

OSCILLATIONS FORCÉES D'UN PENDULE ÉLASTIQUE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

6



Les marées sont des oscillations périodiques. À quoi sont-elles dues et en quoi diffèrent-elles des tsunamis ?



Le violoniste fait vibrer les cordes de son instrument en les frottant avec l'archet pour produire un son avec des notes plus ou moins hautes.



Clarinettes "graves" offrant une musique très impressionnante

- ◆ Pourquoi ces formes particulières des instruments de musique comme le violon, le violoncelle, le contre basse, la clarinette ... ?
- ◆ Dans certaines voitures, on entend parfois des bruits inconfortables de la carrosserie. A quoi sont-ils dus et pourquoi à des vitesses bien déterminées et non pas à d'autres ?
- ◆ Pourquoi a-t-on interdit à un régiment de soldats de traverser un pont (même non suspendu) au pas cadencé ?

OSCILLATIONS FORCÉES D'UN PENDULE ÉLASTIQUE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

Comme dans la nature, nombreux sont les domaines où les oscillations mécaniques sont importantes. Lorsqu'elles sont recherchées, il faut penser à les entretenir. En fait, pour éviter la diminution de leur amplitude due aux frottements inévitables, on doit leur apporter de l'énergie. Comme dans le cas des oscillations électriques, lorsque l'apport de l'énergie se produit périodiquement avec un dispositif approprié appelé excitateur, les oscillations mécaniques entretenues sont dites forcées.

1

PRODUCTION D'OSCILLATIONS FORCÉES

Manipulation

On utilise le dispositif expérimental schématisé sur la figure 1. Il est constitué essentiellement d'un pendule élastique horizontal (système solide – ressort), d'un moteur (M) et d'un dispositif d'entraînement du pendule par le moteur. Le solide est un palet (S) de masse $m = 100 \text{ g}$, placé sur un banc à coussin d'air. Par un point A de l'un de ses bords latéraux, il est attaché à un ressort de raideur $k = 6,5 \text{ N.m}^{-1}$. Par l'intermédiaire d'un dispositif de guidage, le ressort est relié par son autre extrémité à un excentrique solidaire du moteur (M) de fréquence de rotation N réglable. De cette manière, lorsque le moteur est en marche, l'extrémité B du ressort est assujettie à se déplacer parallèlement au bord supérieur du banc à coussin d'air.

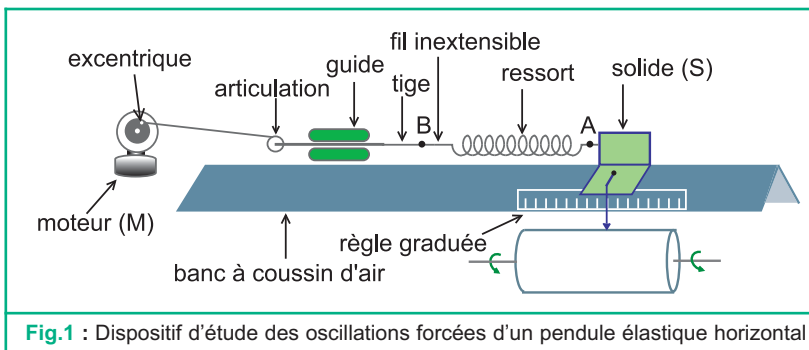


Fig.1 : Dispositif d'étude des oscillations forcées d'un pendule élastique horizontal

Un stylet fixé sur le solide (S) permet d'enregistrer l'évolution de l'élongation de son centre d'inertie G en fonction du temps, sur une feuille de papier enroulée sur un cylindre tournant à vitesse constante. En faisant tourner le moteur à la fréquence $N = 1,5 \text{ tr.s}^{-1}$, le palet (S) se met à osciller sur le banc de part et d'autre de sa position de repos. Une fois le régime permanent est établi, on réalise un enregistrement graphique qui donne la courbe de la figure 2.

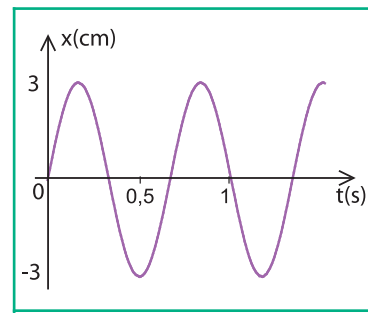


Fig.2 : Enregistrement graphique des oscillations

Remarque

On peut réaliser une acquisition et un traitement informatique des mesures. A cette fin, on relie le solide (S) à un montage potentiométrique qui permet de mesurer la différence de potentiel entre le point M qui correspond à la position de (S) à un instant t et le point O qui correspond à la position de (S) au repos et qui sera prise comme origine des abscisses. La tension U_{OM} est proportionnelle à l'abscisse x du point M (Fig.3).

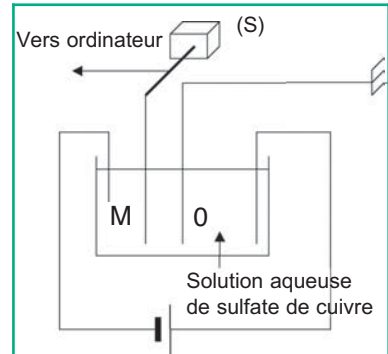


Fig.3 : Schéma du montage potentiométrique

Questions

1°) Déterminer, graphiquement, la fréquence des oscillations du pendule élastique, la comparer à sa fréquence propre et à la fréquence de rotation du moteur. En déduire qu'il s'agit d'oscillations forcées.

2°) Déterminer l'expression de l'élongation x en fonction du temps.

Interprétation

Au cours de son mouvement de rotation uniforme à la fréquence N , le moteur (M) entraîne l'extrémité B du ressort dans un mouvement rectiligne sinusoïdal suivant la direction horizontale du ressort à la fréquence N .

Ainsi l'élongation du centre d'inertie G s'écrit : $x = X_m \sin(2\pi Nt + \varphi)$. On dit alors que le pendule élastique effectue des oscillations forcées imposées par le moteur qui joue le rôle d'excitateur.

Conclusion

Etant soumis à des excitations périodiques, le pendule élastique effectue des oscillations forcées avec une période imposée par l'excitateur. L'oscillateur (pendule élastique) est appelé résonateur.

Remarque :

La dénomination résonateur sera justifiée plus loin.

2 INFLUENCE DE LA FRÉQUENCE DE L'EXCITATEUR SUR L'AMPLITUDE DES OSCILLATIONS

Manipulation

On fait varier la fréquence de rotation du moteur et on mesure à chaque fois l'amplitude des oscillations du pendule élastique. Les résultats des mesures permettent de tracer la courbe de réponse $X_m = f(N)$ de la figure 4.

Questions

1°) Décrire la courbe de la figure 4 et en déduire l'influence de la fréquence N des excitations sur l'amplitude X_m des oscillations du pendule élastique.

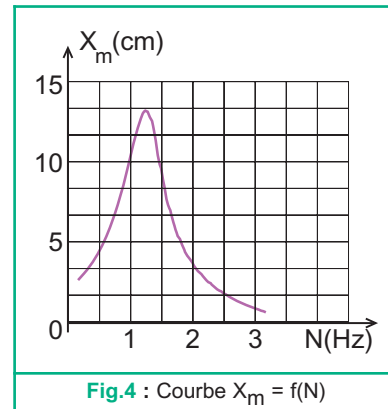


Fig.4 : Courbe $X_m = f(N)$

- 2°) Relever la valeur de la fréquence N pour laquelle l'amplitude des oscillations est maximale et la comparer à la fréquence propre N_0 du pendule élastique.
- 3°) La courbe de la figure 4 est appelée courbe de résonance d'élongation. Justifier cette qualification ainsi que la désignation du pendule élastique comme étant le résonateur.

