Partie 1

Chapitre 1

Limite et continuité

Plan du chapitre

❈	**Activités préliminaires**	
❈	**Cours**	
	❖	Prolongement par continuité
	❖	Limite et ordre
	❖	Fonctions monotones et limites
	❖	Limite et continuité d'une fonction composée.
	❖	- Continuité sur un intervalle - Image d'un intervalle par une fonction continue
	❖	Résolution d'équations de la forme : $f(x) = k$.
	❖	Limites et comportement asymptotique.
❈	**Résumé du cours**	
❈	**Avec L'ordinateur**	
❈	**Exercices et Problèmes**	
❈	**Aperçu Historique**	

ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

1 Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la fonction f en x_0.

1) $f(x)= -x^3+x^2+1$, $x_0=0$; 2) $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x-1}$, $x_0=1$; 3) $f(x)=\sqrt{x^2-2x+9}$, $x_0=2$.

2 Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^3}+1\right) ; \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) ; \quad \lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{\sqrt{x-1}} ; \quad \lim_{x\to0}\frac{1}{x^2\sqrt{x+1}} ; \quad \lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)$$

3 Soient f, g, het k les fonctions définies par :

$f(x) = -3x^7-x^5-x+1$; $g(x)=\dfrac{x-1}{x^2+3}$; $h(x)=\sqrt{2x^2+x}+x$ et $k(x)=\left|\dfrac{x^3+4x^2}{x+4}\right|$.

a) Donner l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions.
b) Pour chacune de ces fonctions donner les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

Théorèmes

- La limite d'une fonction polynôme, quand la variable tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, est la même que celle de son monôme de plus haut degré :
  $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ où $a_n\neq0$, on a $\lim\limits_{|x|\to+\infty}P(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}a_nx^n$
- La limite d'une fonction rationnelle, quand la variable tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, est la même que celle du quotient des monômes de plus haut degré :
  $R(x)=\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_1x+b_0}$ où $a_nb_m\neq0$, on a $\lim\limits_{|x|\to+\infty}R(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{a_nx^n}{b_mx^m}$
- Soit f une fonction et ℓ un réel. Quand le réel x tend vers x_0, ou vers x_0^+, ou vers x_0^-, ou vers $+\infty$, ou vers $-\infty$, on a les résultats suivants :

Si $\lim f=\ell$ et f est positive alors $\lim\sqrt{f}=\sqrt{\ell}$ $(\ell\geq0)$.

Si $\lim f=+\infty$ et f est positive alors $\lim\sqrt{f}=\sqrt{\ell}$

Si $\lim f=\ell$ alors $\lim|f|=|\ell|$.

Si $\lim f=+\infty$ ou $\lim f=-\infty$ alors $\lim|f|=+\infty$.

Théorèmes : Opérations sur les limites

Soient f et g deux fonctions. Quand le réel x tend vers x_0, ou vers x_0^+, ou vers x_0^-, ou vers $+\infty$, ou vers $-\infty$, on a les résultats suivants :

f a pour limite	g a pour limite	f + g a pour limite
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	ℓ'	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	F.I

f a pour limite	g a pour limite	f x g a pour limite
ℓ	ℓ'	$\ell \times \ell'$
$+\infty$	$\ell'>0$	$+\infty$
$-\infty$	$\ell'>0$	$-\infty$
$+\infty$	$\ell'<0$	$-\infty$
$-\infty$	$\ell'<0$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0	$+\infty$ ou $-\infty$	F.I

f a pour limite	g a pour limite	$\frac{f}{g}$ a pour limite
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
$+\infty$	$\ell'>0$	$+\infty$
$-\infty$	$\ell'>0$	$-\infty$
$+\infty$	$\ell'<0$	$-\infty$
$-\infty$	$\ell'<0$	$+\infty$
ℓ	$+\infty$	0
ℓ	$-\infty$	0
$\ell \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$ (on applique la règle des signes)
0	0	F.I
$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	F.I

N.B : F.I désigne une forme indéterminée , pour laquelle une étude spécifique doit être menée pour déterminer l'éventuelle limite.

4 a) Vérifier que pour x > 0 on a : $\frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \frac{\sin x}{x}\sqrt{x}$, en déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x}$.

c) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax}{x} = a$

d) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$.

5 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{|x-1|} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

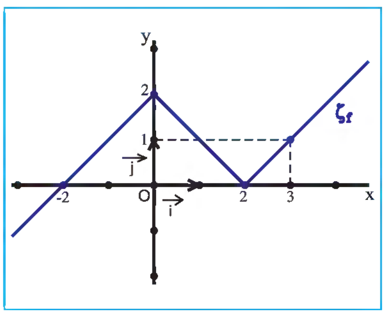
1) Etudier la continuité de f à droite et à gauche en 1.
2) La fonction f est - elle continue en 1 ?
3) La fonction f est - elle continue sur $\mathbb{R}$?

Théorèmes

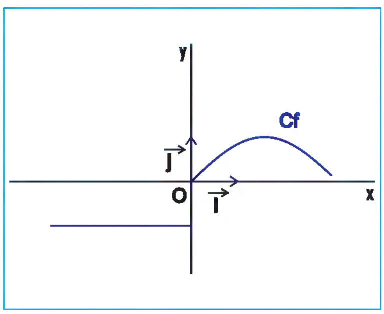
- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.
  f est continue en x_0 si et seulement si, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle $[x_0, x_0 + h[$, $(h > 0)$.
  f est continue à droite en x_0 si et seulement si, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle $]x_0 - h, x_0]$, $(h > 0)$.
  f est continue à gauche en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0.
  f est continue en x_0 si et seulement si, f est continue à droite et à gauche en x_0.
- Si f et g sont deux fonctions continues en x_0 alors les fonctions f+g, fxg et $|f|$ sont continues en x_0, si de plus $g(x_0) \neq 0$ alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue en x_0.
- Toute fonction polynôme est continue en tout réel x_0.
- Toute fonction rationnelle est continue en tout réel x_0 de son domaine de définition.

6 Répondre par « vrai » ou « faux » en se référant à la représentation graphique de f, dans chacun des cas suivants :

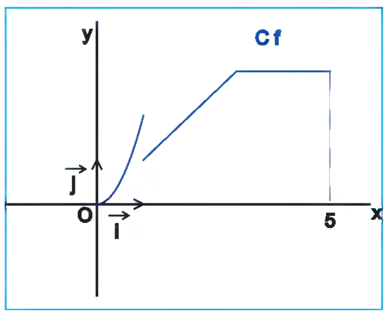
a) f est continue sur [-2, 3].



b) f est continue en 0.



c) f est continue sur]0, 5[.



