Chapitre 6

SUITES REELLES

Pour commencer
Cours

- Revoir
- Suites minorées, suites majorées
- Variation d'une suite
- Opérations sur les suites
- Suites convergentes - suites divergentes
- Opérations sur les limites des suites
- Limites et ordre
- Exemples de suites récurrentes

Avec l'ordinateur
Exercices et problèmes
Math culture

Pour commencer

Activité 1

Cocher la ou les réponse(s) correcte(s).

1) Soit u la suite définie sur IN par : $u_n = 3-2n$ u_2 est égal à :	-1	
	1	
2) Soit u la suite définie par $u_n = \dfrac{2n+5}{n^2-2n}$	u_0 n'existe pas	
	$u_1 = 7$	
	$u_1 = -7$	
3) u étant une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. Le terme général de la suite u est :	$u_n = u_{n-1} + r$	
	$u_n = u_0 + nr$	
	$u_n = nu_0 + r$	
4) Soit u la suite définie sur IN par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2$ u_{20} est égal à :	7,5	
	21	
	41	
5) La suite définie sur IN par : $u_n = \dfrac{n+30}{4}$ est une suite arithmétique de raison	7,5	
	$\dfrac{1}{4}$	
	$\dfrac{n}{4}$	
6) u étant une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. le terme général de la suite u est	$u_n = q^n u_0$	
	$u_n = q^{n+1} u_0$	
	$u_n = q\, u_{n-1}$	
7) La suite définie sur IN par : $u_n = 2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ est Une suite géométrique de raison	n	
	$\dfrac{1}{3}$	
	2	

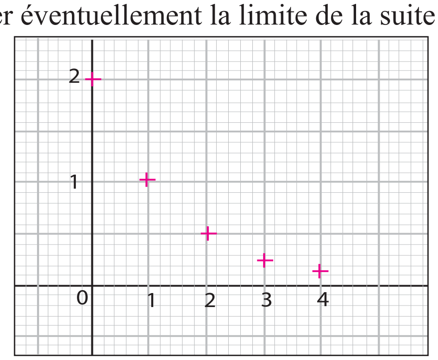
Activité 2

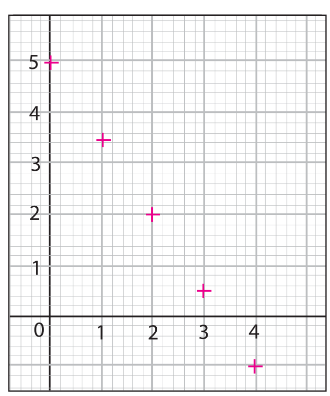
Dans chacun des cas suivants, on représente graphiquement les premiers termes d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique ou géométrique.

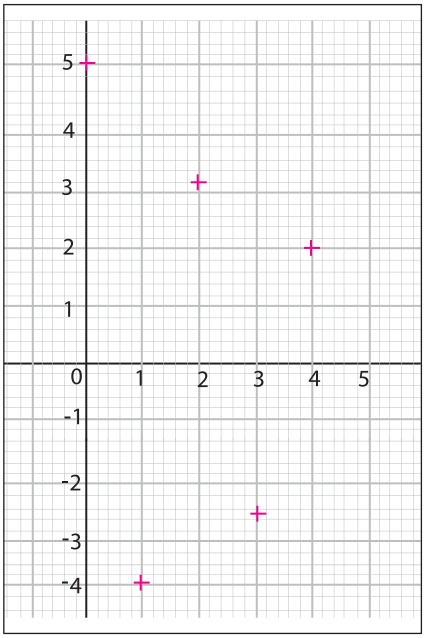
1- Indiquer la nature de la suite et sa raison.

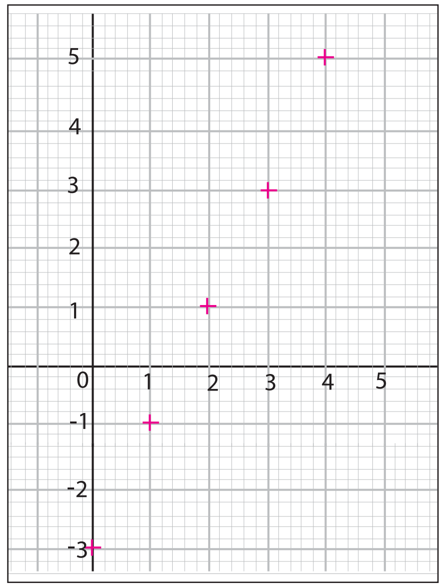
2- Donner une expression de u_n en fonction de n

3- Déterminer éventuellement la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.









Activité 3

1) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 4$.

a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

b) Exprimer u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

c) Soit $n \in IN^*$, exprimer la somme $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$ en fonction de n .

2) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = -3$.

a) Calculer v_1, v_2 et v_3.

b) Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

c) Soit $n \in IN^*$, exprimer la somme $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$ en fonction de n .

Activité 4

1- Démontrer par récurrence chacune des propriétés suivantes :

a) Pour tout entier naturel n , $1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

b) Pour tout entier naturel n , $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2- On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3}{u_n - 1}$

Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \le 0$.

Cours

1) Revoir :

Activité 1

Soit u la suite définie sur IN par
$u_0 = -1$ et $u_{n+1} = 2 + u_n$

1) Vérifier que la suite u est arithmétique et déterminer sa raison.
2) Exprimer u_n en fonction de n.
3) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$
4) Soit $n \in IN^*$, exprimer la somme $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$ en fonction de n .

> Soit u une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r non nul
> – Si $r > 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
> – Si $r < 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Activité 2

Un marteau frappe toutes les 5 secondes une pièce métallique dont l'épaisseur initiale est 1cm. A chaque coup, l'épaisseur du métal diminue de 1%.
Soit u_n l'épaisseur en cm de la pièce après n coups.

1- Calculer u_1, u_2 et u_3.
2- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $u_n = (0,99)^n$
3- En déduire que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q.
4- Déterminer le nombre de coups minimal pour que l'épaisseur de la pièce soit inférieur à 5mm.
5- Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Activité 3

Calculer la limite, lorsqu'elle existe, de chacune des suites $(u_n)_{n \in IN}$, $(v_n)_{n \in IN}$ et $(w_n)_{n \in IN}$:

a) $u_n = (1 - \sqrt{3})^n$.
b) $v_n = (-2)^{n+1}$.
c) $w_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,
$3w_{n+1} - 4w_n = 0$.

> Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 \neq 0$ et de raison $q \neq 1$
> – Si $q \leq -1$ alors la suite (u_n) n'admet pas de limite.
> – Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
> – Si $q > 1$ alors la limite de la suite (u_n) est $+\infty$ ou $-\infty$, selon que u_0 est strictement positif ou strictement négatif.

