fonctions dérivées de $f+g$, fg, $\frac{f}{g}$ et g^3.

Opérations sur les fonctions dérivées

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I de IR.

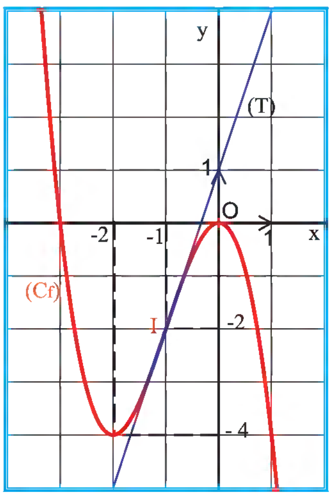
Fonction	Fonction dérivée
$f + g$	$f' + g'$
$a.f$ (a constante réelle)	$a.f'$
$f.g$	$f'.g + g'.f$
$f^n \ (n \geq 2)$	$nf'.f^{n-1}$
$\frac{1}{f}$	$\frac{-f'}{f^2}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'.g - g'.f}{g^2}$

Dérivée seconde et point d'inflexion

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

On a représenté la courbe (C_f) de la fonction $f : x \mapsto -x^3 - 3x^2$ et sa tangente (T) au point I d'abscisse (-1) dans le graphique ci-contre :



1) Lire graphiquement la pente de la tangente (T).
2) Déterminer la fonction dérivée f ' de f.
3) Déterminer la fonction dérivée seconde f " de f.
4) a) Donner une équation cartésienne de la tangente (T).
   b) Conjecturer graphiquement sur la position relative de (C_f) et (T).
5) Dresser le tableau de signe de f "(x).

Commentaires :

∗ On a f "(x) = -6 x -6, qui s'annule et change de signe en $x_0 = -1$.
Le point I d'abscisse (-1) est un point d'inflexion de la courbe (C_f).

* On remarque aussi que la courbe (C_f) traverse sa tangente en I(-1, f(-1)).

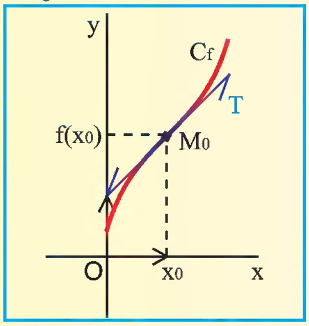
Définitions

Dérivée seconde :

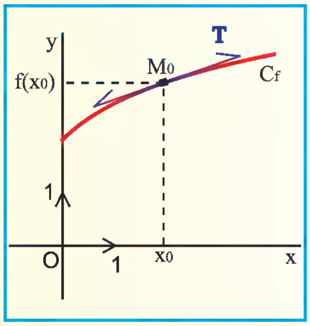
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f ' sa fonction dérivée.
Si la fonction f ' est dérivable sur I alors f est dite deux fois dérivable sur I et la fonction dérivée de f ' se note f " et s'appelle fonction dérivée seconde de f.

Point d'inflexion :

Le point $M_0(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de (C_f) si et seulement si (C_f) traverse sa tangente en M_0.



M_0 est un point d'inflexion de C_f



M_0 n'est pas un point d'inflexion de C_f

Théorème

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I contenant x_0 et (C) sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan. Soit f " la fonction dérivée seconde de f.

Si la fonction f " s'annule et change de signe en x_0 alors le point $M_0(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de (C).

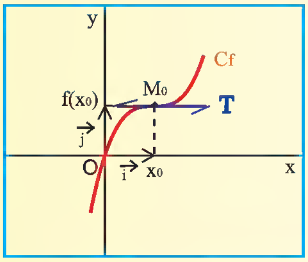
Activité 2

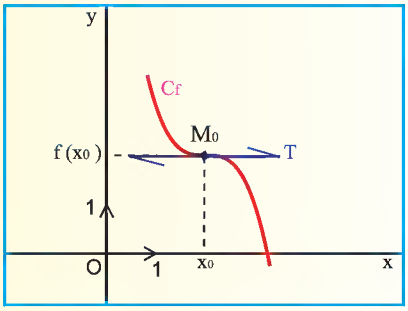
Soit $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x + 1$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Calculer f "(x) pour tout x réel.
b) En déduire que (C_f) possède un point d'inflexion d'abscisse x_0 que l'on précisera.
c) Montrer que la fonction f ' s'annule en x_0 sans changer de signe.