COURS

Prolongement par continuité

Activité 1

1) On considère la fonction f définie pour tout réel $x \neq -1$, par $f(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{x+1}$.

   a) Prouver que f est continue en tout réel différent de -1.

   b) Montrer que $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 2$

2) On considère la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq -1 \\ 2 & \text{si } x = -1 \end{cases}$

   a) Montrer que p(x) = x + 3 , pour tout réel x.

   b) En déduire que p est continue en -1.

3) Représenter graphiquement chacune des fonctions f et p dans un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

Définition

Soit f une fonction continue en tout point d'un intervalle ouvert I, sauf peut-être en x_0 de I. On appelle prolongement par continuité de f en x_0 , la fonction g définie sur I, continue en x_0 et vérifiant : $\forall\, x \in I - \{x_0\}$, g(x) = f(x).

Activité 2

1) Soit f une fonction continue en tout point d'un intervalle ouvert I, sauf peut-être en x_0 de I et g le prolongement par continuité de f en x_0 de I.

   Montrer que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$

2) Soit $f(x) = \dfrac{x^3 - 64}{x - 4}$

   Déterminer le prolongement par continuité de f en 4.

Activité 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{|x+1| - |x-1|}$

1) Déterminer l'ensemble de définition D de f .

2) Déterminer le prolongement par continuité de f en 0.

3) Tracer la courbe représentative de f dans un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

Limite et ordre

Activité 1

a) Montrer que pour tout réel x on a $-x^2 + 2x - 5 < 0$.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -2} -x^2 + 2x - 5$.

c) Préciser $\lim\limits_{x \to -2} \left|-x^2 + 2x - 5\right|$

Activité 2

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2) a) Montrer que pour tout réel x on a $\sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$.

b) Déterminer alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

3) Montrer que pour tout réel x on a $f(x) > 0$.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel x_0.
On suppose que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$
Si $f(x) \geq 0$ pour tout x de I, distinct de x_0, alors $\ell \geq 0$.
Si $f(x) \leq 0$ pour tout x de I, distinct de x_0, alors $\ell \leq 0$.

Le résultat du théorème reste vrai lorsque x tend vers x_0^-, x_0^+, $-\infty$ ou $+\infty$.

Activité 3

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel x_0.
On suppose que : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$; $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell'$ et pour tout x de I, différent de x_0, $f(x) \leq g(x)$.
Montrer que $\ell \leq \ell'$. (Indication : considérer la fonction $h = f - g$)

Théorème

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel x_0.
Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$; $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell'$ et pour tout x de I, différent de x_0, $f(x) \leq g(x)$ alors $\ell \leq \ell'$.

Le résultat du théorème reste vrai lorsque x tend vers x_0^-, x_0^+, $-\infty$ ou $+\infty$.

Activité 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)= x^2 \cos(\frac{1}{x})$.

1) Montrer que pour $x \neq 0$ on a : $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$.

2) Que peut-on conjecturer sur $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?

Théorème

Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en x_0 de I.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$; $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell$ et pour tout x de I, différent de x_0, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$

alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Le résultat du théorème reste vrai lorsque x tend vers x_0^- , x_0^+ , $-\infty$ ou $+\infty$.

Activité 5

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel x_0.

On suppose que pour tout x de I, différent de x_0, on a $|f(x)| \leq |g(x)|$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.

a) Montrer que $\forall x \in I - \{x_0\}$ on a : $-|g(x)| \leq f(x) \leq |g(x)|$.

b) En déduire $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Théorème

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel x_0 .

Si pour tout x de I, différent de x_0, on a $|f(x)| \leq |g(x)|$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Le résultat du théorème reste vrai lorsque x tend vers x_0^- , x_0^+ , $-\infty$ ou $+\infty$.

Activité 6

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en x_0 de I et soit ℓ un réel. On suppose que pour tout x de I, différent de x_0 on a :

$|f(x) - \ell| \leq |g(x)|$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.

a) Montrer que $\forall x \in I - \{x_0\}$, $\ell - |g(x)| \leq f(x) \leq \ell + |g(x)|$.

b) Que peut-on conjecturer sur $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$?

Théorème

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel x_0 de I et soit ℓ un réel.

Si pour tout x de I, différent de x_0, on a $|f(x)-\ell| \leq |g(x)|$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

Le résultat du théorème reste vrai lorsque x tend vers x_0^- , x_0^+ , $-\infty$ ou $+\infty$.

Activité 7

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{2x}\right)+3$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $|f(x)-3| \leq |x|$.

b) Déterminer alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Activité 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{1}{x^3}+\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

a) Montrer que pour tout réel non nul x on a $\frac{1}{x^3}-1 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^3}+1$

b) Conjecturer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

Théorème

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en x_0 de I.

Si pour tout x de I, différent de x_0, on a $f(x) \geq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$

Si pour tout x de I, différent de x_0, on a $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$

Le résultat du théorème reste vrai lorsque x tend vers x_0^- , x_0^+ , $-\infty$ ou $+\infty$.

Activité 9

1) a) Montrer que pour tout réel x on a $x-1 \leq x+\cos x \leq x+1$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\cos x$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x+\cos x$.

2) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x+1+2\sin x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-1}{x^2}+\cos\frac{1}{x}$.

Fonctions monotones et limites

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$
Une fonction est dite monotone sur I, lorsqu'elle est croissante sur I ou décroissante sur I.
Une fonction est dite strictement monotone sur I, lorsqu'elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.

Activité 1

Soit f la fonction définie sur [-2, 2] par $f(x)=x|x|+1$.

1) Tracer la courbe représentative de f dans un repère du plan.
2) Etudier le sens de variation de f sur chacun des deux intervalles [-2, 0] et [0, 2].
3) En déduire que pour tout x de [-2, 2] on a $-3 \leqslant f(x) \leqslant 5$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$
* La fonction f est majorée sur I s'il existe un réel M tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant M$
* La fonction f est minorée sur I s'il existe un réel m tel que pour tout $x \in I$, $m \leqslant f(x)$.
* La fonction f est dite bornée sur I s'il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in I$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Activité 2

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{3-\sin x}$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
2) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{3-\sin x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{3-\sin x}$.

Activité 3

Soit la fonction f définie sur $\left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$

1) Montrer que f est croissante sur $\left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$
2) La fonction f est-elle majorée sur $\left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$?
3) Quelle est la limite de f à gauche en π ?