Activité 4

Soit u la suite définie sur IN par $u_0 = -2$ et $u_n = \frac{3}{2} u_{n+1}$.

1) Calculer u_1 , u_2 et u_3
2) Dans le plan muni d'un repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, représenter les points $A_n(n, u_n)$ pour $n \in \{0, 1, 2, 3\}$.
3) Exprimer u_n en fonction de n, puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
4) Soit $n \in IN^*$, exprimer la somme $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$ en fonction de n .

Activité 5

Dans chacun des cas suivants, préciser la nature puis déterminer la limite de la suite (u_n) :

a) $u_n = \dfrac{2-n}{3}$; b) $u_n = \dfrac{n(1-3n)}{3} + n^2$

c) $u_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$; d) $u_n = \dfrac{2^{n+1}}{3^n}$

2) Suites minorées, suites majorées :

Activité 1

1- On considère la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par $u_0 = -1$ et pour tout $n \in IN$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leq 3$.

2- Soit $(v_n)_{n\in IN}$ la suite définie par $v_n = e^n + 2n + 3$

Montrer que pour tout entier naturel n, $v_n \geq 4$.

Activité 2

Soit la suite définie par : $u_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{1}{n^2+1}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n on a: $-\dfrac{1}{2} \leq \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \leq \dfrac{1}{2}$ et que $0 \leq \dfrac{1}{n^2+1} \leq 1$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n $-\dfrac{1}{2} \leq u_n \leq \dfrac{3}{2}$.

Définitions

Soient n_0 un entier naturel et $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle

- $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite majorée s'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_n \leq M$.
- $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite minorée s'il existe un réel m tel que pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $m \leq u_n$.
- $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite bornée si elle est à la fois minorée et majorée.

Vocabulaire

M et m désignent deux réels donnés.

La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite majorée par M (respectivement minorée par m), si pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_n \leq M$ (respectivement $u_n \geq m$).

Activité 3

On considère la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $s_n = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\frac{1}{2^n}\right)-n$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $s_n = 2-n-\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b) Calculer s_0, $s_1$et s_2 puis prouver que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 2.

Activité 4

Soit u la suite définie sur IN par $u_n = \sqrt{3+e^n}$.
Montrer que la suite u est minorée par 2.

Activité 5

On considère les suites u , v et w définies sur IN par leurs termes généraux suivants :
$u_n = 1+3e^{-n}$, $v_n = \frac{n+1}{n!}$ et $w_n = \frac{\cos(n)}{n^2+1}+1$.
Prouver que les suites u ,v et w sont bornées.

3) Variation d'une suite :

Activité 1

1- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in IN$ $u_n = 2(u_{n+1}-1)$.
  a) Calculer $u_1$et u_2.
  b) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 2$.
  c) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leq u_n$.

2- Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = 1+e^n$.
  Prouver que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} \geq v_n$.

Définitions

Soient n_0 un entier naturel et $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle.

- (u_n) est dite croissante (respectivement strictement croissante) si pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$ (respectivement $u_{n+1} > u_n$).
- (u_n) est dite décroissante (respectivement strictement décroissante) si pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$ (respectivement $u_{n+1} < u_n$).
- (u_n) est dite constante si pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n$.
- (u_n) est dite monotone si elle est soit croissante, soit décroissante.

Activité 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \alpha \ ; \ \alpha \in IR \\ 3u_{n+1} = 2u_n - 6 \quad \text{pour tout } n \in IN \end{cases}$

1- Exprimer u_{n+1} enfonction de u_n.

2- Montrer que si $\alpha = -6$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

3- On suppose que $\alpha = 1$.

a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geq -6$.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4- On suppose que $\alpha = -8$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leq -6$.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Activité 3

1- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = (\frac{1}{4})^n - 2$

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2- Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 2$ et pour tout $n \in IN$, $v_{n+1} = 2v_n - 1$

a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Activité 4

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(x-1)$.

a) Montrer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que $f'(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$.

b) En déduire que f est croissante sur $[2,+\infty[$.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par $u_n = f(n)$ est croissante.

Théorème (admis)

Soient n_0 un entier naturel, f une fonction définie sur $[n_0,+\infty[$ et $(u_n)_{n\geq n_0}$ la suite définie par $u_n = f(n)$.

- Si f est croissante sur $[n_0,+\infty[$ alors la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante.
- Si f est décroissante sur $[n_0,+\infty[$ alors la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante.

Activité 5

Etudier la monotonie de chacune des suites suivantes :

a) $u_n = n^2 + n - 1$; b) $u_n = \dfrac{n}{n+2}$; c) $u_n = \dfrac{n+3}{2n+1}$.

d) $u_n = \ln(n+2) - \ln n$; e) $u_n = e^{-2n} - n$.

4) Opérations sur les suites :

Définition

Soit p un entier naturel , u et v deux suites réelles définies pour $n \geq p$.

- La somme des deux suites u et v est une suite, notée u+v, de terme général $u_n + v_n$.
- Le produit des deux suites u et v est une suite, notée uv, de terme général $u_n \times v_n$.
- Le produit de la suite u par un réel λ est une suite, notée $\lambda.u$, de terme général: $\lambda.u_n$.
- La valeur absolue de la suite u est une suite, notée $|u|$, de terme général: $|u_n|$.
- Si de plus pour tout entier $n \geq p$, $v_n \neq 0$,l'inverse de v et le quotient de u par v sont des suites, notées respectivement $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$, de termes généraux respectifs $\frac{1}{v_n}$ et $\frac{u_n}{v_n}$.

Activité 1

On considère les suites u et v définies sur IN^* par $u_n = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

et $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}$.

Prouver que les termes généraux des suites $h = \frac{2}{3}u$, $k = u + v$ et $w = \frac{k}{u}$ sont respectivement : $h_n = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$, $k_n = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{2n}\right)$ et $w_n = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Activité 2

Soit u une suite géométrique de raison $q \in IR \setminus \{0,1\}$ et de premier terme $u_0 \in IR^*$.

Montrer que la suite $\frac{1}{u}$ est aussi une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme .

5) Suites convergentes – suites divergentes :

Activité 1

Soient f et g les fonctions définies sur IR par : $f(x) = 2x-1$ et $g(x) = -3e^{-x}$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

2) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur IN par $u_n = f(n)$ et $v_n = g(n)$.

a) Montrer que (u_n) est une suite arithmétique puis déterminer sa limite ℓ.

b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique puis déterminer sa limite ℓ'.