Théorème

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I contenant x_0 et (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan. Soit f ' la fonction dérivée de f. Si la fonction f ' s'annule en x_0 sans changer de signe alors le point $M_0(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de (C_f).





Dérivée et sens de variation

Activité 1

Soit $f : x \mapsto x^2 + 2x$

1) a) Vérifier que pour tout x réel on a $f(x) = (x+1)^2 - 1$.
   b) En déduire que f est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$ et que f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$.
2) Calculer f '(x) et étudier son signe sur chacun des intervalles $]-\infty, -1]$ et $[-1, +\infty[$.
3) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On a :

* La fonction f est croissante sur I si et seulement si pour tout x appartenant à I, $f'(x) \geq 0$.
* La fonction f est décroissante sur I si et seulement si pour tout x appartenant à I, $f'(x) \leq 0$.
* La fonction f est constante sur I si et seulement si pour tout x appartenant à I, $f'(x) = 0$

Activité 2

Etudier le sens de variation de chacune des deux fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto tgx$ sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. b) $g : x \mapsto \frac{x^2}{x^2+1}$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

Extrema

Activité 1

Une entreprise fabrique une quantité x d'objets par jour.
Le coût de production de cette fabrication, exprimé en DT,est donné par la formule $f(x) = (0.1).x^2 -2x +20$.

1) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2) En déduire la valeur de x qui minimise le coût journalier de production.

Minimum et maximum d'une fonction :

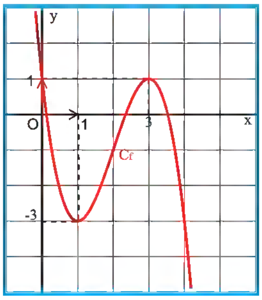
Soit f une fonction définie sur un ensemble D.

* S'il existe x_0 appartenant à D tel que pour tout x de D, $f(x) \geq f(x_0)$, on dit que la fonction f admet sur D un minimum en x_0 .Le réel $f(x_0)$ est le minimum de f.
* S'il existe x_0 appartenant à D tel que pour tout x de D, $f(x) \leq f(x_0)$, on dit que la fonction f admet sur D un maximum en x_0. Le réel $f(x_0)$ est le maximum de f.
* Un minimum ou un maximum de f s'appelle aussi un extremum de f.

Activité 2

On a représenté, ci-contre, la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$.
Répondre par vrai ou faux.

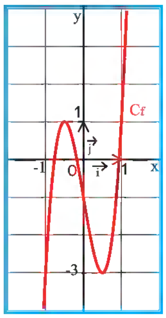
a) La fonction f admet sur $\mathbb{R}$ un maximum en $x_0 = 3$ égal à1.
b) La fonction f admet sur $[0,+\infty[$ un maximum en $x_0 = 3$ égal à -3.
c) La fonction f admet sur $]-\infty,4]$ un minimum en $x_0 = 1$ égal à -3.
d) Pour tout $x \in\ ]-\infty,0]$, $f(x) \geq 1$.
e) Pour tout $x \in\ [0,+\infty[$, $f(x) \leq 1$.
f) Pour tout $x \in\ ]0,4[$, $f(x) \leq f(1)$.



Activité 3

La courbe ci-contre représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 8x^3 -6x - 1$.
On considère la fonction g définie sur l'intervalle$]-1,1[$ par $g(x) = f(x)$.

a) En examinant le graphique, donner le nombre d'extremum(s) de g.
b) Conjecturer les nombres dérivés de g en ces extremums.
c) Dresser le tableau de variation de g.
d) En déduire que g admet un minimum et un maximum .
   Préciser ces deux extremums.
e) Soit m le minimum de g sur $]-1,1[$, m est-il un minimum de f sur $\mathbb{R}$?
f) Soit M le maximum de g sur $]-1,1[$, M est-il un maximum de f sur $\mathbb{R}$?
g) Montrer que g est bornée.



Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.
* La fonction f admet un maximum local en x_0 si et seulement si il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 et inclus dans I tel que pour tout x de J, $f(x) \leq f(x_0)$).
* La fonction f admet un minimum local en x_0 si et seulement si il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 et inclus dans I tel que pour tout x de J, $f(x) \geq f(x_0)$).