Conclusion

En régime sinusoïdal forcé, l'amplitude X_m des oscillations d'un pendule élastique dépend de la fréquence N des excitations. Elle atteint sa valeur la plus élevée à une fréquence N_r légèrement inférieure à la fréquence propre N_0 du pendule : on dit qu'il y a résonance d'élongation. N_r est appelée fréquence de résonance.

3 INFLUENCE DE L'AMORTISSEMENT SUR L'AMPLITUDE DES OSCILLATIONS

Manipulation

Expérience 1

On reprend le dispositif expérimental de la figure 1. On augmente l'amortissement dû à la résistance de l'air en fixant sur le palet (S) une voile sous forme d'une plaque rectangulaire perpendiculaire à l'axe du banc à coussin d'air (Fig.5).

En effectuant, comme précédemment, une série de mesures de l'amplitude X_m des oscillations du résonateur pour différentes valeurs de la fréquence N de l'excitateur. Les résultats permettent de tracer la courbe de résonance 1 de la figure 6.

Expérience 2

En faisant de même avec une plaque un peu plus grande, on obtient la courbe 2 de la figure 6.

Expérience 3

En utilisant pour la voile une plaque de grandes dimensions, on obtient finalement la courbe 3 de la figure 6.

Remarque

La manipulation précédente peut être réalisée avec un pendule élastique vertical, l'amortissement varie selon que le solide (S) oscille dans l'air ou dans un liquide avec ou sans rondelle (Fig.7).

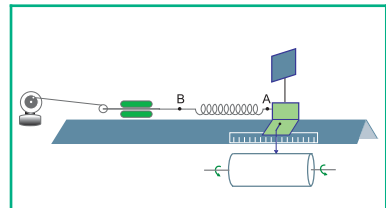


Fig.5 : Palet (S) avec voile

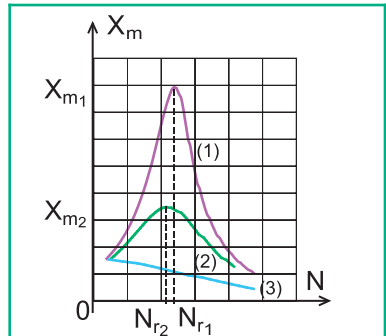


Fig.6 : Influence de l'amortissement sur l'amplitude

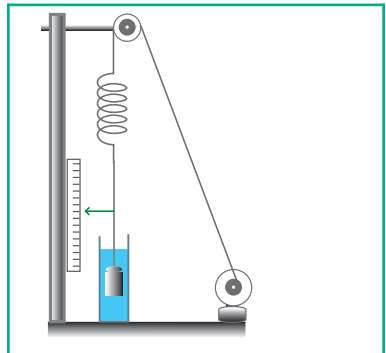


Fig.7 : Pendule élastique vertical

Questions

- 1°) Comparer les fréquences N_{r1} et N_{r2} et les amplitudes X_{m1} et X_{m2} des oscillations à la résonance obtenue respectivement dans les expériences 1 et 2.
- 2°) En déduire l'influence de l'amortissement sur l'amplitude et la fréquence des oscillations à la résonance.
- 3°) La courbe 3 ne peut être appelée courbe de résonance. Elle traduit plutôt un régime forcé dit linéaire. Pourquoi ?

Manipulation

En fixant sur le palet une voile de dimensions de plus en plus grandes, on augmente l'amortissement. Ce qui explique la diminution de l'amplitude X_m des oscillations à la résonance.

Lorsque l'amortissement est faible (absence de voile sur le palet), l'amplitude X_{m0} à la résonance est très grande et diminue considérablement dès que la fréquence des excitations est légèrement différente de la fréquence de résonance, ce qui donne à la courbe de résonance de la figure 4 cette forme caractérisée par un pic étroit et très prononcé. Une telle résonance est dite **aiguë**.

Avec un amortissement moyen (avec une plaque de petites dimensions), l'amplitude X_{m1} à la résonance est plus petite que X_{m0} et sa diminution constatée avec l'écart de la fréquence N des excitations par rapport à la fréquence N_{r1} de résonance est plutôt modérée, ce qui rend le pic de résonance moins étroit et moins prononcé (courbe 1 de la figure 6).

Pour un amortissement important (avec une plaque de dimensions moyennes comme celles de l'expérience 2), l'amplitude des oscillations devient moins sensible à la variation de la fréquence des excitations, ce qui explique l'obtention d'une courbe de résonance caractérisée par un pic peu remarquable (courbe 2 de la figure 6). La résonance est dite **floue**.

Pour un amortissement très important, le pendule répond toujours mais difficilement avec des oscillations de très petite amplitude pratiquement indépendante de la fréquence N des excitations, ce qui explique l'impossibilité d'obtenir dans ces conditions une résonance. C'est pour cette raison qu'un tel régime forcé est qualifié de régime **linéaire**.

Conclusion

Pour une fréquence d'excitation donnée, l'amplitude des oscillations forcées d'un pendule élastique est d'autant plus petite que l'amortissement est plus important. Avec un faible amortissement la résonance est aiguë. Avec un amortissement important, la résonance est floue.

La fréquence de résonance N_r est inférieure à la fréquence propre N_0 du pendule élastique. Cependant, l'écart entre ces fréquences est d'autant plus remarquable que l'amortissement est important.

4 ETUDE THÉORIQUE

On choisit comme repère galiléen, le repère $(O, \vec{i})$ lié au laboratoire (fig.8), $\vec{i}$ étant le vecteur unitaire de l'axe du ressort et la position de repos O du centre d'inertie G de (S) étant son origine.

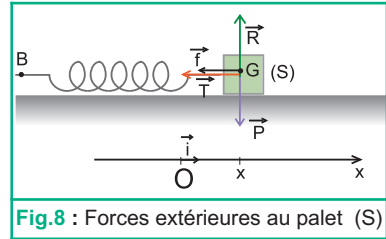


Fig.8 : Forces extérieures au palet (S)

4.1- NATURE DES OSCILLATIONS

Dans les expériences réalisées précédemment, le palet (S) est soumis aux forces extérieures suivantes (Fig.8) :

- son poids $\vec{P}$;
- la réaction $\vec{R}$ du coussin d'air.
- la tension $\vec{T}$ du ressort.
- la force de frottement $\vec{f}$.

Dans tout ce qui suit, on supposera que les frottements sont de type visqueux. Donc, on peut écrire : $\vec{f} = -h \vec{v}$, où h est le coefficient de frottement et $\vec{v}$ la vitesse du centre d'inertie G du palet (S). En appliquant la relation fondamentale de la dynamique au palet (S), on peut écrire:

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} + \vec{f} = m\vec{a}$$

Comme $\vec{P}$ et $\vec{R}$ se compensent, on aura $\vec{T} + \vec{f} = m\vec{a}$:

Par projection sur $(O, \vec{i})$, on aura : $T + f = ma$.

On a $T = -k(x - x_B)$, où x_B est l'élongation de l'extrémité B du ressort et $f = -h v$.