3) Comparer ℓ et ℓ' respectivement à $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

Théorème (admis)

Soient n_0 un entier naturel, f une fonction définie sur $[n_0,+\infty[$ et $(u_n)_{n\geq n_0}$ la suite définie par $u_n = f(n)$.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. (ℓ étant fini ou infini).

Remarques:

- On admet que: si une suite admet une limite, alors cette limite est **unique**.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ (ℓ étant fini ou infini), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell$.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x+1}$.

1- Calculer la limite de f en $+\infty$.

2- On considère la suite u définie sur IN par $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$.

a) Vérifier que pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Activité 3

Calculer la limite de (u_n) dans chacun des cas suivants :

a) $u_n = \dfrac{1}{n}$; b) $u_n = \sqrt{n}$; c) $u_n = \dfrac{2n-1}{n+3}$.

d) $u_n = \dfrac{n^2+2}{n^3-n+1}$; e) $u_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$; f) $u_n = \ln\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)$.

Définition :

Soient n_0 un entier naturel et $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle.

- $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite **convergente** lorsqu'elle admet une limite finie .
- $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite **divergente** lorsque sa limite est infinie ou elle n'admet pas de limite.

Activité 4

Dire dans chacun des cas suivants si la suite u est convergente ou divergente.

a) $u_n = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^{2n}$; b) $u_n = 2 - \dfrac{n}{5}$; c) $u_n = (-1)^n$

d) $u_n = 1 - 2^{-n}$; e) $u_n = n\ln(1+\dfrac{1}{n})$; f) $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

Activité 5

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 3$.

1) Montrer que la suite u est croissante.
2) Montrer que la suite u est majorée par 4.
3) Construire dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, les droites $D : y = x$ et $D' : y = \dfrac{1}{4}x + 3$.

4) Placer sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite u ; la suite semble-t-elle converger ? Si oui, vers quelle limite ?

5) a) Montrer que la suite v définie sur IN par $v_n = u_n - 4$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

c) en déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 4(1 - e^{-n\ln 4})$.

6) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Théorème (admis):

Toute suite croissante et majorée est convergente.
Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Activité 6

Soient u et v les suites définies sur IN^* par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

1) Montrer que u est croissante et que v est décroissante.

2) Montrer que u est majorée par v_1 et que v est minorée par u_1.

3) En déduire que les suites u et v sont convergentes.

Activité 7

On considère la suite (u_n) définie sur IN^* par $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$

1- Montrer que la suite (u_n) est croissante.

2- a) Soit $n \in IN^*$, vérifier que pour tout $k \in IN^*$, $\dfrac{1}{n+k} \leq \dfrac{1}{n}$.

b) En déduire que pour tout $n \in IN^*$, $u_n \leq 1$.

3- En déduire que la suite (u_n) est convergente.

6) Opérations sur les limites des suites:

Comme dans le cas des fonctions, les règles de calcul de la limite de la somme, du produit, de l'inverse et du quotient de deux fonctions s'étendent pour les suites.

Théorème (admis)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de limites respectives ℓ et ℓ' et soit λ un réel.

- Les suites $(u+v)$, (uv), $(\lambda+u)$ et (λu) sont convergentes et on a :

  $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \ell + \ell'$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n) = \ell.\ell'$.

  $\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda + u_n) = \lambda + \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda u_n) = \lambda.\ell$.

- Si de plus les termes v_n sont non nuls et si $\ell' \neq 0$ alors les suites

  $\left(\dfrac{1}{v}\right)$ et $\left(\dfrac{u}{v}\right)$ convergent et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{\ell'}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\ell}{\ell'}$.

Activité 1

Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans chacun des cas suivants:

a) $u_n = \dfrac{3n-1}{n^2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$; b) $u_n = \left(-\dfrac{2n+1}{3n+2}\right)\left(\dfrac{n+1}{e^n}+3\right)$.

c) $u_n = \dfrac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\ln(1+\frac{1}{n})}$; d) $u_n = \dfrac{1}{2+n\sin(\frac{1}{n})}$.

Activité 2

Soit (u_n) la suite définie sur IN^* par : $u_n = \dfrac{5^n+4^n}{3^n-5^n}$.

a) Vérifier que pour tout $n \in \mathrm{IN}^*$, on a : $u_n = \dfrac{1+\left(\frac{4}{5}\right)^n}{\left(\frac{3}{5}\right)^n-1}$.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Les théorèmes suivants donnent les règles de calcul de la limite de la somme, du produit et du quotient de deux suites dont la limite de l'une, au moins, est infinie.

Théorèmes (admis)

ℓ étant un réel non nul et u et v sont deux suites réelles.

limite de u	limite de v	limite de u+v	limite de u v	limite de $\dfrac{u}{v}$
$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\pm\infty$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	Pas de conclusion
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Pas de conclusion
$+\infty$	$-\infty$	Pas de conclusion	$-\infty$	Pas de conclusion
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	Pas de conclusion	0
$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	Pas de conclusion	$\pm\infty$

Activité 3

Déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants:

a) $u_n = 2^n + (1-\dfrac{1}{n})$; b) $u_n = 1+2+\ldots2^n$.

c) $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n-1} + \dfrac{e^{2n}}{n^2}$; d) $u_n = \left[2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]\left[1-\ln(n)\right]$.

7) Limites et ordre :

Activité 1

On considère les suites u , v et w définies sur IN^* par :

$$u_n = \frac{3n+(-1)^n}{n} \quad ; \; v_n = \frac{3n-1}{n} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{3n+1}{n}.$$

1) Montrer que par tout $n \in IN$, $v_n \le u_n \le w_n$.

2) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

3) Que peut-on conjecturer à propos du comportement de u_n quand n tend vers $+\infty$?

Activité 2

On considère les suites (u_n) et (v_n) et définie sur IN par :

$u_n = 3n + \sin(n)$ et $v_n = -n^2 + (-1)^n$.

1) a - Montrer que pour tout $n \in IN$, $v_n \ge 3n-1$.

b- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(3n-1)$.

c- Que peut-on conjecturer à propos du comportement de u_n quand n tend vers $+\infty$?

2) a – Montrer que pour tout $n \in IN$, $v_n \le -n^2+1$.

b- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(-n^2+1)$.

c- Que peut-on conjecturer à propos du comportement de u_n quand n tend vers $+\infty$?