Activité 4

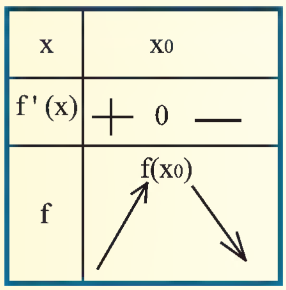
Tracer la courbe représentative de la fonction $f(x)=x^3$ pour x appartenant à l'intervalle [-1, 1].
a) Que vaut f'(0) ?
b) Est-ce que la courbe de f présente un extremum local en 0 ?
c) Déterminer le signe de f'(x) pour $x>0$ et pour $x<0$.

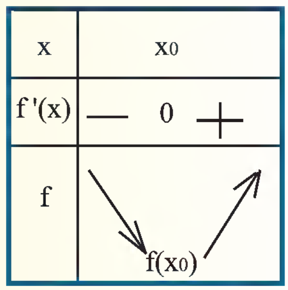
Remarques :

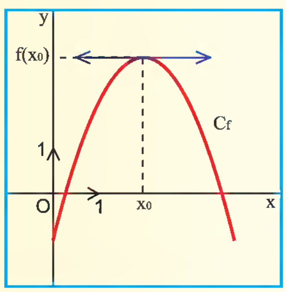
• Si pour tout x de D_f, $f(x) \leq f(x_0)$ alors le réel $f(x_0)$ est appelé le maximum absolu (ou global) de f.
• Si pour tout x de D_f, $f(x) \geq f(x_0)$ alors le réel $f(x_0)$ est appelé le minimum absolu (ou global) de f.

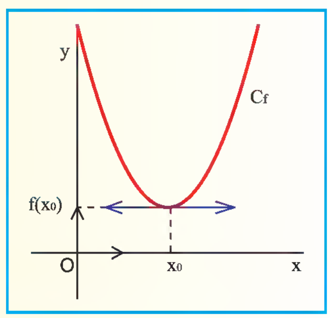
Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.
• Si f admet un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.
• Si la fonction dérivée f ' de f s'annule et change de signe en x_0 alors f admet un extremum local égal à $f(x_0)$ en x_0 .









Activité 5

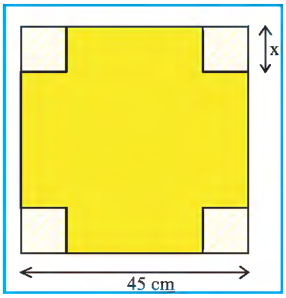
Soit la fonction $f : x \mapsto 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$
En déduire qu'elle possède deux extremums dont on précisera la nature.

Activité 6

Pour fabriquer une boîte à partir d'une plaque carrée de côté 45 cm, on découpe aux quatre coins de la plaque un carré de côté x, (voir figure ci-contre)

a) Montrer que le volume de la boite est
$v(x) = x.(45 - 2x)^2$; où $0 < x < 22.5$.

b) En déduire la valeur de x pour laquelle le volume de la boite soit maximal.



Dérivée d'une fonction composée

Activité 1

On considère les fonctions $f : x \mapsto 2x^3$ et $g : x \mapsto -12x + 1$

1) Montrer que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer f '(x) et g'(x).
2) a) Définir la fonction $g \circ f$.
   b) Montrer que $g \circ f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $(g \circ f)'(x)$.
   c) Définir la fonction $g' \circ f$ et calculer $(g' \circ f)(x).f'(x)$.
   d) Conclure.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel de I.
Soit g une fonction définie sur f(I).
Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a :
$(g \circ f)'(x_0) = (g' \circ f)(x_0).f'(x_0)$.

Activité 2

1) Soit la fonction $h : x \mapsto \sqrt{ax+b}$ où a et b sont deux réels.
   Montrer que h est dérivable en tout réel x_0 tel que $ax_0 + b > 0$ et retrouver, en utilisant la dérivée d'une fonction composée, le résultat $h'(x_0) = \dfrac{a}{2\sqrt{ax_0 + b}}$
2) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
   On suppose que pour tout x de I, f(x) > 0.