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I =]a, b[(ou I =]a,+∞[ ).

Si f est croissante et non majorée sur I alors $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$ (ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$)

Activité 4

Soit f une fonction décroissante et non minorée sur un intervalle I =]a, b[.

1) Montrer que (-f) est croissante et non majorée sur I .

2) En déduire que $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = -\infty$

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I =]a, b[(ou I =]a,+∞[ ).
Si f est décroissante et non minorée sur I alors $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = -\infty$ $\left(\text{ou } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty\right)$

Activité 5

On considère les fonctions f et g définies par

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \qquad \text{et} \quad g : \left]0, +\infty\right[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto -\frac{2}{\cos x} + 1 \qquad\qquad x \mapsto \frac{x-1}{x}$$

1) Montrer que f est décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et g est croissante sur]0, +∞[.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

3) La fonction f est-elle majorée ? minorée ?

4) Montrer que g est majorée sur]0, +∞[.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I =]a, b[
(ou I =]a,+∞[ ).

* Si f est croissante et majorée sur I alors f admet une limite finie à gauche en b(ou en +∞).

* Si f est décroissante et minorée sur I alors f admet une limite finie à gauche en b(ou en +∞).

Limite et continuité d'une fonction composée

Activité 1

On considère les fonctions f, g et h définies par $f(x)= 4x^2$, $g(x)= \sqrt{x}$ et $h(x) = 2|x|$

1) Montrer que pour tout réel x on a g(f(x)) = h(x)

2) Préciser $\lim\limits_{x \to -1} g(f(x))$ et comparer le résultat trouvé avec g(f(-1)).

Définition

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur I et J telles que pour tout $x \in I$ on a $f(x) \in J$. La fonction qui à tout réel x de I associe le réel $g(f(x))$ est appelée la composée de f par g. On la note $g \circ f$, on lit : « g rond f » et on écrit $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Activité 2

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \dfrac{1 + x}{1 - x}$ et $g(x) = \sqrt{x}$

1) Donner l'expression de $(g \circ f)(x)$.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to 1^-} (g \circ f)(x)$.

Théorème

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur I et J telles que pour tout $x \in I$ on a $f(x) \in J$. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ $(\ell \in \mathbb{R})$ et g est continue en ℓ alors $\lim\limits_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g(\ell)$

Le résultat du théorème reste vrai lorsque x tend vers x_0^- , x_0^+ , $-\infty$ ou $+\infty$.

Activité 3

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur I et J telles que pour tout $x \in I$ on a $f(x) \in J$. Soit x_0 un élément de I. Montrer que si f est continue en x_0 et g est continue en $y_0 = f\left(x_0\right)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Théorème

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur I et J telles que pour tout $x \in I$ on a $f(x) \in J$. Soit x_0 un élément de I. Si f est continue en x_0 et si g est continue en $f\left(x_0\right)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

Activité 4

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit x_0 un réel de I.

1) Montrer que si f est positive sur I et continue en x_0 alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en x_0.

2) Montrer que si f est continue en x_0 alors la fonction $|f|$ est continue en x_0 .

Activité 5

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$.

1) Montre que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

2) a) Montrer que pour tout x > 0 on a : $f(\frac{1}{x}) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(\frac{1}{x})$; comparer avec $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

c) Conclure

Théorème

* Soit f une fonction définie sur un intervalle du type]0, +∞[.On a :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ existe $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} f(\frac{1}{x})$ existe. Dans ce cas on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(\frac{1}{x})$.

* Soit f une fonction définie sur un intervalle du type]-∞, 0[.On a :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ existe $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} f(\frac{1}{x})$ existe. Dans ce cas on a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(\frac{1}{x})$.

Activité 6

1) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\sin(\frac{1}{x})$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\cos(\frac{1}{x}) - x^2$

2) Calculer de deux façons $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x+1}{2x+3}\right)^6$

Activité 7

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 + x^2 + x\right)^4$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left|x^2 - x\right|$; $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{\frac{\sin x}{x^3}}$

Théorème

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur I et J telles que pour tout $x \in I$ on a $f(x) \in J$.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to \ell} g(x) = \ell'$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \ell'$

(x_0, ℓ et ℓ' pourront être finis ou infinis).

Continuité sur un intervalle
Image d'un intervalle

Activité 1

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x^2+x} - x$.

Déterminer l'ensemble de continuité de f.

Définition

Soit a et b deux réels tels que a < b.
* Une fonction définie sur un intervalle] a, b[est dite continue sur]a, b[si elle est continue en tout réel de]a, b[.
* Une fonction définie sur un intervalle] a, b] est dite continue sur]a, b] si elle est continue sur]a, b[et continue à gauche en b.
* Une fonction définie sur un intervalle [a, b[est dite continue sur [a, b[si elle est continue sur]a, b[et continue à droite en a.
* Une fonction définie sur un intervalle [a, b] est dite continue sur [a, b] si elle est continue sur]a, b[, continue à droite en a et continue à gauche en b.
* Une fonction définie sur un intervalle]a,+∞[(resp. sur]-∞,a[) est dite continue sur]a,+∞[(resp. sur]-∞,a[) si elle est continue en tout réel de]a,+∞[(resp. de]-∞,a[).
* Une fonction définie sur un intervalle [a,+∞[est dite continue sur [a,+∞[si elle est continue sur]-∞,a[et continue à droite en a.
* Une fonction définie sur un intervalle]-∞,a] est dite continue sur]-∞,a] si elle est continue sur]-∞,a[et continue à gauche en a.

Activité 2

Justifier chacune des affirmations suivantes:

a) La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction $x \mapsto \dfrac{3x^2+2x+1}{x+1}$ est continue sur l'intervalle $\left]-1, +\infty\right[$.

c) La fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est continue sur l'intervalle $\left[-1 , 1\right]$.

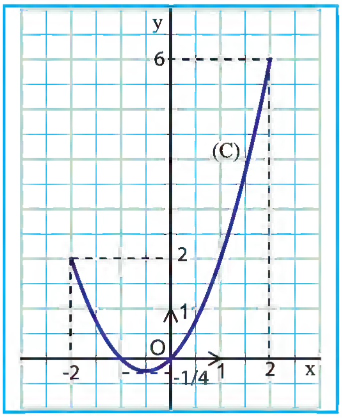
Image d'un intervalle par une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On désigne par f(I) l'ensemble des réels f(x) tels que $x \in I$. On note $f(I)= \{f(x) ; x \in I\}$.