On peut donc écrire: $-k(x - x_B) - hv = ma$

En remplaçant v par $\frac{dx}{dt}$ et a par $\frac{d^2x}{dt^2}$, il vient : $m \frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + kx = kx_B$

Le second membre de cette équation a la même dimension qu'une force : $F = kx_B$.

Du fait que l'ensemble {tige de guidage – fil inextensible tendu} transmet intégralement le mouvement rectiligne sinusoïdal de l'extrémité E de l'excentrique à l'extrémité B du ressort.

De ce fait, x_B s'écrit : $x_B = X_{Bm} \sin(\omega t + \varphi_B)$ avec $\omega = 2\pi N$ où N est la fréquence de rotation du moteur. Avec le choix $\varphi_B = 0$; on a : $x_B = X_{Bm} \sin \omega t$. Par suite : $F = F_m \sin \omega t$ avec $F_m = kX_{Bm}$.

Ainsi tout se passe comme si le palet (S) est soumis directement à une force excitatrice $\vec{F} = F \cdot \vec{i}$. De ce fait, l'équation différentielle ci-dessus peut s'écrire sous la forme :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + kx = F_m \sin \omega t \quad (1)$$

Une telle équation différentielle admet comme solution particulière : $x = X_m \sin(\omega t + \varphi)$, ce qui explique les oscillations sinusoïdales de (S) en régime permanent à la fréquence N de l'excitateur.

Conclusion

Etant régies par l'équation différentielle $m \frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + kx = F_m \sin(\omega t)$, les oscillations forcées d'un pendule élastique évoluent sinusoïdalement au cours du temps à la pulsation ω de l'excitateur.

4.2- AMPLITUDE ET PHASE INITIALE DES OSCILLATIONS

Déterminons, à l'aide de la représentation de Fresnel, les expressions de l'amplitude de X_m et de la phase initiale φ , de la solution particulière $x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi)$, de l'équation différentielle (1).

On a : $x = X_m \sin(\omega t + \varphi)$; d'où : $v = \frac{dx}{dt} = X_m \omega \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$ et $a = \frac{d^2x}{dt^2} = X_m \omega^2 \sin(\omega t + \varphi + \pi)$

En remplaçant x , v et a par leur expression dans l'équation différentielle (1), on obtient l'équation (2) :

$$m\omega^2 X_m \sin(\omega t + \varphi + \pi) + h\omega X_m \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) + kX_m \sin(\omega t + \varphi) = F_m \sin \omega t \quad (2)$$

Pour déterminer X_m et φ , à chacun des termes de l'équation (2) on associe un vecteur de Fresnel.

* Au terme $kX_m \sin(\omega t + \varphi)$, on associe : $\vec{OA}_1[kX_m, \varphi]$

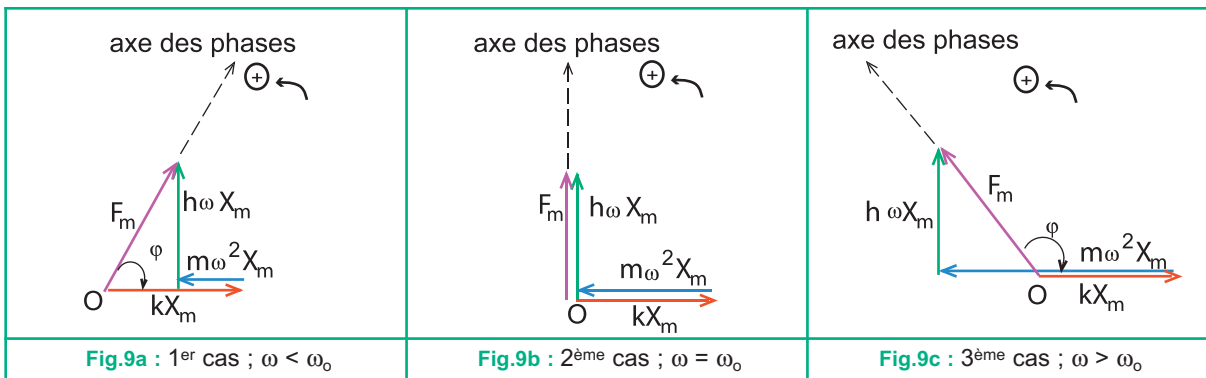
* Au terme $hX_m \omega \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$, on associe : $\vec{OA}_2[h\omega X_m, \varphi + \frac{\pi}{2}]$

* Au terme $m\omega^2 X_m \sin(\omega t + \varphi + \pi)$, on associe : $\vec{OA}_3[m\omega^2 X_m, \varphi + \pi]$

* Au terme $F_m \sin \omega t$, on associe : $\vec{OA}[F_m, 0]$

D'après l'équation (2), on a : $\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \vec{OA}_3 = \vec{OA}$

Selon les valeurs de ω et ω_0 , trois cas peuvent se présenter pour la construction de Fresnel (Fig.9a ; 9b et 9c).



On remarque que dans les trois cas, on a : $\varphi < 0$.

Ainsi, l'élongation x est toujours en retard de phase par rapport à la force excitatrice.

Dans le premier cas, $\omega < \omega_0$; on a : $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$ rad

Dans le deuxième cas, $\omega = \omega_0$; on a : $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ rad

Dans le troisième cas, $\omega > \omega_0$; on a : $-\pi < \varphi < -\frac{\pi}{2}$ rad

L'application du théorème de Pythagore dans le cas général donne :

$$F_m^2 = (k - m\omega^2)^2 X_m^2 + h^2 \omega^2 X_m^2, \text{ d'où : } X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 \omega^2 + (k - m\omega^2)^2}} \quad (3).$$

Pour $h = 0$, l'expression (3) donne :

$$F_m^2 = (k - m\omega^2)^2 X_m^2$$

Remarque :

le déphasage φ entre l'élongation $x(t)$ et la force excitatrice $F(t)$ peut être caractérisé par:

$$\cos \varphi = \frac{k - m\omega^2}{F_m}$$

Conclusion

En régime sinusoïdal forcé, un pendule élastique oscille toujours en retard de phase par

rapport à la force excitatrice, avec une amplitude : $X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 \omega^2 + (k - m\omega^2)^2}}$

4.3- RÉSONANCE D'ÉLONGATION

L'amplitude $X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 \omega^2 + (k - m\omega^2)^2}}$ dépend de la pulsation ω et par suite de la fréquence

N de l'excitateur. Elle atteint sa valeur la plus élevée lorsque le dénominateur

$\left[h^2 \omega^2 + (k - m\omega^2)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ est minimal, c'est-à-dire lorsque sa dérivée par rapport à ω s'annule,

soit : $2h^2\omega - 4(k - m\omega^2)m\omega = 0$. Comme $\omega \neq 0$, cela entraîne : $h^2 = 2m(k - m\omega^2)$.

D'où : $\omega^2 = \frac{k}{m} - \frac{h^2}{2m^2} = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}$. Or, $\omega = 2\pi N$. Alors, $N^2 = N_0^2 - \frac{h^2}{8\pi^2 m^2} = N_r^2$.

Ainsi, on montre que le phénomène de résonance se manifeste à une fréquence N_r de l'excitateur légèrement inférieure à la fréquence propre N_0 du résonateur. A cause du terme dû au coefficient de frottement non nul h , l'écart $(N_0 - N_r)$ augmente avec celui-ci. D'autre part, l'amortissement influe sur l'amplitude des oscillations. Plus h est grand, plus la valeur de X_m est petite.