Théorème (admis)

Soient $(u_n)_{n\ge p}$, $(v_n)_{n\ge p}$ et $(w_n)_{n\ge p}$ trois suites

- S'il existe un entier $n_0 \ge p$ tel que pour tout $n \ge n_0$, $u_n \ge 0$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ alors $\ell \ge 0$
- S'il existe un entier $n_0 \ge p$ tel que pour tout $n \ge n_0$, $v_n \le u_n \le w_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$

  alors : la suite (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$
- S'il existe un entier $n_0 \ge p$ tel que pour tout $n \ge n_0$, $u_n \ge v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

  alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- S'il existe un entier $n_0 \ge p$ tel que pour tout $n \ge n_0$, $u_n \le v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

  alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Conséquence:

Soient $(u_n)_{n\ge p}$ et $(v_n)_{n\ge p}$ deux suites .

S'il existe un entier $n_0 \ge p$ tel que pour tout $n \ge n_0$, $|u_n| \le v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Activité 3

Déterminer les limites de chacune des suites : (u_n), (v_n), (w_n), (t_n) et (h_n) définies sur IN par :

a) $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cos(n)$; b) $v_n = \frac{\sin(n)}{n^2+1}$; c) $w_n = \frac{(-1)^n}{2n^2+n+3}$.

d) $t_n = -5 + \left(\sqrt{2}\right)^n$; e) $h_n = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n$.

Activité 4

Soit u et v les suites définies sur IN par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in$ IN, $u_{n+1} = 2u_n + 3$ et

$v_n = -2u_n + (\frac{1}{2})^n$

1- Vérifier que pour tout $n \in$ IN, $u_{n+1} \geq 2u_n$.

2- a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in$ IN, $u_n \geq 2^n$

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

3- a) Vérifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $n \in$ IN, $v_n \leq -2^{n+1} + (\frac{1}{2})^n$

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

8) Exemples de suites récurrentes :

Suites de la forme $u_{n+1} = au_n + b$

Activité 1

On considère la fonction f définie sur IR par : f(x) = 0,75x + 2. Soit D sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé.
Soit D' la droite d'équation : y = x.

1- Représenter les droites D et D'. Déterminez leur point d'intersection I.

2- On définit la suite (v_n) par : $v_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$.

a) Placer, sur l'axe des abscisses, les points A_n d'abscisses v_n où $n \in \{0, 1, 2, .., 8\}$.

b) Que peut on conjecturer pour la limite de la suite (v_n)

3-a) Montrer que la suite (w_n) définie sur IN par $w_n = v_n - 8$, est une suite géométrique et déterminer sa raison.

b) Exprimer v_n en fonction de w_n.

c) Calculer la limite de la suite (w_n) et en déduire la limite de la suite (v_n).

Activité 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2u_n + 6}{3}$

1- a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

b) Déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2- On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - \alpha$

a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n

b) En déduire que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

c) Exprimer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n.

d) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n)

e) Déterminer la limite de la suite (u_n)

Suites homographiques

Activité 1

On suppose que dans une période, la population d'un pays est constante et égale à 60 millions d'habitants, dont 40 millions vivent en zone rurale et 20 millions en ville.
On constate que les mouvements de population sont décrits par la règle suivante : « chaque année 20% des ruraux émigrent à la ville et 10% des citadins émigrent en zone rurale ».
On note respectivement v_n et r_n les effectifs (en millions) des citadins et des ruraux au bout de n années.

1- a) On considère la suite (p_n) définie par $p_n = \dfrac{v_n}{r_n}$.

Montrer qu'elle vérifie: $p_0 = 0,5$ et pour tout n de IN, $p_{n+1} = \dfrac{9p_n + 2}{p_n + 8}$.

b) On pose pour tout entier naturel n, $q_n = \dfrac{p_n - 2}{p_n + 1}$.

2- a) Montrer que la suite (q_n) est géométrique et exprimer q_n et p_n en fonction de n.

b) Calculer la limite de la suite (p_n) .

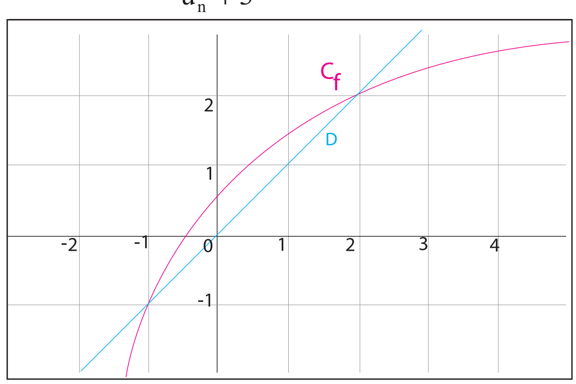
Commentaire :

La suite (p_n) est du type: $u_{n+1} = \dfrac{a u_n + b}{cu_n + d}$, elle est dite ***suite homographique***

Activité 2

On considère la suite (u_n) définie sur IN par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 2}{u_n + 3}$.

Dans le graphique ci-contre, on donne la courbe représentative C_f de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x+2}{x+3}$ pour $x \in]-1, +\infty[$ et la droite D d'équation $y = x$.



1-a) Déterminer graphiquement les abscisses α et β ; $(\alpha < \beta)$ des points d'intersection de la courbe C_f et la droite D .

b) Placer sur l'axe des abscisses, les points $A_n(u_n, 0)$ pour $n \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

c) Quelles conjectures peut-on faire sur les variations et la limite de la suite (u_n) ?.

2- Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 2$.

a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et que sa limite ℓ vérifie : $\ell = f(\ell)$.

c) Prouver que $\ell \geq 2$ puis donner sa valeur.

3- Soit (v_n) la suite définie sur IN par $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$.

b) Exprimer u_n en fonction de v_n.

c) Calculer la limite de la suite (v_n), puis retrouver la limite de la suite (u_n).

Activité 3

On considère la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{4u_n - 3}$.

1- Soit f la fonction définie sur $\left]-\infty, \dfrac{3}{4}\right[$ par $f(x) = \dfrac{x-1}{4x-3}$.

a) Construire la courbe représentative C de la fonction f dans un repère orthonormé du plan.

b) Montrer que la droite $D : y = x$ est tangente à la courbe C et déterminer l'abscisse α de leur point de contact.

c) Placer, sur l'axe des abscisses, les trois premiers termes de la suite (u_n).

d)Que peut on conjecturer pour la limite de la suite (u_n) ?

2- Soit (v_n) la suite définie sur IN par $v_n = \dfrac{1}{u_n - \alpha}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite est arithmétique de raison -4 et de premier terme $v_0 = -\dfrac{2}{3}$.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Calculer la limite de la suite (v_n), puis retrouver la limite de la suite (u_n).

Si une suite (u_n) de la forme $u_{n+1} = \dfrac{a u_n + b}{c u_n + d}$ converge alors sa limite ℓ vérifie: $\ell = \dfrac{a\ell + b}{c\ell + d}$.