Activité 3

Soit la fonction $f: x \mapsto x^2+x$ définie dans [-2, 2].

(C) étant sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan. (Voir figure ci-contre)



1) Justifier que f est continue sur l'intervalle [-2, 2].

2) Reproduire le graphique ci-contre et représenter chacun des ensembles de réels suivants : f([-2,-1[) ; f([-1,0]) et f([0, 2]).

3) a) Montrer que pour tout x de [0, 2], le réel f(x) appartient à l'intervalle [0, 6].

b) Montrer que pour tout y de [0, 6] il existe un réel x de[0, 2] tel que y = f(x).

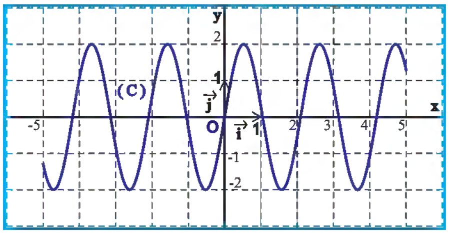
c) En déduire f([0, 2]).

4) a) Résoudre graphiquement les équations f(x)=0 et f(x)=1.

b) Résoudre algébriquement les équations f(x)=0 et f(x)=1.

Activité 4

Soit f la fonction définie dans l'intervalle]-5, 5[par f(x) = 2 sin3x et dont la représentation graphique est illustrée par la figure ci-contre :



1) a- Justifier que f est continue sur l'intervalle]-5, 5[.

b- Quelle est l'image de]-5, 5[par f ?

2) Résoudre graphiquement, dans]-5, 5[, l'équation f(x) = 0.

3) Résoudre graphiquement l'équation f(x) = 1.

4) Résoudre algébriquement, dans $[-\pi, \pi]$, les équations f(x)=0 et f(x)=1.

Activité 5

1) Représenter dans un repère du plan la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = x^2+1 & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = -2 & \end{cases}$$

2) Montrer que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

3) Déterminer l'ensemble f($\mathbb{R}$). Cet ensemble est-il un intervalle ?

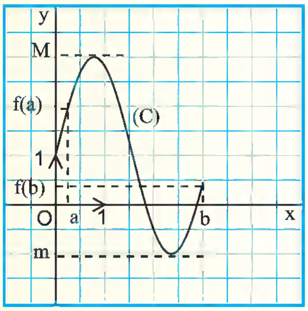
4) Déterminer l'ensemble $f(]-\infty,0[)$. Cet ensemble est-il un intervalle ?

5) Résoudre graphiquement l'équation f(x)=k où k est un réel donné. Discuter.

Théorème

* L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

* L'image d'un intervalle fermé borné [a, b] par une fonction continue f est un intervalle fermé borné [m,M] où m et M sont respectivement le minimum et le maximum de f sur l'intervalle [a, b].



Activité 6

1) Soit la fonction $f : x \mapsto x^2$. Déterminer algébriquement, l'image de] -1, 1 [par f.

2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = 2x+1 & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = -2 \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de g sur $]-\infty,0]$.

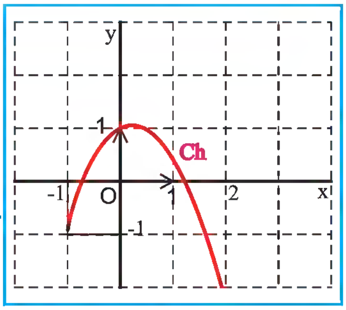
2) Déterminer l'image de l'intervalle $]-\infty,0]$ par g.

Résolution d'équations de la forme f(x) = k

Activité 1

Soit h la fonction définie sur [-1, 2] par $h(x) = \sqrt{x+1} - x^2$

et représentée dans le graphique ci-contre :



1) Justifier la continuité de la fonction h sur l'intervalle [-1, 2].

2) Résoudre graphiquement l'équation $\sqrt{x+1} - x^2 = 0$.

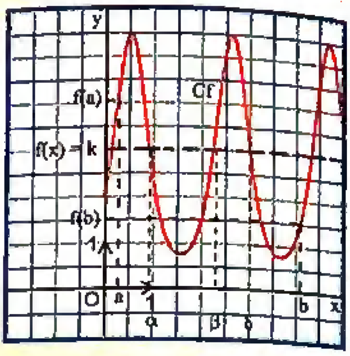
3) a) Calculer h (1) et h (2) et justifier que 0 appartient à l'intervalle h([1, 2]) .

b) En déduire que l'équation h(x) = 0 possède une solution α dans l'intervalle]1, 2[puis prouver que $1 < \alpha < 1{,}5$.

4) Montrer de même que h(x) = 0 possède une deuxième solution β dont on donnera un encadrement d'amplitude 0,5.

Théorème des valeurs intermédiaires

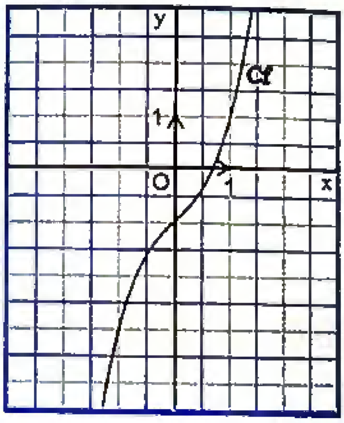
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.
Soit a et b deux réels de I tels que a< b.
Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), l'équation f(x) = k possède au moins une solution dans l'intervalle [a,b].



Commentaire :
Le théorème des valeurs intermédiaires affirme que la courbe représentative d'une fonction continue sur un intervalle ne présente ni trous ni sauts.

Activité 2

On a représenté dans le graphique ci-contre la fonction $f : x \mapsto x^3+x-1$



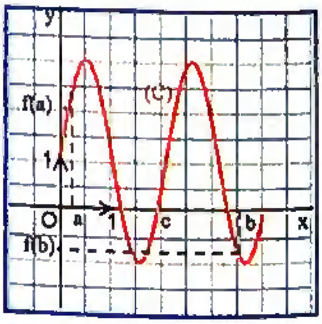
1) Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2) Conjecturer sur l'ensemble des solutions de l'équation f(x)=0 dans [0,1].
3) Comparer 0 avec f(0) et f(1).

Corollaire 1

Si f est une fonction continue sur un intervalle [a, b] et vérifiant f(a).f(b) < 0 alors il existe au moins un réel c appartenant à l'intervalle ouvert]a, b[tel que f(c) = 0.