Montrer que la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et déterminer sa fonction dérivée.

Corollaire 1

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de et g est une fonction dérivable sur f (I) alors ($g \circ f$) est dérivable sur I et on a ($g \circ f$)'= ($g' \circ f$) x f' .

Corollaire 2

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de et si de plus pour tout x de I, f(x) > 0 alors la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et on a $(\sqrt{f})' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$.

Activité 3

Préciser, chaque fois, sur quel ensemble f est dérivable et calculer f '(x) lorsqu'il existe.

a) $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$;

b) $f(x) = \sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$;

c) $f(x) = \left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^3$;

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

Théorème et Inégalités des accroissements finis

Activité 1

Soit la fonction $f : x \mapsto x^2-2x-3$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On donne les points A(1, f(1)) et B(3, f(3)).

1) Préciser le coefficient directeur de la droite (AB).

2) a) Montrer que (C) admet une tangente T parallèle à (AB) en un point $M_0(x_0, f(x_0))$ que l'on précisera.

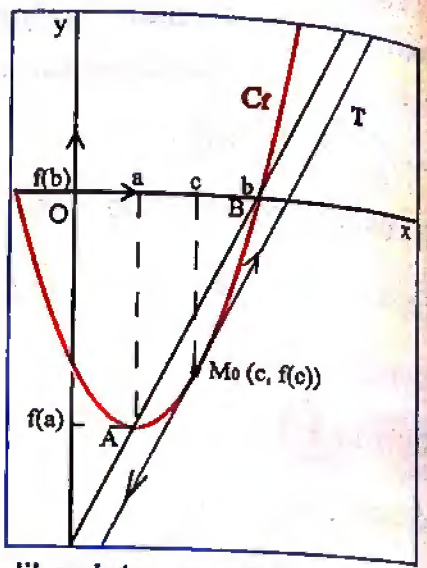
b) Donner une équation cartésienne de la tangente T.

3) Tracer (C), (AB) et T.

Théorème

Théorème des accroissements finis (admis) :

Soient deux réels a et b avec a < b. Si f est une fonction continue sur un intervalle [a, b] et dérivable sur]a, b[alors il existe au moins un réel c appartenant à]a, b[tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



Interprétation géométrique :

- Le réel f '(c) est le coefficient directeur de la tangente T à la courbe (C_f) en son point d'abscisse c.
- Le rapport $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est le coefficient directeur de la droite (AB) où A(a, f(a)) et B(b,f(b)).

Donc $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ équivaut à T // (AB).

Ainsi, le théorème des accroissement finis affirme qu'il existe au moins un réel c appartenant à]a, b[tel que la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse c soit parallèle à la droite (AB).

Activité 2

Soit la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Soient A et B les points de (C) d'abscisses respectives α et β avec α différent de β.

Montrer que la tangente à (C) au point d'abscisse $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ est parallèle à la corde (AB).

Activité 3

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$; $x \in [1, 5]$.

1) Montrer que $\forall x \in [1, 5]$ on a $-1 \leq f'(x) \leq -\dfrac{1}{25}$.

2) a- Montrer que pour tous réels a et b appartenant à l'intervalle [1, 5], tels que a < b il existe c ∈]1, 5[tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

b- En déduire un encadrement du rapport $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Inégalités des accroissements finis (admis) :

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et s'il existe deux constantes réelles m et M telles que pour tout x de I, $m \leq f'(x) \leq M$ alors pour tous réels a et b de I, tels que a < b on a : $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

Corollaire :

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et s'il existe $k > 0$ tels que pour tout x de I, $|f'(x)| \leq k$ alors pour tous réels a et b de I on a $|f(b) - f(a)| \leq k|b-a|$.

Activité 4

1) Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$

a) Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[64, 65]$ on a $\frac{1}{18} \leq f'(x) \leq \frac{1}{16}$

b) En déduire un encadrement de $\sqrt{65}$

2) Montrer que pour tous réels x et y, dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right]$ on a $|\cos^2 x - \cos^2 y| \leq \frac{1}{2}|x - y|$

Activité 5

1) Soit la fonction $f : t \mapsto \sin t$.

a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $|f'(t)| \leq 1$.

b) En déduire que pour tous réels a et b on a $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$

2) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ on a $x \leq \operatorname{tg} x \leq 2x$.