Activité 4

On considère la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 6}{u_n - 4}$.

1- Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 4[$ par $f(x) = \dfrac{x+6}{x-4}$.

a) Construire la courbe représentative C de la fonction f dans un repère orthonormé du plan.

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de C et la droite $D : y = x$.

c) Placer, sur l'axe des abscisses, les quatre premiers termes de la suite (u_n).

d) Justifier que la suite (u_n) n'est pas monotone.

e) Que peut on conjecturer pour la limite de la suite (u_n) ?

2- Soit (v_n) la suite définie sur IN par $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 6}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison.

b) Calculer la limite de la suite (v_n) et en déduire celle de la suite (u_n).

Activité 5

Soit (u_n) la suite définie sur IN par : $u_0 > 2$ et $u_{n+1} = 4\left(\dfrac{u_n - 1}{u_n}\right)$.

1- a) Vérifier que pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} = 4\left(1 - \dfrac{1}{u_n}\right)$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n : $u_n > 2$.

c) Vérifier que pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{(u_n - 2)^2}{u_n}$.

d) Déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite ℓ.

2- Soit (v_n) la suite définie sur IN par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$

a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Calculer la limite de la suite (v_n), puis retrouver la limite de la suite (u_n).

Activité 6

On considère la suite (u_n) définie sur IN par $u_0 = -5$ et $u_{n+1} = \dfrac{-8u_n + 9}{2u_n - 11}$

1- a) Vérifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{-5}{2u_n - 11}\left(u_n + \dfrac{3}{2}\right)$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \le -\dfrac{3}{2}$.

c) Prouver que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 3)(-2u_n - 3)}{2u_n - 11}$ et déduire que la suite (u_n) est croissante.

d) Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite ℓ..

3- On considère la suite (v_n) définie sur IN par $v_n = \dfrac{u_n + \frac{3}{2}}{u_n - 3}$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Activité 7

On considère la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0 = \frac{5}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n}$.

1- Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = \left[\frac{3}{2}, 3\right]$ par $f(x) = \frac{x+2}{x}$.

a) Montrer que f est dérivable sur I et que $f(I) \subset I$.

b) Montrer que l'équation f(x) = x admet dans I une solution unique ℓ que l'on précisera.

c) Montrer que pour tout x de I , $\left|f^{'}(x)\right| \leq \frac{8}{9}$.

d) Prouver que pour tout $x \in \left]\frac{3}{2}, 3\right[$ on a : $\left|f(x) - \ell\right| \leq \frac{8}{9}\left|x - \ell\right|$.

2- a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a : $\left|u_{n+1} - \ell\right| \leq \frac{8}{9}\left|u_n - \ell\right|$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $\left|u_n - \ell\right| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^n$.

c) Déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Activité 8

On considère la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x-1}{x+2}$.

a) Construire la courbe représentative C de la fonction f dans un repère orthonormé du plan.

b) Vérifier que la courbe C et la droite $D : y = x$ n'ont pas de point commun.

c) Placer, sur l'axe des abscisses, les sept premiers termes de la suite (u_n).

d) Montrer par l'absurde que la suite (u_n) est divergente.

Avec l'ordinateur

On se propose de d'utiliser un tableur pour calculer les termes d'une suite définie par récurrence

1ère situation :

On considère la suite U définie sur IN par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \dfrac{n+1}{n^2+1} U_n$

Dans la colonne A on placera les valeurs de n et dans la colonne B les valeurs correspondantes de U_n.

Ainsi on place 0 dans la cellule A2, 1 dans A3, 10 dans B2 et dans la cellule B3 la formule calculant son contenu en fonction du contenu de A2 et celui de B2.

La formule étant :
=(A2+1)*B2/(A2*A2+1)
Remplir les cellules de la colonne A par des valeurs croissantes de n
Copier la formule et la coller dans les cellules correspondantes de la colonne B

B3 | fx =(A2+1)*B2/(A2*A2+1)

	A	B	C	D	E
1	n	Un			
2	0	10			
3	1	10			
4	2	10			
5	3	6			
6	4	2,4			
7	5	0,705882			
8	6	0,162896			
9	7	0,030818			
10	8	0,004931			
11	9	0,000683			
12	10	8,33E-05			
13	11	9,07E-06			
14	12	8,92E-07			

Quelle conjecture peut on faire sur la limite de la suite U ?

2ème situation :

On considère la suite U définie sur IN par : $U_0 = 2,\ U_1 = 10$ et $U_{n+2} = 1{,}5\,U_{n+1} - 0{,}5U_n$

On procèdera de la même manière que précédemment, sauf que
On deux lignes de données initiales
U_0 et U_1.
On introduit la formule dans la cellule B4 :
=(1,5*B3-0,5*B2)

B4 | fx =(1,5*B3-0,5*B2)

	A	B	C	D
1	n	Un		
2	0	2		
3	1	10		
4	2	14		
5	3	16		
6	4	17		
7	5	17,5		
8	6	17,75		
9	7	17,875		
10	8	17,9375		
11	9	17,96875		
12	10	17,98438		
13	11	17,99219		
14	12	17,99609		

1- Soit u la suite géométrique de raison 0,1 et de premier terme $u_0 = 5$.

a) Exprimer u_n en fonction de n.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$

c) Montrer que la suite définie sur IN par $v_n = \ln(u_n)$, est arithmétique ; donner sa raison

2- Soit u la suite arithmétique de raison ln2 et de premier terme $u_0 = \ln 3$.

a) Exprimer u_n en fonction de n.

b) Montrer que la suite définie sur IN par $v_n = e^{u_n}$, est géométrique ; donner sa raison.

3- On place le 1er de chaque mois (du 1er janvier 2006 au 1er Décembre 2006 inclus) un montant de 300DT sur un compte rémunéré à intérêts simples à 0,4% par mois.
On retire le capital acquis le 1 janvier 2007.
a) Calculer le montant de l'intérêt rapporté par chacun des quatre premiers mois.
b) u_n est l'intérêt rapporté par le montant placé le n-ième mois
Montrer que la suite (u_n) est arithmétique et donner sa raison.
c) En déduire le montant total des intérêts acquis, puis le capital acquis.

Un capital est dit placé à intérêts simples lorsque les intérêts ne s'ajoutent pas au capital pour porter eux-mêmes intérêts. Les intérêts versés à la fin du placement sont calculés proportionnellement à la durée du placement.
$K_{n+1} = K_n + i \times K_n$; *(* i *est le taux du placement)*

4- On place un capital initial C_0 de 10 000DT à intérêts composés au taux annuel de 8%.
Soit C_n le capital dont on dispose au bout de n années.
1- Montrer que C est une suite géométrique dont on donnera la raison. Calculer C_5.
2- Au bout de combien d'années de placement, le capital acquis dépassera-t-il le double du capital initial ?
Le résultat dépend-t-il du capital C_0 ?