Remarque

Ce corollaire indique que lorsque f est continue et change de signe sur un intervalle [a, b] alors sa courbe représentative coupe l'axe des abscisses au moins une fois en un point d'abscisse appartenant à cet intervalle.



Corollaire 2

Si f est une fonction continue sur un intervalle et ne s'annule en aucun réel de cet intervalle alors elle garde un signe constant sur cet intervalle.

Activité 3

(unicité de la solution)

Soit la fonction $f : x \mapsto 2x^3 + 2x - 1$

1) Montrer que f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que l'image de l'intervalle [0, 1] par f est l'intervalle [-1, 3].

3) Montrer que l'équation f(x)=0 admet une solution unique α dans l'intervalle]0, 1[.

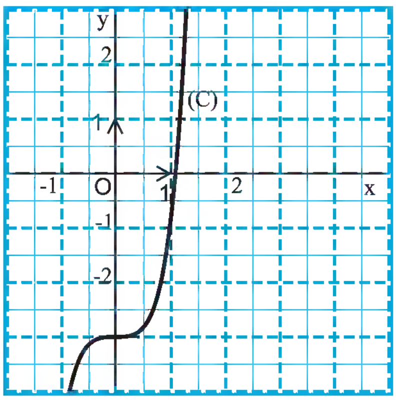
4) Donner une valeur approchée, à 10^{-2} près par défaut, de α .

Théorème

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle [a, b] et vérifiant f(a).f(b) < 0 alors il existe un réel unique c appartenant à l'intervalle ouvert]a, b[tel que f(c) = 0.

Activité 4

Dans le plan muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on a représenté la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^5 + x^3 - 3$,
(voir graphique ci-contre)



1) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que f est strictement croissante sur [0, 2].
3) a) Calculer f (0) et f (2).
   b) En déduire que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique appartenant à l'intervalle [0, 2].
4) On désigne par α la solution de l'équation f(x) = 0 dans l'intervalle [0, 2].

a) Calculer f (1) et en déduire que α appartient à [1, 2].
b) Calculer f (1,5) et en déduire une valeur approchée, à 0,5 près par défaut, de α.
c) Calculer f (1,25) et en déduire une valeur approchée, à 0,25 près par défaut, de α.

Commentaires :

Pour trouver une valeur approchée d'une solution α de l'équation f(x) = 0, dans un intervalle [a, b], on utilise **la dichotomie** de la façon suivante :

- On partage [a, b] en deux intervalles [a, c] et [c, b] de même amplitude.
- On détermine lequel de ces deux intervalles contient α en utilisant le corollaire1.
- On recommence avec cet intervalle les deux étapes précédentes.
- On s'arrête lorsqu'on a obtenu un encadrement satisfaisant de α.

(Dichotomie signifie : division en deux)

Activité 5

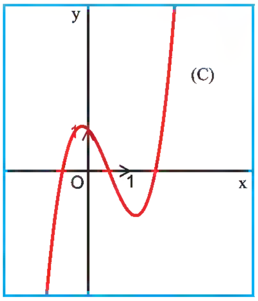
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 1$.

a) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α dans l'intervalle [0, 1].

b) Utiliser la méthode de dichotomie pour détermier une valeur approchée de α .

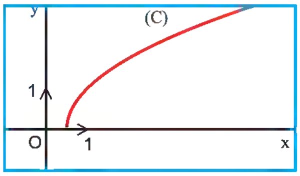
Limites et comportement asymptotique

Activité 1



1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 1$ dont la courbe est représentée par le graphique ci-contre. Montrer que la courbe (C) de f admet au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ des branches paraboliques de direction celle de l'axe des ordonnées.

2) On a représenté dans le graphique ci-contre la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x-1}$ définie sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$:



Montre que sa courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses.

Branches paraboliques d'une courbe :

* Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $-\infty$ (resp. quand $x \to -\infty$)

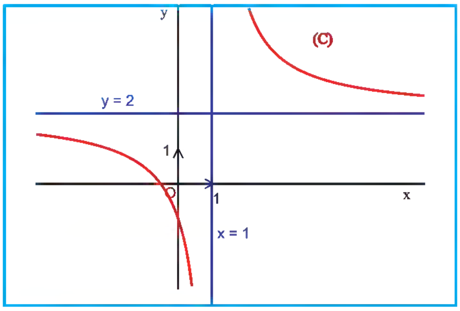
alors (C_f) admet en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.

* Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (resp. quand $x \to -\infty$)

alors (C_f) admet en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ et représentée ci-contre :
Montrer que sa courbe possède une asymptote horizontale et une asymptote verticale.

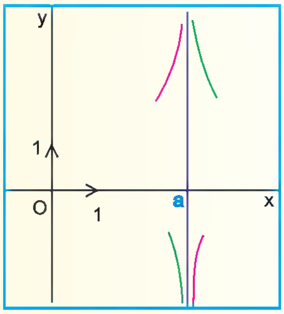


Asymptotes parallèles aux axes du repère :

* On dit que la droite Δ : x = a est une asymptote à la courbe de f dans l'un des quatre cas suivants :

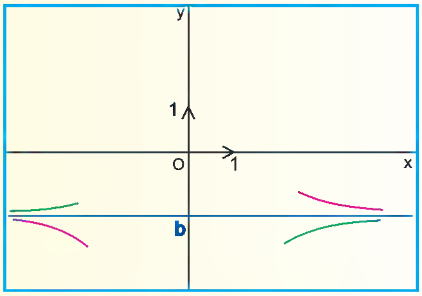
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$



* On dit que la droite Δ : y = b est une asymptote à la courbe de f lorsque

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$



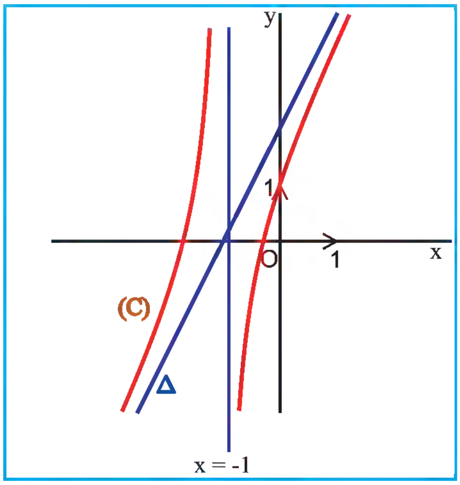
Activité 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^2+4x+1}{x+1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

a) Montrer que la droite D : x = -1 est une asymptote à (C).

b) Montrer que pour tout x différent de -1 on a $f(x) = 2x+2 - \dfrac{1}{x+1}$

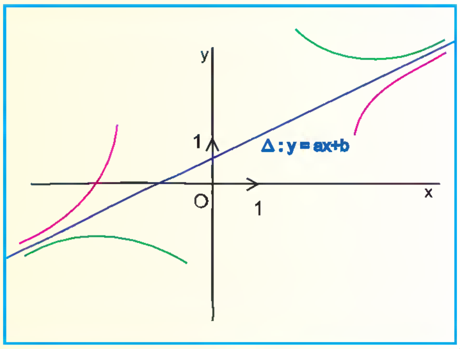
c) Prouver alors que la droite Δ : y = 2x +2 est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.