RÉSUMÉ DU COURS

• **Dérivabilité en un point :**

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.

* On dit que f est dérivable en x_0, s'il existe un nombre réel ℓ tel que

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell \text{ ou encore } \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\ell .$$

Le réel ℓ, est alors appelé le nombre dérivé de f en x_0 et il est noté $f'(x_0)$.

* Si f est dérivable en x_0 alors sa courbe représentative admet au point $M_0(x_0, f(x_0))$ une tangente (T) de coefficient directeur $f'(x_0)$, dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ f'(x_0)\end{pmatrix}$ et dont une équation cartésienne est donnée par :

$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$.

• **Dérivabilité à gauche et dérivabilité à droite en un point :**

* On dit que f est dérivable à gauche en x_0, s'il existe un nombre réel ℓ_1 tel que

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell_1 \text{ ou encore } \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\ell_1$$

Le réel ℓ_1, est alors appelé le nombre dérivé à gauche de f en x_0 et il est noté $f'_g(x_0)$.

* On dit que f est dérivable à droite en x_0, s'il existe un nombre réel ℓ_2 tel que

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell_2 \text{ ou encore } \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\ell_2$$

Le réel ℓ_2, est alors appelé le nombre dérivé à gauche de f en x_0 et il est noté $f'_d(x_0)$.

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel de I. Soit C_f la courbe de f.

La fonction f est dérivable en x_0 si, et seulement si f est à la fois dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

• **Dérivée seconde et point d'inflexion :**

Théorèmes

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I contenant x_0 et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

* Soit f ' la fonction dérivée de f . Si la fonction f ' s'annule en x_0 sans changer de signe alors le point $M_0(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de (C_f).
* Soit f " la fonction dérivée seconde de f. Si la fonction f " s'annule et change de signe en x_0 alors le point $M_0(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de (C_f).

• **Extrema :**

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.
* Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
* Si la fonction dérivée f ' s'annule et change de signe en x_0 alors f admet un extremum local en x_0 égal à $f(x_0)$.

• **Dérivée d'une fonction composée :**

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel de I. Soit g une fonction définie sur f(I). Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a : $(g \circ f)'(x_0) = (g' \circ f)(x_0).f'(x_0)$

Corollaire : Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et g est une fonction dérivable sur f (I) alors $g \circ f$ est dérivable sur I et on a : $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$

Application :

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si de plus pour tout x de I, $f(x) > 0$ alors la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et on a $(\sqrt{f})' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$.

• **Théorème des accroissements finis (admis):**

Soient deux réels a et b avec $a < b$.
Si f est une fonction continue sur un intervalle [a, b] et dérivable sur]a, b[alors il existe au moins un réel c appartenant à]a, b[, tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Interprétation géométrique :
* Le réel f '(c) est le coefficient directeur de la tangente T à la courbe (C_f) en son point d'abscisse c.
* Le rapport $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est le coefficient directeur de la droite (AB) où A(a, f(a)) et B(b,f(b)). Donc $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ équivaut à T//(AB).

• **Inégalités des accroissements finis :**

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et s'il existe deux constantes réelles m et M tels que pour tout x de I, $m \le f'(x) \le M$ alors pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, on a :

$$m \le \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \le M.$$

Corollaire : Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et s'il existe $k > 0$ tels que pour tout x de I, $|f'(x)| \le k$ alors pour tous réels a et b de I on a $|f(b) - f(a)| \le k|b - a|$.

AVEC L'ORDINATEUR

Activité

On considère un cercle de centre C et de diamètre [AB] , AB = 8 cm.
M est un point variable du diamètre [AB]. La perpendiculaire à (AB) qui passe par M coupe l'un des deux demi-cercles de diamètre [AB] en N.
1) M étant placé, calculer l'aire du triangle rectangle AMN à l'aide du logiciel utilisé.
2) Pour quelle position du point M sur [AB] l'aire du triangle AMN est-elle maximale ?

Une stratégie de résolution :

Considérer un repère orthonormé $\left(A, \vec{i}, \vec{j}\right)$ où $\vec{i} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$ et poser x = AM.

a) Prouver que $x = 8\cos^2\theta$ où $\theta = \widehat{BAN}$

b) Prouver que l'aire du triangle AMN est donnée par la formule
$S(\theta) = 8\cos\theta\sin\theta$, où $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

c) En dérivant la fonction S, montrer que l'aire du triangle AMN est maximale quand M est placé au milieu de [CB].

