OSCILLATIONS LIBRES D'UN PENDULE ÉLASTIQUE

5

Avec son amortissur à ressort, le VTT (Vélo Tout Terrain) TS (Tout Suspendu) donne au cycliste un confort d'utilisation supérieur dans une compétition de descente d'une montagne.

En évitant le balancement des anneaux, le gymnaste démontre tant sa force que son équilibre.

- **Les geysers, le coeur humain et le balancier d'une horloge sont, entre beaucoup d'autres exemples, des systèmes oscillants. Pourquoi ?**
- **Quelle est l'origine du ronflement continu que l'on entend souvent à proximité de fils électriques ou téléphoniques aériens ?**
- **A quoi est due la catastrophe naturelle connue sous le nom de tsunami ?**

OSCILLATIONS LIBRES D'UN PENDULE ELASTIQUE

On désigne par pendule élastique tout système constitué d'un solide (S) de masse m attaché à un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur k.
Dans le présent chapitre on s'intéresse à l'évolution d'un tel système mécanique au cours du temps.

OSCILLATIONS LIBRES NON AMORTIES

1 MISE EN EVIDENCE

Manipulation

Un pendule élastique est disposé horizontalement sur un banc à coussin d'air comme l'indique la figure 1. La masse du solide (S) est m = 0.1 kg et la raideur du ressort est k = 20 $N.m^{-1}$.
Le solide (S) étant au repos, on l'écarte d'une distance d = 2cm de sa position d'équilibre dans la direction de l'axe du ressort puis on l'abandonne à lui-même sans vitesse initiale. Le solide (S) effectue des oscillations de part et d'autre de sa position d'équilibre (position de repos) : on dit que les oscillations sont libres. Le système {solide, ressort} constitue un oscillateur libre. L'enregistrement graphique des premières oscillations libres du solide (S) est donné par la figure 2.

Remarque :
L'enregistrement graphique peut être réalisé à l'aide d'un dispositif d'acquisition informatique.

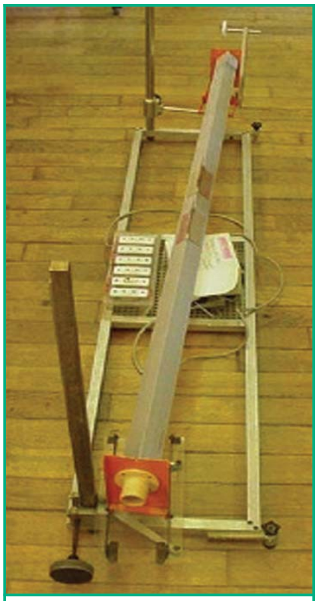


Fig.1 : Oscillateur mécanique sur banc à coussin d'air

Questions

1°) A l'aide de l'enregistrement graphique de la figure 2 :
- **a-** mesurer les valeurs maximales ainsi que les valeurs minimales de l'élongation x du centre d'inertie G du solide (S), les comparer entre elles et à la distance d dont on a écarté G initialement de sa position d'équilibre.
- **b-** mesurer les intervalles de temps séparant les maximums (ou les minimums) successifs et les comparer entre eux.

2°) Déduire des réponses aux questions 1-a et 1-b si les oscillations du pendule élastique utilisé sont amorties ou bien non amorties et qu'elles sont périodiques de période T_0 que l'on précisera.

3°) Conclure quant à la nature du mouvement de G.

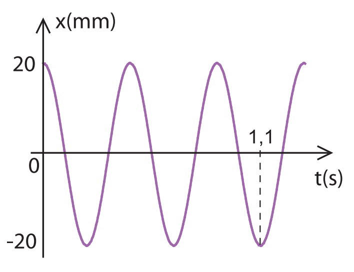


Fig.2 : Enregistrement graphique des premières oscillations libres du solide (S)

Conclusion

Les oscillations libres non amorties d'un pendule élastique sont rectilignes sinusoïdales.

L'élongation s'écrit : $x = X_m \sin(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi)$

Remarque

Les valeurs de l'amplitude X_m et de la phase initiale φ dépendent des conditions initiales.

2 FACTEURS DONT DEPEND LA PERIODE DES OSCILLATIONS

2.1- Influence de l'amplitude

Manipulation

On refait la même expérience pour différentes valeurs de d (Xm). A l'aide d'un chronomètre, on mesure la durée Δt de dix oscillations. Les résultats des mesures sont consignés dans le tableau suivant :

X_m (cm)	1	2	3	4	5
Δt (s)	4.4	4.5	4.4	4.4	4.5

Remarque

La même manipulation peut être réalisée avec un pendule élastique vertical (Fig. 3).

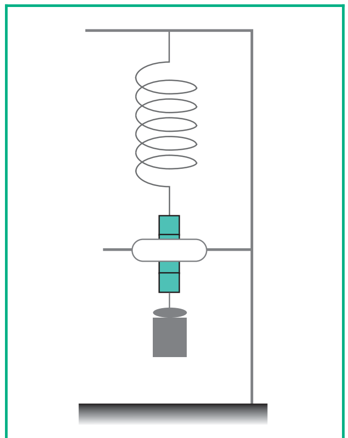


Fig.3 : pendule élastique vertical

Questions

1°) Calculer la période T_0 des oscillations correspondant à chacune des amplitudes X_m choisies.

2°) Comparer les valeurs trouvées entre elles et en déduire si les oscillations, d'amplitudes différentes, sont isochrones.

Conclusion

La période T_0 des oscillations libres non amorties d'un pendule élastique est indépendante de leur amplitude.