Un capital est dit placé à intérêts composés lorsque à l'issue de chaque période de placement, les intérêts s'ajoutent au capital et portent eux-mêmes intérêts au taux i de placement. $C_{n+1} = C_n + i \times C_0$

5- On place le 2 janvier de chaque année, de 2007 à 2012 inclus, un montant de 1 000DT à intérêts composés au taux annuel de 5,5%
a) De quel capital acquis C disposera-t-on le 2 janvier 2010 juste après le dernier versement ?
b) Exprimer en fonction de n, le capital acquis C_n après n versements annuels de 1 000DT (au 2 janvier de chaque année à partir de 2007).

6- On considère les suite u et v définies pour tout entier naturel n, par
$u_n = e^{an+b}$ et $v_n = \ln(u_n)$ où $a \in IR^*$ et $b \in IR$.
1- Montrer que u est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2- Montrer que v est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

7- On considère les suites u et v définies sur IN par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3U_n \end{cases}$ et $v_n = \ln(u_n)$

1- Vérifier que u est une suite géométrique.
Exprimer son terme général en fonction de n.

2- a) Montrer que v est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

3- a) Soit n un entier naturel non nul, calculer $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{n-1}$ en fonction de n

b) En déduire en fonction de n, le produit : $P_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times ... \times u_{n-1}$.

8- Soit u la suite définie sur IN par: $u_n = \dfrac{2+(-1)^n}{2^n} - 1$

a) Prouver que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{2+(-1)^n}{2^n} \geq 0$

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq -1$

c) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $2+(-1)^n \leq 3$ et $0 < \dfrac{1}{2^n} \leq 1$.

d) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \leq 2$.

9- Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par son terme général u_n :

a) $u_n = \dfrac{n-1}{2n+1}$; b) $u_n = n^2 + 2n + 5$; c) $u_n = \dfrac{2}{n^2 + 2n + 5}$

d) $u_n = 2^n - 1$; e) $u_n = (-2)^n$; f) $u_n = 3 - 1{,}1^n$

g) $u_n = \ln(1 + \dfrac{2}{n})$; h) $u_n = e^{3-n}$; i) $u_n = \sqrt{1 + n + n^2}$

j) $u_n = \dfrac{1}{1+\sqrt{n}}$; k) $u_n = \dfrac{1}{2}e^{0{,}1n+2} - 3$

10- On considère la suite u définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \dfrac{4-n^2}{n}$

1- a) Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

b) En déduire le sens de variation de la suite u

2- a) Déterminer la fonction f telle que $u_n = f(n)$.

b) Retrouver le sens de variation de la suite U à l'aide de la fonction f.

11- On considère la suite u de terme général $u_n = \dfrac{1-n}{5-2n}$ pour tout entier $n \geq 3$

et la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{2x-5}$ définie sur $[3, +\infty[$.

a) Etudier les variations de f et en déduire que $f(x) \leq 2$ pour tout réel x de $[3, +\infty[$.

b) Déterminer la limite ℓ de f en $+\infty$. Exprimer $f(x)-\ell$ en fonction de x et en déduire que pour tout réel x de $[3,+\infty[$, $f(x)\geq \ell$

c) Construire la courbe C représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

d) Représenter la suite U dans le même repère.

e) Déduire de l'étude de la fonction f un encadrement du terme général u_n pour $n\geq 3$.

f) A partir de quel entier p peut-on affirmer que $u_n-\dfrac{1}{2}\leq 10^{-3}$?

12- Soit la suite u définie sur IN^* par : $u_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}...+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

a) Vérifier que pour tout $k\in IN^*$, $\dfrac{1}{\sqrt{k}}\geq\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

b) En déduire que pour tout $n\in IN^*$, $u_n\geq\sqrt{n}$.

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

13- On considère la suite (u_n) définie sur IN^* par $u_n=\int_0^1 t^n e^t dt$.

a) Vérifier que pour tout $t\in[0,1]$ on a $t^n\leq t^n e^t\leq et^n$.

b) En déduire que pour tout $n\in IN^*$, $\dfrac{1}{2n+1}\leq u_n\leq\dfrac{e}{2n+1}$.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

14- On considère la suite u définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=3u_n-1$ pour tout entier naturel n.

1- Calculer les trois premiers termes de la suite u.

2- On pose pour tout entier naturel n, $v_n=u_n-\dfrac{1}{2}$

a) Montrer que la suite v est géométrique et donner sa raison et son premier terme.

b) En déduire v_n puis u_n en fonction de n.

c) En déduire la limite de la suite u.

15- On considère la suite u définie sur IN par : $u_0=e$ et $u_{n+1}=\sqrt{u_n}$

On pose $v_n=\ln(u_n)$ pour tout entier naturel n.

1- Montrer que v est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$. En déduire son terme général en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

2- pour tout entier naturel n, on pose :

$S_n=v_0+v_1+v_2+...+v_n$ et $P_n=u_0\times u_1\times u_2\times...\times u_n$

a) Exprimer S_n en fonction de n. En déduire P_n en fonction de n.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n$.

16- On considère la suite U définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 0,8u_n + 2 \quad \text{pour tout } n \in IN \end{cases}$

1- Calculez u_1, u_2 et u_3.

2- Déterminez un réel a tel que la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par: $v_n = u_n + a$ soit une suite géométrique.

On suppose dans la suite que pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 10$.

3- a) Calculer v_0 puis donnez l'expression de v_n en fonction de n.

b) Quelle est l'expression de u_n en fonction de n? Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$..

4- Pour n entier naturel, on pose : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ et $T_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

a) Quelle est l'expression de T_n en fonction de n? Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n$.

b) Quelle est l'expression de S_n en fonction de n? Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

17- On considère la suite u définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 8$ pour tout entier naturel n.

1- a) Le plan étant muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, placer sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u.

b) Que peut on conjecturer pour la convergence de la suite u ?

2- On considère la suite v définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n.

a) Calculer les trois premiers termes de la suite v.

b) Montrer que v est une suite géométrique, préciser sa raison.

c) Exprimer v_n en fonction de n.

3- Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $u_n = u_0 + (v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{n-1})$.

4- En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = 5 + 5(1 - 0,2^n)$.

5- Montrer que la suite u converge et préciser sa limite.