Question

Montrer que la résonance d'élongation devient impossible pour les valeurs de h supérieures à une valeur limite $h_0 = m\omega_0\sqrt{2}$?

Remarque

Dans le cas idéal où $h = 0$, la résonance aura lieu pour $\omega = \omega_0$ avec une amplitude X_m qui tend vers l'infini (Fig.10)

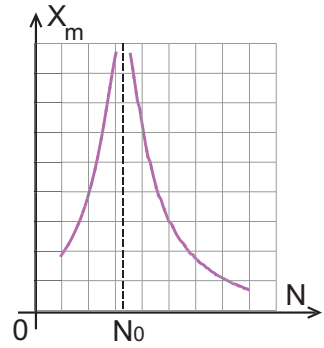


Fig.10 : Courbe de réponse du résonateur dans le cas idéal ($h = 0$)

5 RÉSONANCE DE VITESSE ET RÉSONANCE DE CHARGE

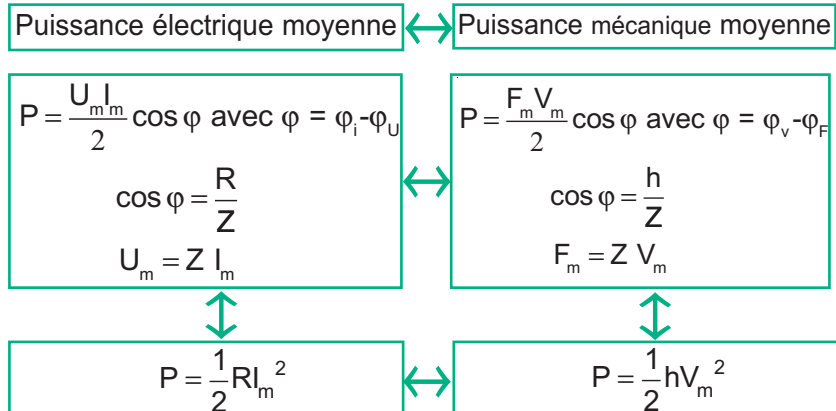
Dans ce paragraphe, il n'y a pas lieu de faire une étude systématique de la résonance de vitesse en mécanique ou de la résonance de charge en électrocinétique, mais il s'agit de les dégager par recours à l'analogie formelle électrique-mécanique faite à la fin du chapitre précédent tout en lui ajoutant l'analogie entre la tension excitatrice $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$ et la valeur algébrique de la force excitatrice $F = F_m \sin(\omega t + \varphi_F)$.

Le tableau suivant rassemble les principaux résultats :

Oscillateur électrique	Oscillateur mécanique
$I_m = \frac{U_m}{Z}$, où $Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$ Z : impédance électrique $\text{tg } \Delta\varphi = \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R}$ avec $\Delta\varphi = (\varphi_i - \varphi_u)$	$V_m = \frac{F_m}{Z}$, où $Z = \sqrt{h^2 + (m\omega - \frac{k}{\omega})^2}$ Z : impédance mécanique $\text{tg } \Delta\varphi = \frac{\frac{k}{\omega} - m\omega}{h}$ avec $\Delta\varphi = (\varphi_v - \varphi_F)$
Résonance d'intensité $I_m = \frac{U_m}{R}$ à $N = N_0$	Résonance de vitesse $V_m = \frac{F_m}{h}$ à $N = N_0$
$Q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2\omega^2 + (\frac{1}{C} - L\omega^2)^2}}$ $\text{tg } \Delta\varphi = \frac{R\omega}{(L\omega^2 - \frac{1}{C})}$ avec $\Delta\varphi = (\varphi_q - \varphi_u)$	$X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2}}$ $\text{tg } \Delta\varphi = \frac{h\omega}{(m\omega^2 - k)}$ avec $\Delta\varphi = (\varphi_x - \varphi_F)$
Résonance de charge à $N_r = \sqrt{N_0^2 - \frac{R^2}{8\pi^2 L^2}}$	Résonance de charge à $N_r = \sqrt{N_0^2 - \frac{h^2}{8\pi^2 m^2}}$

6 PUISSANCE MÉCANIQUE

En régime sinusoïdal forcé, le pendule élastique oscille sans diminution d'amplitude grâce à l'énergie qui lui est transférée périodiquement par l'excitateur. La puissance mécanique moyenne P de l'oscillateur peut être exprimée par recours à l'analogie formelle électrique mécanique.



7 IMPORTANCE DES OSCILLATIONS MÉCANIQUES FORCÉES ET DE LA RÉSONANCE

Les oscillations mécaniques forcées ainsi que le phénomène de résonance sont très importants tant dans la nature que dans les différents domaines de la vie (en acoustique, en industrie...). Toutefois, elles sont parfois recherchées, surtout à la résonance comme en acoustique ; par contre, dans d'autres cas elles sont à éviter parce qu'elles sont gênantes ou même dangereuses.

1- DANS LA NATURE : PHÉNOMÈNE DES MARÉES

Dans certaines baies, il se produit régulièrement au cours de l'année le phénomène naturel des marées qui consiste en des oscillations forcées de grandes quantités d'eau d'océans, les excitateurs sont la lune et le soleil.

Ayant, dans une baie, une période propre proche de la période des marées (de l'ordre de 12 heures), l'eau entre en résonance. Ainsi, à l'entrée d'une baie, on peut observer des marées hautes de dix mètres et même plus, alors qu'en haute mer l'amplitude n'est que de l'ordre 30 cm. L'énergie des marées peut être mise à profit pour faire fonctionner les turbines d'une centrale marémotrice.



Fig.11 : Exemple de marée

2- EN ACOUSTIQUE

En musique, les caisses des instruments à cordes ainsi que l'air qu'elles contiennent, entrent en résonance sous l'action des vibrations des cordes, ce qui permet de renforcer les notes produites. La caisse de résonance et l'air qu'elle contient constituent un oscillateur mécanique de période propre dépendant de la forme de la caisse.

La membrane d'un haut-parleur forme le système oscillant qui engendre les vibrations sonores. Elle doit vibrer avec une amplitude importante dans un domaine de fréquences audibles particulier. Ces vibrations forcées doivent correspondre à une résonance « floue », si non, selon leur fréquence, certains sons seraient amplifiés beaucoup plus que d'autres.

3- EN INDUSTRIE : OSCILLATIONS FORCÉES DUES AUX TRÉPIDATIONS DU ROTOR D'UNE MACHINE TOURNANTE

Dans le cas où la partie tournante d'une machine n'est pas parfaitement équilibrée, elle joue par ses trépidations, le rôle d'excitateur pour les autres parties de la machine susceptibles de vibrer. Lorsque la fréquence de rotation de la machine avoisine la fréquence propre de l'une ou de l'autre de ses parties, l'amplitude des oscillations que prend cette machine peut devenir tellement importante que de dangereuses ruptures se produisent. Ceci explique les vibrations inconfortables ou bruyantes qu'on observe parfois dans une voiture pour certains régimes de rotation du moteur, leur amplitude est d'autant plus grande que les pièces de la carrosserie mises en cause sont plus desserrées, puisque leur amortissement devient plus faible.

C'est aussi l'une des raisons pour lesquelles on équilibre les roues des véhicules en plaçant une masselotte de plomb sur la jante de la roue.