Asymptote oblique à une courbe :

On dit que la droite Δ : y = ax + b est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de -∞ (resp. de +∞) si on a :

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ (resp. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$)



Activité 4

1) Soit la fonction $f: x \mapsto \dfrac{2x^2+x+1}{x^2+x-2}$

a) Donner l'ensemble de définition et préciser le domaine de continuité de f.
b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
c) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2) Soit la fonction $g: x \mapsto \dfrac{x^2+x+1}{x-2}$

a) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x \neq 2$ on a : $g(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-2}$.
b) Déterminer les asymptotes à la courbe représentative C de g.

3) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[h(x)-x\right]$

b) Montrer que la droite D : y = x + 0,5 est une asymptote oblique à la courbe représentative (C) de h au voisinage de +∞.

c) Etudier le comportement asymptotique de la courbe (C) au voisinage de -∞.

4) Soit k la fonction définie par $k(x) = x+\sqrt{x}$. Montrer que sa courbe représentative admet une branche parabolique de direction la droite D : y = x au voisinage de +∞.

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type [c, +∞[.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = a$ ($a \in \mathbb{R}^*$) et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right] = b$ ($b \in \mathbb{R}$)
alors la droite D : y = ax + b est une asymptote oblique à la courbe représentative de f au voisinage de +∞ .

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = a$ ($a \in \mathbb{R}^*$) et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right] = +\infty$ ou $-\infty$
alors la courbe représentative de f admet au voisinage de +∞ une branche parabolique de direction celle de la droite D : y = ax.
Les résultats sont vrais pour une fonction f définie sur un intervalle du type]-∞, c] et x tendant vers -∞ .

RÉSUMÉ DU COURS

- **Prolongement par continuité :**

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel x_0 de I.
Si f admet une limite finie ℓ en x_0 alors la fonction p définie sur I par

$p(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}$ est le prolongement par continuité de f en x_0 et p est continue en x_0.

- **Limite et ordre :**

- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en x_0 de I.
  On suppose que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Si f(x) est positif pour tout x de I, distinct de x_0, alors ℓ est positif.
Si f(x) est négatif pour tout x de I, distinct de x_0, alors ℓ est négatif.

- Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel x_0.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$; $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell'$, et pour tout x de I, différent de x_0, $f(x) \leq g(x)$ alors $\ell \leq \ell'$.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$; $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell$ et pour tout x de I, différent de x_0, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$
alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Si pour tout x de I, ($\neq x_0$), on a $|f(x)| \leq |g(x)|$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

Si pour tout x de I, différent de x_0, on a $|f(x) - \ell| \leq |g(x)|$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Si pour tout x de I, distinct de x_0, on a $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

Si pour tout x de I, distinct de x_0, on a $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

- **Fonctions monotones et limite:**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I =]a, b[(ou I =]a, $+\infty$[ ).

* Si f est croissante et non majorée sur I alors $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$ (ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$)
* Si f est décroissante et non minorée sur I alors $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = -\infty$ (ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$)
* Si f est croissante et majorée sur I alors f admet une limite finie à gauche en b (ou en$+\infty$).

- **Limite d'une fonction composée :**

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g telles que pour tout x de D_f on a f(x) appartient à D_g .

* Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ et $\lim\limits_{x\to \ell} g(x)=\ell'$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} g\circ f(x)=\ell'$

(x_0, ℓ et ℓ' peuvent être finis ou infinis).

En particulier si $\ell \in D_g$ et g est continue en ℓ et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} gof(x)=g(\ell)$

c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to x_0} gof(x)=g(\lim\limits_{x\to x_0} f(x))$

* Soit x_0 un élément de D_f.

Si f est continue x_0 et si g est continue en $f(x_0)$ alors gof est continue en x_0.

*Si f est continue sur Df et si g est continue sur Dg alors gof est continue sur D_f.

* Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.

- Si f est positive et continue en x_0 alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en x_0.
- Si f est continue en x_0 alors la fonction $|f|$ est continue en x_0.

- **Continuité sur un intervalle- Image d'un intervalle :**

* L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
* L'image d'un intervalle fermé borné [a, b] par une fonction continue est un intervalle fermé borné.

- **Résolution d'équations de la forme f(x) = k :**

Théorème des valeurs intermédiaires : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.

Soit a et b deux réels de I tels que a< b.

Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), l'équation f(x) = k possède au moins une solution dans l'intervalle [a,b].

* Si f est une fonction continue sur un intervalle [a, b] et vérifiant f(a).f(b) < 0 alors il existe au moins un réel c appartenant à l'intervalle ouvert]a, b[tel que f(c) = 0.
* Si f est une fonction continue sur un intervalle et ne s'annule en aucun réel de cet intervalle alors elle garde un signe constant sur cet intervalle.
* Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle [a, b] et vérifiant f(a).f(b) < 0 alors il existe un réel unique c appartenant à l'intervalle ouvert]a, b[tel que f(c) = 0.

- **Asymptote oblique à une courbe :**

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type [c, +∞[.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (ou $-\infty$) et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=a$ ($a\in\mathbb{R}^*$) et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=b$ ($b\in\mathbb{R}$)

alors la droite D : y = ax + b est une asymptote oblique à la courbe représentative de f au voisinage de +∞ . (Si b = +∞ ou -∞ la courbe possède une branche parabolique de direction la droite D : y = ax au voisinage de +∞).

Le résultat est vrai pour une fonction f définie sur un intervalle du type]-∞, c] et x tendant vers -∞ .

AVEC L'ORDINATEUR

Activité 1

Soit f (x) = x^3 - x^2 -1.