18- Soit u la suite définie sur IN par : $u_0 = 2$ et pour tout $n \in IN$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN$, $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{3}|u_n - 1|$

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $n \in IN$, $|u_{n+1} - 1| \leq (\frac{1}{3})^n$

c) Montrer alors que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

19- On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 3u_n}$$

1- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

2- On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

a) Prouver que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on donnera la raison et le premier terme v_0.

b) En déduire v_n puis u_n en fonction de n.

c) En déduire le sens de variation et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

20- On considère la suite u définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 6}{3u_n - 2}$ pour tout entier naturel n.

1- Prouver que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x+6}{3x-2}$ est décroissante sur $\left]-\infty, \dfrac{2}{3}\right[$.

2- En déduire par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a $-3 \leq u_n \leq 0$.

Soit v la suite définie par $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 2}$ pour tout entier naturel n.

a) Exprimer u_n en fonction de v_n

b) Montrer que v est une suite géométrique de raison $-\dfrac{4}{5}$

c) En déduire la limite de v_n lorsque n tend vers $+\infty$, puis la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

21- Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 12}{u_n + 1}$.

1- Etudier les variations de la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+12}{x+1}$.

2- tracer dans un même repère orthonormé, la représentation graphique C de la fonction f et la droite D d'équation y = x.

3- En utilisant C et D, placer les points de coordonnées $(u_0, 0)$, $(u_1, 0)$, $(u_2, 0)$ et $(u_3, 0)$.

4- Que peut-on conjecturer pour la limite de la suite (u_n).

5- Soit (v_n) et (w_n) les suites définies sur IN par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq 7$

b) Montrer que (v_n) est une suite croissante et que (w_n) est une suite décroissante.

c) En déduire que les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes.

6- On considère (t_n) la suite définie sur IN par $t_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n + 3}$

a) Montrer que (t_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.

b) Calculer la limite de la suite (t_n) et en déduire celle de la suite (u_n).

22- On considère la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 3}{u_n + 2}$.

1- Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [3,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x+3}{x+2}$.

a) Montrer que f est dérivable sur I et que $f(I) \subset I$.

b) Montrer que l'équation f(x) = x admet dans I une solution unique ℓ que l'on précisera.

c) Montrer que pour tout x de I, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{5}$.

d) Prouver que pour tout $x \in]3,+\infty[$ on a : $|f(x)-\ell| \leq \frac{1}{5}|x-\ell|$.

2- a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a : $|u_{n+1}-\ell| \leq \frac{1}{5}|u_n-\ell|$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $|u_n-\ell| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

c) Déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

23- On considère la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0=-1$ et $u_{n+1}=\frac{u_n}{3-u_n}$.

1- Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I=]-\infty,0]$ par : $f(x)=\frac{x}{3-x}$.

a) Montrer que f est dérivable sur I et que $f(I) \subset I$.

b) Résoudre dans I l'équation f(x) = x .

c) Montrer que pour tout x de I , $|f'(x)| \leq \frac{1}{3}$.

d) Prouver que pour tout $x \in]-\infty,0[$ on a : $|f(x)| \leq \frac{1}{3}|x|$.

2- a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a : $|u_{n+1}| \leq \frac{1}{3}|u_n|$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $|u_n| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

c) Déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

24- Soient a, b et c trois réels tels que $ac-b \neq 0$.

On considère la suite $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_{n+1}=\frac{au_n+b}{u_n+c}$ et $u_0 \neq -c$

1- Montrer que la suite u est constante si et seulement si u_0 est solution de l'équation

$(E) : x^2+(c-a)x-b=0$

2- Dans cette question on prend $a=4$, $b=3$, $c=6$ et $u_0=2$

a) Montrer que (E) admet deux racines distinctes α et β $(\beta<\alpha)$, que l'on précisera.

b) On considère la suite v définie sur IN par $v_n=\frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$

Montrer que la suite v est géométrique de raison $q=\frac{3}{7}$.

c) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

25- Le président d'une association sportive constate que chaque année, l'association garde les trois quarts de ses anciens adhérents et qu'il y a 800 nouveaux adhérents.
On suppose que l'évolution du nombre des adhérents reste le même au fil des ans et on se propose d'étudier cette évolution. On suppose que l'association a commencé ses activités

avec un nombre d'adhérents égal à 1600 et on désigne par u_n le nombre d'adhérents au bout de n années.

1- Calculer u_1, u_2 et u_3.

2- Exprimer u_{n+1} et fonction de u_n.

3- On pose $v_n = 3200 - u_n$.

a) Montrer que la suite v est géométrique ; déterminer sa raison et son premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de n et en déduire que pour tout entier naturel n on a $u_n = 3200 - 1600 \times (0,75)^n$

c) Calculer la limite de la suite u. Interpréter le résultat.

26- Une usine produit des machines et les vend à un prix de P_n l'année n.
Les quantités offertes O_n sont fonction du prix P_{n-1} de l'année précédente.
Les quantités demandées D_n sur le marché sont fonction du prix P_n de l'année n.
Les fabricants recherchent l'équilibre du marché, c'est-à-dire qu'à chaque année n, on ait $O_n = D_n$. On a vérifié que : $\begin{cases} O_n = 2P_{n-1} - 10 & \text{pour } n > 1 \\ D_n = -3P_n + 140 & \text{pour } n > 0 \end{cases}$

1- a) Représenter sur le même graphique, les droites d'équations respectives $y = 2x - 10$ et $y = -3x + 140$ puis déterminer leur point d'intersection.

b) On suppose que $P_0 = 15$, calculer O_1 puis représenter sur le graphique O_1 et P_1.

c) Calculer et représenter de même P_2 et P_3.

d) Que peut on conjecturer pour la limite de la suite (P_n) ?

2- A l'équilibre du marché, on a $O_n = D_n$

a) Démontrer que pour tout entier naturel $n > 1$, $P_n = -\frac{2}{3}P_{n-1} + 50$.

b) On pose pour tout entier naturel n, $U_n = P_n - 30$; montrer que la suite (U_n) est géométrique. Exprimer alors U_n puis P_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite p de la suite (P_n).

d) Quelles sont alors les quantités offertes et demandées à ce prix p ?

27- Un club de sport propose deux types d'abonnements non permutables.

Formule A:

Une cotisation annuelle de 50DT à laquelle s'ajoute la première année seulement un droit d'entrée de 100DT.

Formule B:

Une cotisation annuelle initiale de 10DT qui augmente de 10% par an. Dès la seconde année, pour fidéliser la clientèle, on effectue une réduction de 0,5DT sur la cotisation annuelle. Si C_n est le montant, exprimé en DT, de la cotisation annuelle de la nième année, on a $C_1 = 10$ et pour tout entier n supérieur ou égal à 1 , $C_{n+1} = 1,1C_n - 0,5$

1- Déterminez la somme T_n versée au club de sport par membre pendant n années avec la formule A.