Les paniers à linge des machines à laver sont suspendus à des amortisseurs qui évitent aux châssis une excitation à ses fréquences propres lorsque le panier est en rotation.

Pour les mêmes raisons, les machines outils sont souvent munies de supports amortisseurs.

EXEMPLE D'ILLUSTRATION

Pour illustrer les effets de trépidation, on peut utiliser l'exemple du gyroscope (Fig.12). Cet appareil est constitué essentiellement d'un stator et d'un rotor. La partie fixe (stator) est un bâti portant une série de lamelles d'acier d'inégales longueurs, donc de différentes périodes propres. La partie tournante (rotor) est un disque métallique mobile autour d'un axe fixe passant par son centre et perpendiculaire à son plan.

Un petit trou percé au voisinage du pourtour du disque fait que son centre d'inertie n'est pas situé exactement sur l'axe de rotation et provoque de légères trépidations au cours de sa rotation. Les oscillations sont transmises aux lamelles. Le disque est mis en rotation à l'aide d'une ficelle initialement enroulée sur son axe. A cause des frottements, le disque tourne de moins en moins vite. Lorsque la fréquence des trépidations avoisine la fréquence propre de l'une des lamelles, celle-ci entre en résonance. On voit donc les lamelles entrer en résonance, une à une, sachant que c'est la plus courte qui commence la première vu que sa fréquence propre est la plus grande.



Fig.12 : Gyroscope à lames

4- DANS LES OUVRAGES

Lors d'intempéries, les ponts suspendus peuvent être considérés comme des résonateurs. Si la fréquence des tourbillons due à une tornade est voisine de la fréquence propre des oscillations du pont, il y aura une résonance susceptible d'engendrer de très fortes amplitudes, d'où les effets "spectaculaires" menant parfois à la rupture du pont. Pour plus de détails, il est recommandé de lire la rubrique "en savoir plus".

L'essentiel

- En régime forcé, le dispositif d'entretien des oscillations d'un pendule élastique constitue l'excitateur tandis que le pendule constitue le résonateur.
- La fréquence des oscillations forcées d'un pendule élastique est égale à celle de l'excitateur.
- En présence de frottements visqueux, les oscillations sinusoïdales forcées d'un pendule élastique sont régies par l'équation différentielle :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + kx = F$$

avec $F = F_m \sin(\omega t + \varphi_F)$, valeur algébrique de la force excitatrice.

- En régime sinusoïdal forcé, le résonateur oscille en retard de phase par rapport à l'excitateur avec une amplitude X_m qui dépend de la fréquence N de l'excitateur :

$$X_m = \frac{F_m}{\sqrt{4h^2\pi^2N^2 + (k - 4m\pi^2N^2)^2}}$$

- En régime sinusoïdal forcé, la résonance d'élongation se produit à la fréquence :

$$N_r = \sqrt{N_0^2 - \frac{h^2}{8\pi^2m^2}}$$

- La résonance est d'autant plus aiguë que l'amortissement est plus faible.
- Dans le cas d'un amortissement important, la résonance est floue. Lorsque h dépasse la valeur limite $h_0 = m\omega_0\sqrt{2}$, la résonance devient impossible.
- En régime sinusoïdal forcé, la puissance mécanique moyenne de l'oscillateur est donnée

par la relation :

$$P = \frac{1}{2} h V_m^2$$

Exercices



Exercice résolu 1

ÉNONCÉ

L'extrémité B d'un ressort de raideur $k = 40 \text{ N.m}^{-1}$ est reliée indirectement à un excentrique fixé à un moteur. La deuxième extrémité A du ressort est attachée à un palet (S) de masse $m = 100 \text{ g}$. Sur (S) est fixée une plaque rectangulaire comme l'indique la figure ci-contre.

Le système {palet-ressort} se déplace sur un banc à coussin d'air horizontal.

Lorsque le moteur tourne à une fréquence N , le palet (S) effectue des oscillations de part et d'autre de sa position de repos.

Un stylet fixé sur le palet permet d'enregistrer la position du centre d'inertie G de (S) au cours du temps.

On obtient la courbe $x(t)$ ci-contre, x étant l'abscisse du centre d'inertie G du palet (S) dans un repère galiléen $(O, \vec{i})$ horizontal. Le point O correspond à la position de G lorsque le palet est au repos.

1°) a- Préciser le rôle joué par le moteur muni de l'excentrique et celui joué par le système {palet – ressort}?

b- Déterminer la fréquence et l'amplitude X_m des oscillations du palet (S).

c- Ecrire l'expression de $x(t)$.

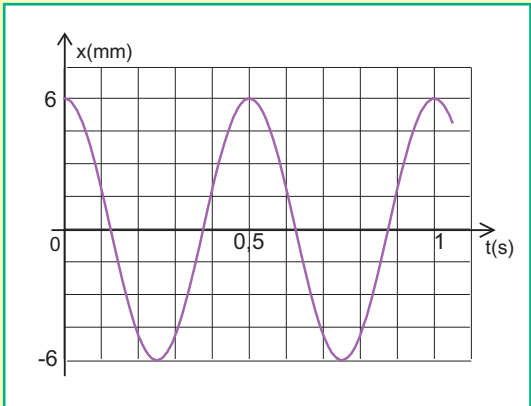
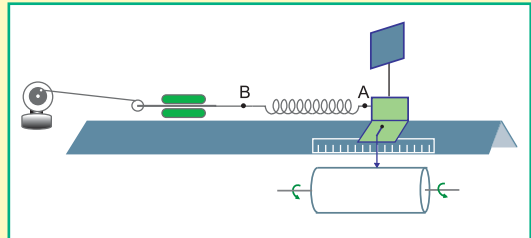
2°) On modifie la fréquence N de rotation du moteur et on note à chaque fois l'amplitude X_m des oscillations du palet (S). Les résultats des mesures sont rassemblés dans le tableau suivant :

N (Hz)	1.5	2,0	2.5	2.8	3.1	3.2	3.3	3.6	4,0	4.5
X_m (mm)	4	6	10	15	21	23	20	15	10	7

a- Tracer le graphe $X_m = f(N)$ traduisant la variation de l'amplitude X_m des oscillations en fonction de la fréquence N .

b- Déterminer la fréquence N_r des oscillations à la résonance et la comparer à la fréquence propre N_0 des oscillations libres du pendule élastique.

c- Comment la courbe $X_m = f(N)$ serait modifiée si on remplace la plaque par une autre de surface plus grande?



SOLUTION

1°) a- Le moteur muni de l'excentrique joue le rôle de l'excitateur. Le système {palet - ressort} joue le rôle de résonateur.

b- D'après l'enregistrement $x(t)$, la période des oscillations est $T = 0.5$ s donc la fréquence vaut 2 Hz. L'amplitude des oscillations est $X_m = 6$ mm.

c- $x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi_x)$

à $t = 0$; $x = X_m \sin \varphi_x = X_m$, d'où : $\sin \varphi_x = 1$ et $\varphi_x = \frac{\pi}{2}$ rad
 $\omega = 2\pi N = 4\pi \text{ rad.s}^{-1}$. Finalement :

$$x(t) = 6 \cdot 10^{-3} \sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

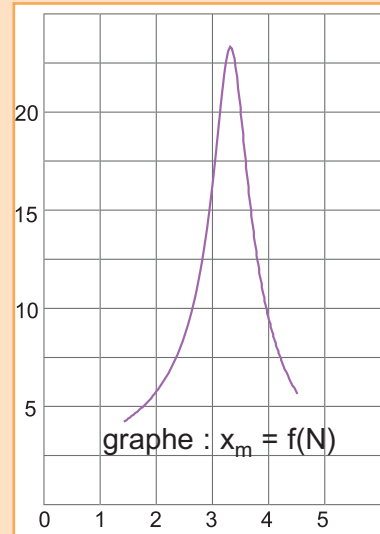
2°) a- Voir graphe: $X_m = f(N)$

b- $N_r = 3.15$ Hz.