EXERCICES ET PROBLÈMES

1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x - 2$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

a) Montrer, en utilisant la définition de la dérivabilité en un point, que f est dérivable en 2.
b) Donner une équation de la tangente T à (Cf) au point d'abscisse 2.
c) Construire T et (C_f).
d) Donner une approximation affine de f en 2.

2 Dans chacun des cas suivants, montrer que f est dérivable en a, préciser le nombre dérivé de f en a, donner une équation de la tangente à (C_f) en son point d'abscisse a et donner une approximation affine de f en a :

1) $f : x \mapsto x^2 - 3x$; $a = -1$
2) $f : x \mapsto \dfrac{2x-3}{x+4}$; $a = 1$
3) $f : x \mapsto \sqrt{3x^2+5x-4}$; $a = 1$

3 Dans chacun des cas suivants étudier la dérivabilité de f en x_0 et donner une (ou des) équation(s) de la (ou des) tangente(s) ou demi tangente(s) à (C_f) en son point d'abscisse x_0 .

1) $f : x \mapsto x^2 + |x|$; $x_0 = 0$.
2) $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 5x + 6}$; $x_0 = 2$.
3) $\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x + 4 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$; $x_0 = 1$.
4) $f : x \mapsto |x^2 - x|$; $x_0 = 1$.

4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\begin{cases} f(x) = 4\sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 3 \\ f(x) = x^2 - 5x + c & \text{si } x < 3 \end{cases}$; c est un réel.

1) Déterminer le réel c pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
2) Pour la valeur de c trouvée, montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.

5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\begin{cases} f(x) = x^2 - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x} - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2) a) Etudier la dérivabilité de f en 1.
b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\begin{cases} f(x) = 2x + \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x < -1 \\ f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ f(x) = 3 + \dfrac{1 - \cos(\pi x)}{x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout x > 0 on a :
$3 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{x} + 3$.
b) En déduire la limite de f(x) lorsque x tend vers $+\infty$.
2) Etudier la continuité de f en (-1) et en 0.
3) Etudier la dérivabilité à gauche de f en (-1) et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
4) Etudier la dérivabilité de f en 0.

7 Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2\sin x + 1 - \cos x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

a) Etudier la continuité de f en 0.
b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

8 Pour chacune des fonctions suivantes, préciser l'ensemble sur lequel la fonction f est dérivable et calculer f ' (x) lorsqu'il existe :

a) $f : x \mapsto \sin x$; b) $f : x \mapsto \cos x$;
c) $f : x \mapsto |x|$; d) $f : x \mapsto x^3 - 5x^2 + 7x + 3$;
e) $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$; g) $f : x \mapsto \sqrt{4x-1}$;
h) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$

9 Déterminer, pour chaque fonction f, le domaine de définition et préciser sur quelle partie de son domaine elle est dérivable et calculer f '(x).

1) $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2+1}$

2) $f : x \mapsto \left(\dfrac{3+x}{2x+1}\right)^4$

3) $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

4) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x - 1}{2\cos x - 1}$

5) $f : x \mapsto \cos(2x + \dfrac{\pi}{6})$

6) $f : x \mapsto \cos(\sqrt{x^2-1})$

7) $f : x \mapsto x^2 \sin(\dfrac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

10 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

1) Etablir le tableau de variation de f.
2) En déduire que f admet un minimum global que l'on précisera.
3) Montrer que f est bornée.

11 Soit la fonction f définie sur par

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$$

a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$

et que $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$

b) Dresser alors, le tableau de variation de f sur $]0,+\infty[$.

12 On considère la fonction suivante :

$$f :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

1) Montrer que l'équation f(x) = x admet une solution unique α dans $]1,+\infty[$.
2) Montrer que f est dérivable et que pour tout x de $]1,+\infty[$ on a $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.
3) En déduire que pour tout x de $]1,+\infty[$ on a $|f(x) - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|x - \alpha|$.