2- Soit (D_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par $D_n = C_n + a$ où a est un réel.

a) Déterminer le réel a pour que la suite (D_n) soit une suite géométrique de raison 1,1 et préciser son premier terme.
b) Exprimer D_n puis C_n en fonction de n.
c) Déterminer la somme S_n versée au club par un membre pendant n années avec la formule B.
d) Quel nombre minimum d'années un membre doit-il cotiser pour que la formule A soit plus avantageuse que la formule B?

28- Soit a un réel strictement positif, on considère la suite arithmétique V de raison a et de premier terme 0.

1- On définit sur IN les suites A et I par $A_n = \int_{a^n}^{a^{n+1}} \frac{1}{x}dx$ et $I_n = \int_{V_n}^{V_{n+1}} 3^x\,dx$

a) Montrer que la suite A est constante dont précisera la valeur en fonction de a. Interpréter graphiquement chacun des termes de cette suite.
b) Montrer que la suite I est géométrique dont on précisera la raison en fonction de a. Calculer la somme $I_0 + I_1 + I_2 + ... + I_{10}$ par deux méthodes.

2- On considère l'intégrale $B_n = \int_n^{n+1} 3e^{0,1t}\,dt$ où n est un entier naturel.

a) Exprimer cette intégrale en fonction de n.
b) Démontrer que B_n est le terme général d'une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme (on donnera les valeurs exactes).
c) Calculer par deux méthodes la somme $S_n = B_0 + B_1 + ... + B_{11}$.

29- a est un nombre réel tel que $0 < a < \frac{\pi}{4}$

(u_n) est la suite réelle définie pour n entier naturel non nul par les relations:

$u_1 = 1 + \frac{1}{2(\sin a)^2}$ et pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = \cos(2a)u_n + 1$

1- Démontrer que: $u_n > 1$ pour tout naturel n non nul

2- On pose pour n entier naturel non nul: $v_n = u_n - \frac{1}{2(\sin a)^2}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
b) Exprimer v_n en fonction de n et de a, puis u_n en fonction de n et de a.
c) Les suites (v_n) et (u_n) sont-elles convergentes ? Justifiez la réponse.

3- Pour tout entier naturel non nul n , on pose

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n .$$

a) Quelle est l'expression de S_n en fonction de n ?
b) Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

30- 1- Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $e^{n+1} > 2\,e^n$

2- Soit (u_n) la suite définie par: $u_n = \int_n^{n+1} (e^x + 1)dx$, pour tout entier naturel n.

a) Préciser le sens de variation de la suite (u_n).
b) En déduire que $u_n > e$, pour tout entier naturel n non nul.
c) Calculer la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$

3- On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par:

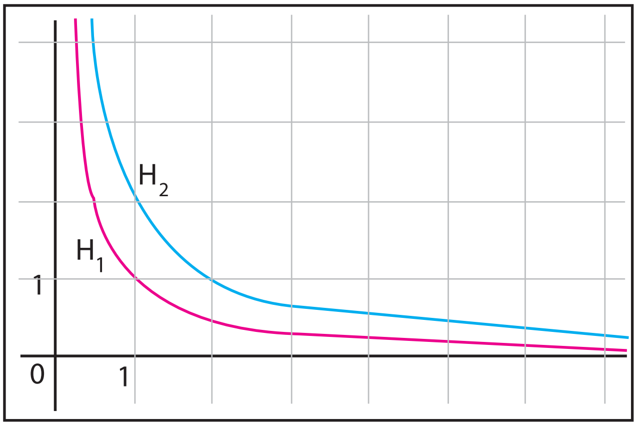
$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n - n$.

a) Démontrer que la suite (S_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison

. b) Déterminer les entiers naturels tels que: $S_n > 23$

31- Les courbes H_1 et H_2 représentées dans le repère orthonormé ci-contre ont respectivement pour équation

$y = \frac{1}{x}$ et $y = \frac{2}{x}$.



On note D_2 le domaine délimité par les courbes H_1 et H_2 et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.

On note D'_2 le domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe H_1 et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.

1- Colorier les domaines D_2 et D'_2 d'une couleur différente et montrer qu'ils ont la même aire.

Soit n un entier naturel strictement positif. On note u_n l'aire du domaine D_n délimité par les courbes H_1 et H_2 et les droites d'équation $x = n$ et $x = n +1$.

2- Exprimer un en fonction de n.

3- Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

On pourra comparer les nombres $n(n +2)$ et $(n +1)^2$.

4- Étudier la convergence de la suite (u_n).

5- Déterminer la plus grande valeur de n telle que l'aire du domaine D_n reste supérieure à 1/10 d'unité d'aire. Soit N cette valeur.

6- Calculer l'aire du domaine délimité par les courbes H_1 et H_2 et les droites d'équation $x =1$ et $x = N$.

Math culture

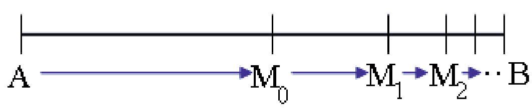
La flèche toujours sans cible !!

Un maître archer tire une flèche vers une cible située à vingt mètres.

On admettra que la flèche conserve une vitesse constante de dix mètres par seconde lors du trajet. Zénon d'Elée, mathématicien grec du cinquième siècle avant Jésus-Christ, avait proposé un paradoxe qui ne fut complètement résolu qu'au dix-huitième siècle, soit vingt-deux siècles plus tard.

Partant du principe qu'on ne peut pas effectuer réellement une infinité d'étapes, il concluait à l'impossibilité de tous les mouvements !!

Zénon observe que, la flèche étant tirée depuis un point A vers un point B, passera d'abord par le milieu M_0 de [AB], puis de même, elle passera par le milieu M_1 de $[M_0B]$ … ainsi de suite, la flèche devra passer par une infinité de milieux !!



Résolution du paradoxe :

La distance parcourue est la limite lorsque n tend vers l'infini, de la distance d_n égale à : $20\times\frac{1}{2}+20\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+20\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+20\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

c'est-à-dire de $d_n=20\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$, en un temps total en secondes égal à la limite lorsque n tend vers l'infini de $t_n=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

On vérifie que les suite (d_n) et (t_n) sont convergentes et que $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n=20$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n=2$.

On peut donc imaginer que la flèche parcourt une infinité de milieux, mais l'ensemble se produit bien en un temps fini et notre flèche atteint bien sa cible en un temps fini égal à 2 secondes !!