$N_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}}$, soit numériquement : $N_0 = 3.18$ Hz.

On remarque que N_r est légèrement inférieure à N_0 .

c- Lorsqu'on remplace la plaque fixée sur le palet par une autre de surface plus grande, l'amortissement augmente, X_m est moins important à la résonance. La courbe présentera un pic moins prononcé ; la résonance est moins auguë.



Exercice résolu 2

ÉNONCÉ

Une voiture roule sur une piste saharienne, avec une vitesse constante. Elle rencontre des bosses régulièrement espacées d'une distance $d = 20$ m les unes des autres. La masse totale de la voiture et de son conducteur est $m = 1000$ kg.

1°) Sachant que la voiture est assimilable à un système { solide ; ressort } oscillant verticalement, montrer que le conducteur doit éviter de rouler à une vitesse critique v_c . Calculer v_c sachant que la raideur du ressort vaut $k = 4 \cdot 10^4 \text{ N.m}^{-1}$.

2°) Expliquer le rôle des amortisseurs de la voiture.

SOLUTION

1°) La série de bosses régulièrement espacées impose à la voiture des oscillations forcées de période T égale à la durée séparant les passages de la voiture sur deux bosses

successives : $T = \frac{d}{v}$. L'ensemble (voiture ; amortisseurs) se comporte comme un oscillateur

mécanique de période propre : $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$. La résonance a lieu lorsque $T = T_0$, ce qui est

obtenu pour une certaine vitesse $v = v_c$. On aura alors : $\frac{d}{v_c} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ d'où : $v_c = \frac{d}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$

Soit, numériquement $v_c = 20,14 \text{ m.s}^{-1}$ ou $v_c = 72,5 \text{ km.h}^{-1}$.

2°) Les amortisseurs absorbent une partie de l'énergie des oscillations. L'amplitude des secousses provoquées par la succession des bosses est ainsi diminuée, ce qui entraîne une meilleure tenue de route et donc plus de sécurité.



Exercices à résoudre



Tests rapides des acquis

1

Items "vrai ou faux"

Evaluer les propositions suivantes par vrai ou faux.

- 1°) Pour un pendule élastique en régime sinusoïdal forcé, le ressort constitue l'excitateur tandis que le solide (S) qui lui est attaché est le résonateur.
- 2°) La période des oscillations forcées d'un pendule élastique est imposée par l'excitateur.
- 3°) En régime sinusoïdal forcé, le pendule élastique peut osciller avec sa période propre.
- 4°) La résonance d'élongation a lieu à chaque fois que la fréquence de l'excitateur est égale à la fréquence propre du résonateur.
- 5°) Pour un pendule élastique en régime sinusoï-

dal forcé, l'élongation x du centre d'inertie du solide (S) évolue toujours en retard de phase par rapport à la valeur algébrique F de la force excitatrice.

6°) L'élongation du centre d'inertie d'un pendule élastique n'est maximale qu'à la résonance.

7°) A la résonance d'élongation, l'amplitude X_m des oscillations d'un pendule élastique augmente avec l'amortissement.

8°) Lorsque l'amortissement est faible, la courbe de résonance est caractérisée par un pic très large.

2

Questions à Choix Multiples

Préciser pour chacune des questions suivantes, la (ou les) proposition(s) juste(s).

1°) En régime sinusoïdal forcé, l'élongation du résonateur est :

a-toujours en retard de phase par rapport à sa vitesse ;

b-toujours en retard de phase par rapport à la force excitatrice ;

c-alternativement en avance de phase et en retard de phase par rapport à la force excitatrice.

2°) A la résonance, l'amplitude X_m des oscillations d'un pendule élastique est :

a-maximale seulement en valeur absolue ;

b-la plus élevée ;

c-indépendante de l'amortissement.

3°) A la résonance d'élongation, la période d'un pendule élastique :

a-n'est pas égale à celle de l'excitateur ;

b-ne dépend que de la période propre de l'oscillateur ;

c- dépend du coefficient de frottement.

4°) L'amplitude X_m des oscillations forcées d'un pendule élastique est :

a-d'autant plus grande que l'amortissement est plus important ;

b-d'autant plus grande que la valeur de la fréquence de l'excitateur est plus proche de la valeur de sa fréquence propre ;

c-d'autant plus petite que sa masse est plus grande.

5°) Pour un pendule élastique en régime sinusoïdal forcé, la résonance d'élongation :

a-n'est possible que lorsque sa période propre est très petite ;

b-peut être obtenue avec n'importe quelle valeur du coefficient de frottement ;

c-est d'autant plus aiguë que l'amortissement est plus faible.

6°) D'après l'analogie électrique mécanique :

a-comme on définit l'impédance électrique, on peut définir l'impédance mécanique ;

b-comme il y a la résonance d'intensité de courant électrique, il y a une résonance d'élongation mécanique ;

c-la puissance mécanique moyenne est constante à la résonance d'élongation.

Exercices d'application

3 L'une des extrémités d'un ressort de masse négligeable et de raideur $k = 50 \text{ N.m}^{-1}$ est attachée à un solide (S) de masse $m = 100 \text{ g}$. L'ensemble est monté de manière à réaliser un pendule élastique horizontal. La deuxième extrémité du ressort est liée à un dispositif d'excitation qui permet de mettre le pendule en mouvement et de l'entretenir.

- 1°) Identifier l'excitateur et le résonateur.
- 2°) Calculer la période propre T_0 des oscillations du pendule élastique.
- 3°) Que risque-t-il de se produire lorsque le dispositif d'excitation impose au pendule une fréquence d'oscillations proche de sa fréquence propre ? Pourquoi ?

4 L'extrémité supérieure d'un ressort (R) est reliée à un excentrique solidaire d'un moteur effectuant N tours par seconde. L'extrémité inférieure de (R) est fixée à un solide (S) qui plonge dans un liquide visqueux.

On actionne le moteur, et on mesure pour chaque fréquence N de rotation, la valeur de l'amplitude X_m des oscillations. Les résultats des mesures sont consignés dans le tableau suivant :

N (Hz)	1.5	2.0	2.5	2.8	3.1	3.2	3.3	3.6	4.0	4.5
X_m (cm)	0.4	0.6	1.0	1.5	2.1	2.3	2.0	1.5	1.0	0.7

- 1°) Tracer le graphe traduisant les variations de l'amplitude X_m en fonction de la fréquence N .
- 2°) Quel phénomène obtient-on à $N = 3.2 \text{ Hz}$?
- 3°) En déduire la période des oscillations à la résonance.
- 4°) Quelle modification subirait le graphe précédent lorsqu'on fait osciller le solide (S) dans l'air ?