13 Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}.$$

1) Déterminer le domaine de définition de
2) Etablir le tableau de variation de f.
3) Soit la fonction g définie sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ p
g(x) = f(sinx) .
Montrer que g est dérivable et calcu
g'(x).

14 Soit la fonction f définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \cos^2 x$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer f '(x) .
b) Dresser le tableau de variation de f.
2) Soit g(x) = f(x) - x.
a) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α appartenant à $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$
b) Etudier le signe de g(x) sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.
c) Calculer $g(\frac{}{4})$ et $g(\frac{}{6})$, en déduire un nouvel encadrement de .
d) Etudier la position relative de la courbe (C) de f et la droite D : y = x.

15 Soit la fonction f définie sur

$$\begin{cases} f(x) = 2-\sqrt{x^2-x} & \text{si } x\in\left]-\infty,0\right[\\ f(x) = 1+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \text{si } x\in\left[0,+\infty\right[\end{cases}$$

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.
1) Montrer que f est continue en 0.
2) Etudier la dérivabilité de f en 0.
Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3) Montrer que pour tout x de]0,+∞[on a

$$f'(x) = \frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

4) Etablir le tableau de variation de f.
5) Déterminer l'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses.
6) Montrer que l'équation f(x) = x admet une solution unique α dans]0,+∞[.
b) Vérifier que $1.5 < \alpha < 1.6$.
7) Etudier les branches infinies et le comportement asymptotique de f puis construire (C_f).
8) Soit h la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par h(x) = f (tgx) .
a) Calculer h'(x).
b) Montrer que pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ on a h(x) = 1 + cosx.

16 1) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}} - 1.$$

a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$g'(x) = \frac{6}{(3+x^2)\sqrt{3+x^2}}.$$

b) Etablir le tableau de variation de g.
c) Calculer g(1). En déduire une étude de signe de g(x) sur $\mathbb{R}$.
2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2\sqrt{3+x^2} - x$$

a) Dresser le tableau de variation de f.
b) Donner une équation cartésienne de la tangente T à la courbe de f en son point d'abscisse (-1).

17 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{|x^2+x|+1}{|x|+1}.$$

1) a) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$ et en $x_0 = (-1)$.
b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2) Dresser le tableau de variation de f.
3) Construire , dans un repère orthonormé du plan, la courbe représentative C de f. On précisera en particulier les asymptotes à C.

APERÇU HISTORIQUE

Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (5 Octobre 1781 - 18 Décembre 1848)

Bernard Bolzano était un mathématicien Tchèque de langue allemande, né en 1781 mort en 1848 à Prague. Etudiant en philosophie et mathématiques, il devint prêtre e 1805. Il enseigna alors les sciences de la religion à Prague et consacra le reste de so temps aux mathématiques. Ses travaux portèrent essentiellement sur les fonctions, logique et la théorie des nombres. Il est considéré comme l'un des principaux contrib teurs à la logique telle qu'elle est aujourd'hui établie.

Ils est connu pour le théorème de Bolzano, ainsi que pour le théorème de Bolzan Weierstrass, développé conjointement avec Karl Weierstrass.

Dans sa philosophie, Bolzano critique l'idéalisme d'Hegel et de Kant en affirmant q les nombres, les idées, et les vérités existent indépendamment des personnes qui les pe sent.

Après les travaux du mathématicien Tchèque, Bernard Bolzano, qui donne les premi res notions du calcul infinitésimal , le français Augustin Luis Cauchy (1789-185 impose toute sa rigueur à ce calçul.

Précisons que « le calcul infinitésimal » concerne le calcul des dérivées et la déri bilité.

Ainsi, dans son « cours d'analyse » Cauchy définit d'abord le concept de limites et ce fait identifie le calcul d'une dérivée à celle de la limite arithmétique d'une série.

Il passera à côté du lien qui existe entre la dérivée et la dérivabilité d'une fonction un point. Il rejoindra les pensées de Leibniz et orientera ses recherches vers le calcul d férentiel.

Il aboutit au théorème des accroissements finis, en utilisant la continuité de la déri d'une fonction sur un intervalle très petit.

Il faudra attendre L'Allemand Dirichlet qui, en 1829, publie les notions fondamen les de dérivées d'une fonction en un point et de ce fait, précise les théorèmes concern la dérivabilité d'une fonction.