1) Sur une feuille de calcul d'un tableur, entrer les données ci-dessous :
   - Placer x dans A_2 et f(x) dans B_2 ;
   - Placer (-1) dans A_3 et écrire la formule = A_3*A_3* A_3 - A_3* A_3 -1 dans B_3 ;
   - Ecrire la formule = A_3 + 1 dans A_4 ;

Sélectionner la ligne 3 puis étendre cette formule jusqu'à la ligne 10.

2) a- Sélectionner les colonnes A et B de la ligne 2 à la ligne 10.
b- Choisir successivement dans les menus suivants :

Avec Excel : insertion- Graphique - Nuage de points –Terminer.
c- Conjecturer sur l'ensemble des solutions de l'équation f (x) = 0.

3) Le tableau de données et le graphique laissent apparaître que f (x) = 0 admet une solution comprise entre 1 et 2 .Pour obtenir un encadrement plus précis de cette solution placer :
* en A_3 : 1 et en A_4 : = A_3 + 0.1 sélectionner la ligne 4 puis étendre la formule jusqu'à la ligne 10.
* Sélectionner les colonnes A et B de la ligne 2 à la ligne 10 et insérer le graphique Examiner le résultat, puis continuer la recherche (mettre dans A_3 : 1 et dans A_4,= A_3 + 0.05).

4) Montrer que l'équation f (x) = 0 admet, dans $\mathbb{R}$, une solution et une seule α et vérifier que α appartient à l'intervalle]1.45, 1.5[.

Activité 2

Calcul d'une limite en utilisant un logiciel de calcul formel :

<u>Exemple :</u> Soit à calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} x\sin(\frac{1}{x})$

- Ouvrir le logiciel Derive.
- Taper l'expression suivante : x *sin(1/x) pour exprimer $x\sin(\frac{1}{x})$.
- Valider par entrée (l'expression $x\sin(\frac{1}{x})$ va apparaître sur l'écran)
- Cliquer sur la raccourcie lim (on obtient une fenêtre où il y'a le nom de la variable x et le point limite *).
- Pour point limite compléter par +∞ puis appuyer sur simplifier.
- Il va apparaître sur l'écran les étapes et le résultat final de la limite demandée

c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\sin(\frac{1}{x}) = 1$

<u>Application :</u> Déterminer à ton tour, en utilisant le logiciel Derive, chacune des limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x \ ; \quad \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} \ ; \quad \lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2+x};$$

(**N.B** : l'expression $\sqrt{x^2+1} - x$ s'écrit $\text{sqrt}(x^2+1) - x$ ou $\sqrt{\ }(x\wedge 2 \ +1) - x)$

EXERCICES ET PROBLÈMES

1 Soit f la fonction définie par $f(x)=(x-2)^3$.

a) Déterminer la limite de f en 2.

b) Déterminer les limites de $\frac{1}{f}$ à droite en 2 et à gauche en 2.

c) Que représente la droite d'équation $x = 2$, pour la courbe de $\frac{1}{f}$?

2 1) Représenter chacune des fonctions

$$f : x \to \frac{2x}{x+1} \text{ et } g : x \to \frac{-x+1}{2x+1}$$

2) On désigne par C_f et C_g les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Préciser les asymptotes à ces courbes, aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.

3 Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x^2+x+2\right);\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3+2x+1}{x^2-x-1}\right);$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{(x-1)^2}\right);\ \lim_{x\to-\infty}\left(-x-\sqrt{1-x}+1\right);$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+\sqrt{x}}{(x-1)^2}\right);\quad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x}\right)$$

4 Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x}-x-1\right)\ ;\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3};\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3};\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x+1+3\cos x\right);\ \lim_{x\to-\infty}\left(2x+1+3\cos x\right)$$

5 Etudier chacune des limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{1}{x\sqrt{x-2}}$ b) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{(x-1)^3}$

c) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{2x^3+x^2-x-2}{x^2+3x-4}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$ f) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$

6 On considère les fonctions suivantes :

$$f(x)=\frac{x}{(1+\sqrt{x})^2}\ ;\ g(x)=\frac{x^2+4}{2x}$$

$$\begin{cases} h(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{x+4} & \text{si } x\neq-4 \\ h(-4)=a\ ;\ a \text{ est un réel.} \end{cases}$$

1) a- Donner l'ensemble de définition et préciser le domaine de continuité de chacune de ces fonctions.

b- Pour chacune de ces fonctions donner les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

2) Pour la fonction h, déterminer le réel a pour qu'elle soit continue en $x_0 = -4$.

7 Pour $x \in [-\frac{5}{2}, 2[\cup]2, +\infty[$ on pose

$$g(x)=\frac{x-2}{x+1-\sqrt{2x+5}}$$

a) Montrer que pour x différent de -2 et $x \in [-\frac{5}{2}, 2[\cup]2, +\infty[$, $g(x)=\frac{x+1+\sqrt{2x+5}}{x+2}$

b) En déduire que g admet un prolongement par continuité en $x_0 = 2$ que l'on précisera.

8 Trouver chacune des limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg2x}\ ;\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}\ ;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{4x^2}\ ;\ \lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^2}\ ;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg^2x}{1-\cos x}\ .$$

9 1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par.

$f(x)=\dfrac{1}{2+\cos x}$ Montrer que f est bornée.

2) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2+\cos x}$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{2+\cos x}$

10 Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2\sin x + 1 - \cos x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en 0.

11 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

12 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|\sqrt{|x|}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f sur]-1, 1[.

13 Soit la fonction f définie par

$$\begin{cases} f(x) = x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ f(x) = 2x-1 & \text{si } x \in]1,+\infty[\end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur [0, 2].
2) Déterminer l'image de [0, 2] par f.
3) Déterminer l'image de [0, +∞[par f.
4) Tracer, dans un repère orthonormé du plan la courbe C représentative de f.

14 fonction g définie par $g(x)= -\dfrac{1}{x^2}$.

a- Etudier la continuité de g sur $\mathbb{R}^*$.
b- Etudier le sens de variation de g sur chacun des intervalles]-∞, 0[et]0, +∞[.
c- Déterminer les images des ces intervalles par la fonction g.

15 a- Montrer que l'équation $x^5 +3x -2 = 0$ possède une solution réelle unique α appartenant à l'intervalle]0, 1[.

b- Vérifier que $\dfrac{1}{2}<\alpha<\dfrac{3}{4}$

16 1) En considérant la fonction $f : x \mapsto x^3+2x-1$ pour $x\in\ ]-\infty, 1[$, montrer que l'équation $x^3+ 2x = 1$. admet une solution unique x_0 telle que $0 < x_0 < 1$.