5 Sur une piste saharienne, le vent produit sur le sable des bosses qui se succèdent régulièrement à une distance $d = 60 \text{ cm}$. Une voiture parcourt cette piste à la vitesse v

constante. Le conducteur sait qu'il faut rouler ou très lentement ou avec une vitesse supérieure à une certaine valeur pour éviter les sensations désagréables et les détériorations du véhicule.

1°) Avec quelle période, la roue de la voiture passe-t-elle d'une bosse sur la suivante ? En déduire la fréquence de ce phénomène.

2°) L'action des bosses successives fait que la voiture soit en régime d'oscillations forcées.

a- Préciser l'excitateur et le résonateur.

b- L'oscillateur constitué par la roue, son ressort de suspension et son amortisseur est caractérisé par une fréquence propre $N_0 = 5 \text{ Hz}$. Montrer qu'il existe une valeur v_0 de la vitesse pour laquelle l'oscillateur entre en résonance. On admettra que la fréquence de résonance est la fréquence propre de l'oscillateur.

Exercices de synthèse

6 Un oscillateur mécanique comporte un solide (S), de masse m et de centre d'inertie G , attaché à l'une des extrémités d'un ressort (R) de raideur k et de masse négligeable. L'autre extrémité du ressort est fixe. L'ensemble {ressort, solide (S)} est disposé horizontalement. Le solide (S) est soumis à une force de frottement de type visqueux $\vec{f} = -h\vec{v}$ où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse instantanée de G et h est une constante positive. A l'aide d'un dispositif approprié on applique sur (S) une force excitatrice

$$\vec{F}(t) = F_{\max} \sin(2\pi Nt + \varphi_F) \vec{i}.$$

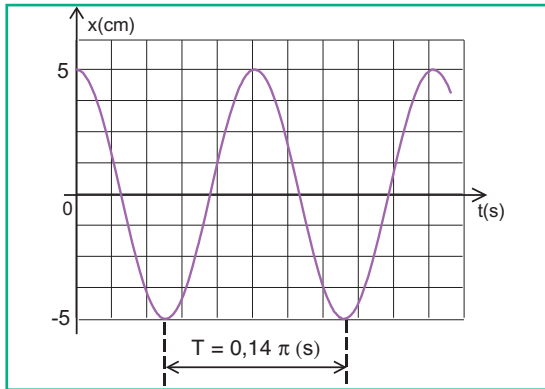
On désigne par $x(t)$ l'élongation du centre d'inertie G en fonction du temps par rapport au repère $(O, \vec{i})$, O étant la position d'équilibre de G .

1°) Montrer que l'élongation x , sa dérivée

première $\frac{dx}{dt}$ et sa dérivée seconde $\frac{d^2x}{dt^2}$

vérifient la relation : $m \frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$

2°) Le dispositif d'enregistrement des oscillations de (S) est constitué d'un cylindre enregistreur sur lequel est enroulé un papier millimétré et d'un stylet marqueur, solidaire du solide (S), et affleurant le papier millimétré. Dans le cas de l'expérience étudiée, ce dispositif permet d'obtenir le diagramme suivant et qui correspond aux variations de l'élongation $x(t)$ en accord avec l'équation : $x(t) = X_m \sin(2\pi Nt + \varphi_x)$.



a-Sachant que les deux oscillations présentées sur le diagramme de la figure ci-contre correspondent à un tour complet du cylindre enregistreur, en déduire le nombre de tours par minute effectués par ce cylindre. Déterminer, à partir de ce diagramme : les valeurs de $X_{\max}$, N et φ_x .

b-Sachant que $m = 98 \text{ g}$ et $k = 20 \text{ N.m}^{-1}$, montrer que (S) effectue des oscillations mécaniques forcées correspondant à une résonance de vitesse.

c-En déduire qu'à tout instant t , $x(t)$ vérifie

la relation suivante : $m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$.

d-Déterminer les valeurs de $F_{\max}$, φ_F et la puissance mécanique moyenne absorbée par l'oscillateur. On donne $h = 1.8 \text{ kg.s}^{-1}$.

7 Relié à l'une des extrémités d'un ressort, un solide (S) de masse $m = 51 \text{ g}$ oscille sur un banc à coussin d'air horizontal. La deuxième extrémité du ressort est animée d'un mouvement sinusoïdal de translation, grâce à un système de transmission relié à un disque mis en rotation par un moteur de fréquence N réglable.

On fait tourner le moteur à raison de 1,25 tours par seconde, l'amplitude des oscillations du solide (S) est maximale et vaut 4,8 cm.

1°) Proposer un montage correspondant à la description précédente et permettant d'enregistrer le mouvement du solide (S).

2°) Préciser, dans le montage l'excitateur et le résonateur.

3°) a-Déterminer la période du mouvement du solide (S)

b-Déduire une valeur approchée de la raideur du ressort.

4°) On fixe au solide (S) une palette que l'on immerge dans l'eau. L'amplitude des oscillations devient 2,4 cm.

a-Interpréter cette diminution d'amplitude.

b-Dans quel sens évolue l'amplitude lorsqu'on remplace l'eau par de l'huile ?

5°) On fait varier la fréquence N du moteur. On constate que l'amplitude des oscillations prend une valeur maximale pour une fréquence particulière N_r .

a-De quel phénomène s'agit-il ?

b-La période et l'amplitude des oscillations dépendent-elles de la nature du liquide utilisé lorsque ce phénomène se produit ?

8 Un oscillateur est constitué d'un pendule élastique {solide (S) de masse m relié à un ressort de raideur k } horizontal. Le pendule est excité à l'aide d'un moteur muni d'un excentrique, celui-ci produit une force périodique qui agit sur l'extrémité du ressort qui n'est pas reliée au solide (S).

1°) Quel type d'oscillations, le résonateur effectue-t-il ? Avec quelle période oscille-t-il ?

2°) Sachant que la période propre du pendule élastique vaut $T_0 = 0,46$ s, quel phénomène aura-t-il lieu si la période de la force excitatrice devient voisine de 0,46 s ?

3°) On fait varier maintenant la fréquence N du moteur et on note l'amplitude X_m des oscillations du pendule. Les résultats des mesures sont rassemblés dans le tableau suivant :

N(Hz)	1.2	1.4	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3	2.5	2.7	2.9
$X_m(\text{cm})$	1.6	2.2	4.8	5.7	6.4	6.8	6.5	5.6	4.2	3.2	2.7

a-Tracer sur une feuille de papier millimétrée la courbe traduisant l'évolution de l'amplitude X_m en fonction de la fréquence N .

b-Déterminer la fréquence de résonance N_r et la comparer à la fréquence propre N_0 de l'oscillateur.

9 Un solide (S) de masse m est accroché à l'extrémité d'un ressort de raideur k dont l'autre extrémité est fixe. L'ensemble est horizontal et (S) subit des actions de frottement visqueux équivalentes à une force $\vec{f} = -h \vec{v}$ proportionnelle à la vitesse et de sens opposé ; h est constante. De plus (S) subit une force F dirigée suivant l'axe du ressort et dont la projection sur cet axe est $F = F_m \sin \omega t$.

1°) Etablir l'équation :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + kx = F_m \sin \omega t$$

2°) En utilisant la construction de Fresnel obtenue par analogie avec celle qui correspond à un circuit RLC série, montrer

que $Z = \frac{F_m}{V_m} = \sqrt{h^2 + (m\omega - \frac{k}{\omega})^2}$, où V_m est la

vitesse maximale de (S), et que le déphasage

entre F et v est donné par $\tan \varphi = \frac{(m\omega - \frac{k}{\omega})}{h}$.

3°) En déduire l'expression de la vitesse v en fonction du temps t , de F_m , de Z et de φ .

4°) De l'expression précédente déduire celle de $x(t)$.

5°) En faisant varier ω , mais en maintenant constante la valeur de F_m , V_m varie. Déterminer la valeur de ω pour laquelle V_m est maximale (résonance de vitesse). Quel est alors le déphasage entre la vitesse v et la force F ?

6°) L'amplitude des élongations varie également en fonction de ω . Montrer qu'elle est maximale (résonance d'amplitude) quand la quantité $Y = [m^2\omega^4 + (h^2 - 2mk)\omega^2 + k^2]$ est minimale. Déterminer la valeur ω_r qui rend Y minimale. Vérifier que $\omega_r < \omega_0$. Montrer qu'il existe une valeur du coefficient de frottement telle qu'il n'existe plus de phénomène de résonance d'amplitude.

Etude de texte

10 Dans le film «le salaire de la peur» de Henri-Georges Clouzot, les héros doivent transporter de la nitroglycérine (explosif puissant) dans un camion. La piste empruntée est constituée d'une succession régulière de rigoles creusées par le ruissellement de l'eau. Une piste de ce genre est appelée «tôle ondulée».

L'un des acteurs affirme à ses collègues qu'il faut rouler soit très lentement soit très vite pour éviter de faire exploser le chargement.

1°) Quel est le phénomène susceptible de se produire lorsqu'un véhicule roule sur ce type de piste ?

2°) Sachant que la masse du camion chargé est $m = 10$ tonnes et que ses suspensions s'affaissent de 1,2 mm lorsqu'il porte une charge de 6,5 tonnes, calculer :

a-la raideur du ressort équivalent aux suspensions du camion.

b-la période et la fréquence des oscillations du camion.

3°) Le camion roule sur une tôle ondulée dont les bosses sont régulièrement espacées d'une distance $d = 0,70$ m. Pour quelle vitesse de déplacement, le phénomène sera le plus perceptible ?

4°) L'affirmation de l'acteur est-elle justifiée?

En savoir plus

Dangers de la résonance

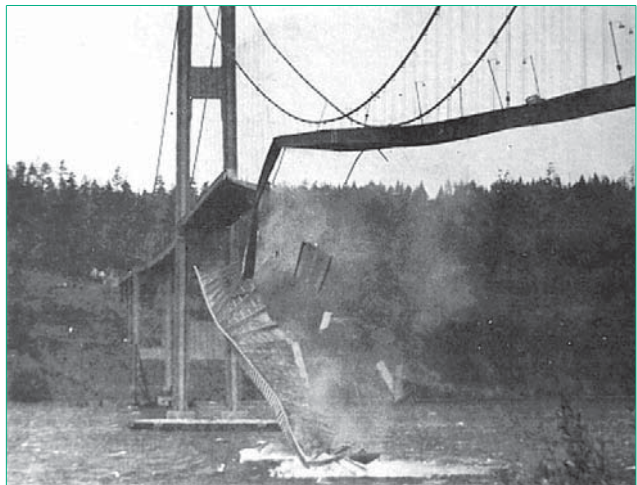
Généralement en mécanique le phénomène de résonance est à éviter vu les effets néfastes qu'il peut engendrer. En effet la suspension d'une voiture peut être modélisée par un ressort vertical de raideur k sur lequel est posé un solide de masse m . L'ensemble constitue un oscillateur.

Il en est de même pour les constructions et bâtiments que le vent et les secousses sismiques peuvent mettre en oscillations avec des amplitudes importantes, risquant même leur destruction. Un conducteur de voiture doit éviter de rouler à certaines vitesses lorsqu'il rencontre certains types d'irrégularités dans la chaussée ou sur une piste saharienne dans les rallyes par exemple, où le vent produit sur le sable des ondulations. Pour ces vitesses, le véhicule entre en résonance, l'amplitude de ses oscillations augmente fortement et cela peut engendrer des dangers ; les roues décollent de la route et perdent toute adhérence. Pour limiter cet effet désagréable et assurer plus de sécurité, on ajoute des amortisseurs, généralement à huile (à gaz sur les motos), qui permettent de diminuer l'amplitude du mouvement dans le cas où il y a résonance.

Le cas du Tacoma Narrow Bridge, situé à Puget Sound dans l'état de Washington aux U.S.A. est un exemple célèbre : en novembre 1940, cinq mois après son ouverture à la circulation, les rafales de vent périodiques, jouant le rôle d'excitateur, ont provoqué la résonance du pont qui s'est mis à vibrer et en quelques heures, les vibrations sont devenues si importantes que le pont s'est effondré.

De même, le 16 avril 1850, le tablier d'un pont suspendu sur la maine à Angers en France, se rompit au passage d'une troupe marchant au pas cadencé. A la suite de ces événements les ponts sont dessinés de manière à les rendre aérodynamiquement stables. Les tabliers des ponts actuels sont tous arrimés au sol par l'intermédiaire de vérins amortisseurs qui permettent de limiter le phénomène de résonance. Les bâtiments de grande hauteur, comme les tours et les gratte-ciel sont particulièrement sensibles aux vibrations provoquées par les bourrasques de vent, les turbulences et les secousses sismiques. Leur construction doit en tenir compte. Citons l'exemple de la conception et la réalisation de la tour Taipei 101 à Taiwan achevée en 2004, qui mesure 508 mètres de haut pour 101 étages.

Une boule en acier de 800 tonnes suspendue entre les 88^{ème} et 92^{ème} étages permet d'amortir les oscillations engendrées par les vents et les secousses sismiques.



Pont de Tacoma Narrow après sa rupture

Objectifs

- ◆ Reconnaître le schéma d'un filtre électrique.
- ◆ Distinguer entre l'entrée et la sortie d'un filtre électrique.
- ◆ Représenter, sur le schéma d'un filtre, les grandeurs intensité et tension.
- ◆ Définir la fonction de transfert (ou la transmittance) T d'un filtre.
- ◆ Déterminer le gain d'un filtre électrique en décibel.
- ◆ Reconnaître la courbe de réponse d'un filtre : $T = f(N)$ ou $G = h(N)$.
- ◆ Tracer la courbe de réponse d'un filtre électrique.
- ◆ Déterminer la (ou les) fréquence(s) de coupure d'un filtre électrique.
- ◆ Déterminer la bande passante à -3 dB d'un filtre électrique.

Prérequis

SAVOIR	SAVOIR-FAIRE
◆ Définir un quadripôle. ◆ Caractériser une grandeur sinusoïdale par sa période, son amplitude et sa phase initiale. ◆ Ecrire les relations entre la pulsation, la période et la fréquence d'une grandeur sinusoïdale. ◆ Ecrire la relation entre la valeur maximale et la valeur efficace d'une tension sinusoïdale. ◆ Définir l'impédance d'un dipôle.	◆ Schématiser un quadripôle. ◆ Visualiser, simultanément, deux tensions électriques à l'oscilloscope. ◆ Déterminer, graphiquement, la période, l'amplitude et la phase initiale d'une grandeur électrique oscillante. ◆ Appliquer la relation entre la valeur maximale et la valeur efficace d'une tension sinusoïdale.