2) Déterminer une valeur approchée à 0,1 prés par défaut de x_0.

17 1) Montrer que l'équation $\sin x -2x +1 = 0$ admet une solution unique β dans $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

En utilisant la méthode de dichotomie, déterminer une valeur approchée de cette solution à $\dfrac{\pi}{8}$ prés .

2) Montrer que l'équation $\dfrac{3}{2}x - tgx = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $\left]\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right[$.

18 On considère la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.
Montrer que l'équation P(x)=0 admet une racine réelle comprise entre 1,6 et 1,7.

19 Soit P la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^6 - x - 1$.
a) Montrer que l'équation P(x)= 0 admet une racine réelle unique α dans l'intervalle [1, 2].
b) Utiliser la dichotomie pour donner une valeur approchée par défaut de cette racine à 10^{-1} prés.
c) Vérifier que $1,2 < \alpha < 1,25$.

20 Soit la fonction : $f(x)=x^2-3x|x|$.

1) Etudier la continuité puis les variations de f sur chacun des intervalles]-∞, 0[et]0, +∞[.

2) Représenter graphiquement f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3) Déterminer les images des intervalles et]-∞, 0[et]0, +∞[par f.

21 1) Représenter sur un même graphique (unité 3 cm) la parabole d'équation $y = x^2$ et la droite D d'équation $y = x + 1$.
2) Etablir à l'aide du graphique que l'équation f(x) = 0 admet deux solutions, où $f(x) = x^2 - x - 1$,l'une positive qu'on notera α et l'autre négative qu'on notera β.

3) a) Placer sur la parabole et la droite D les points d'abscisses respectives $\frac{3}{2}$ et $\frac{5}{3}$
b) Conjecturer alors à l'aide du graphique, un encadrement de α.

4) a) Expliquer par le graphique que sur l'intervalle [0,+∞[, il est équivalent de dire que $x < \alpha$ ou $f(x) < 0$.

b) En déduire que $\frac{3}{2} < \alpha < \frac{5}{3}$
c) Montrer le résultat précédent.
5) a) Montrer que $1 - \alpha$ est une solution négative de l'équation f(x) = 0.
b) En déduire à l'aide de la question 4), un encadrement de β .

22 Soit la fonction h définie par
$$h(x)=\frac{x}{|x|-1}$$

1) Préciser le domaine de définition de h et montrer que h est une fonction impaire, tracer alors la courbe (C') de h et préciser ses asymptotes.
2) Dresser le tableau de variation de h.
3) Déterminer graphiquement et suivant les valeurs du réel k le nombre des solutions de l'équation $x + k = k|x|$.

23 On considère la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$.
1) Calculer P(-1), $P(-\frac{1}{2})$, P(0) et P(1).

2) a) Montrer que l'équation P(x) = 0 admet dans $\mathbb{R}$ trois racines distinctes qu'on les notera x_1, x_2 et x_3 avec $x_1 < x_2 < x_3$.
b) Vérifier que $-1 < x_1 < -\frac{1}{2} < x_2 < 0 < x_3 < 1$
3) a) Montrer que pour tout réel α on a :
$\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)$.
b) Montrer alors, que
$$x_1 = \cos\left(\frac{11\pi}{9}\right),\ x_2 = \cos\left(\frac{7\pi}{9}\right)$$
$$\text{et } x_3 = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right).$$

24 On considère la fonction f définie par
$$f(x) = 2x + \sqrt{2x - 1}$$
Etudier les branches infinies de sa courbe C et tracer une allure de C.

APERÇU HISTORIQUE

Augustin Louis Cauchy
(21 août 1789 [Paris] - 23 mai 1857 [Sceaux])

Augustin Louis Cauchy est le mathématicien français le plus prolifique (avec presque 800 articles publiés). Ses idées politiques et religieuses ont pourtant à plusieurs reprises contrarié sa carrière. Il est né le 21 août 1789, au lendemain des événements de juillet. Son père, premier commis du lieutenant de police de Paris, voyait sa vie menacée par la colère du peuple. Il s'était, pour quelques temps, réfugié avec sa famille à Arcueil. Dès le plus jeune âge, il prend en main l'éducation de son fils, et Augustin est admis à l'Ecole Polytechnique. Celle-ci a à peine 10 ans d'âge, mais déjà les savants les plus prestigieux y enseignent.

A la sortie de l'école, Cauchy est admis dans le corps le plus prestigieux (celui des Ponts et Chaussées), et en 1810, nommé aspirant ingénieur, il participe à la construction du port de Cherbourg. C'est à Cherbourg que Cauchy commence ses recherches mathématiques sur les polyèdres, et ses premiers résultats sont prometteurs. Mais, fatigué par le cumul de la charge d'ingénieur et des longues veillées de recherche, Cauchy connait un état dépressif qui s'éternise et le pousse à retourner vivre chez ses parents.

A Paris, il cherche une situation en adéquation avec sa volonté de faire de la recherche mathématique pure. Malgré l'appui de son père, il se voit devancé par d'autres pour plusieurs postes, avant d'être élu, en 1814, à la société philomathique, antichambre de l'Académie (alors nommé Institut). A la chute de l'empire, Cauchy, royaliste et dévot, voit de nombreux protecteurs accéder au pouvoir. Leur influence permet sa nomination comme professeur d'analyse à l'Ecole Polytechnique en 1815.

Augustin Louis Cauchy est sans nul doute celui qui développa et précisa les règles essentielles du calcul sur les limites.

Le cours d'analyse que Cauchy professe à l'Ecole Polytechnique est décrié tant par ses élèves que par ses collègues des autres matières. Pourtant c'est ce cours, publié en 1821 et 1823, qui devait devenir la référence de l'analyse au XIXès. en mettant en avant la rigueur, et l'intuition. C'est la première fois que de vraies définitions de limites, de continuité, de convergence de suites, de séries, sont énoncées.

Entre 1821 et 1829, Cauchy publie trois ouvrages, et en particulier le « Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal » (1823), dans lesquels l'idée de limite y est clairement explicitée. Il dit : « lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres ».

Il donne une des premières explications de l'infiniment petit. Il écrit : « on dit qu'une quantité variable devient infiniment petite lorsque sa valeur numérique décroît indéfiniment de manière à converger vers la limite zéro ».

De ce fait, Cauchy détermine la dérivée d'une fonction continue, par l'approche des limites de cette fonction. Il n'a cependant pas vu le rapport qui existait entre dérivée et dérivabilité, ce que fera Dirichlet en 1829.