2.2- Influence de la masse du solide (S)

Manipulation

On refait encore la même expérience avec des solides de masses m différentes. On détermine à chaque fois, indirectement, la période T_0 des oscillations.

Les résultats des mesures sont consignés dans le tableau suivant :

m (kg)	0.050	0.100	0.150	0.200	0.250	0.300
$\Delta t = 10T_0$ (s)	3.2	4.4	5.4	6.3	7.0	7.7

Questions

1°) Montrer, qualitativement, que la période T_0 des oscillations n'est pas proportionnelle à m.

2°) L'évolution de T_0^2 en fonction de la masse m est donnée par la figure 4. Montrer que T_0^2 est proportionnelle à m et déterminer la constante de proportionnalité entre ces deux grandeurs.

3°) En déduire la relation entre la période T_0 des oscillations et la masse m du solide (S).

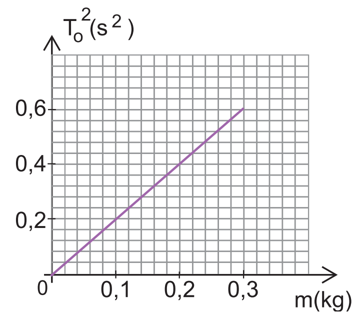


Fig.4 : Courbe $T_0^2 = f(m)$

Conclusion

La période des oscillations libres non amorties d'un pendule élastique est proportionnelle à la racine carrée de la masse du solide (S).

2.3- Influence de la raideur du ressort

Manipulation

La même expérience, réalisée avec le même solide (S) de masse 100 g, accroché à des ressorts de raideurs différentes, donne les résultats consignés dans le tableau suivant :

k ($N.m^{-1}$)	10	20	30	40	50
$\Delta t = 10\ T_0$ (s)	6.28	4.44	3.62	3.14	2.80

Questions

1°) Montrer, qualitativement, que la période T_0 des oscillations n'est pas inversement proportionnelle à la raideur k du ressort.

2°) La courbe représentant $T_0^2 = f\left(\frac{1}{k}\right)$ est donnée par la figure 5. Montrer que T_0^2 est proportionnelle à $\frac{1}{k}$. Déterminer la constante de proportionnalité.

3°) En déduire la relation entre la période T_0 des oscillations et la raideur k du ressort.

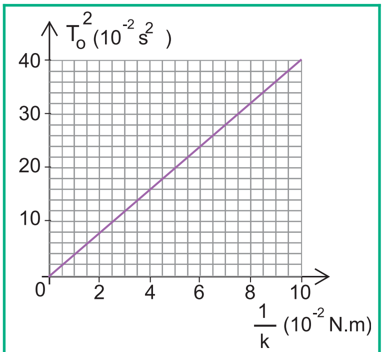


Fig.5 : Courbe $T_0^2 = f(\frac{1}{k})$

Conclusion

La période des oscillations libres non amorties d'un pendule élastique est inversement proportionnelle à la racine carrée de la raideur k du ressort.

2.4- Conclusion générale : Expression de la période T_0

La période d'un pendule élastique est indépendante de l'amplitude des oscillations. Elle ne dépend que des grandeurs m et k caractéristiques du pendule, d'où sa qualification de période propre. Etant à la fois proportionnelle à $\sqrt{m}$ et inversement proportionnelle à $\sqrt{k}$, la période propre d'un pendule élastique est alors proportionnelle à $\sqrt{\frac{m}{k}}$ ce qui signifie $T_0 = C\sqrt{\frac{m}{k}}$ où C est une constante dont la valeur 2π peut être déduite des résultats obtenus précédemment.

Ainsi, la période propre T_0 d'un pendule élastique de masse m et raideur k, a pour expression $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

3 ETUDE THEORIQUE

Dans toutes les expériences réalisées précédemment et par rapport à un repère lié au laboratoire, le solide (S) est soumis aux forces extérieures suivantes :

- son poids $\vec{P}$.
- la réaction $\vec{R}$ du coussin d'air.
- la tension $\vec{T}$ du ressort.

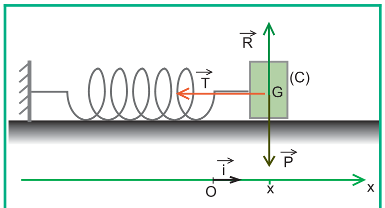


Fig.6 : Forces extérieures au solide (S)

Questions

1°) a-Montrer que : $\vec{T} = -kx\,.\vec{i}$, où k est la raideur du ressort et x est l'élongation du centre d'inertie G de (S) à un instant t (fig. 6) .

b-Justifier la qualification de la tension $\vec{T}$ du ressort comme étant une force de rappel.

2°) Par application de la relation fondamentale de la dynamique au solide (S) dans un repère lié au laboratoire, montrer que l'équation différentielle du mouvement de G s'écrit: $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

3°) Vérifier que cette équation différentielle admet une solution générale de la forme : $x = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$.

4°) Montrer que l'expression théorique de la période propre T_0 du pendule élastique s'identifie bien à celle trouvée expérimentalement.

Conclusion

Etant sinusoïdales, les oscillations libres non amorties d'un pendule élastique sont régies par l'équation différentielle :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

4 ENERGIE D'UN PENDULE ELASTIQUE

L'énergie mécanique E du système {solide (S) + ressort} est la somme de l'énergie cinétique E_c due au mouvement du solide (S) et de l'énergie potentielle élastique E_p due à la déformation du ressort : $E = E_c + E_p$.

4.1- Energie cinétique

L'énergie cinétique du solide (S) est $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

or, $v = \frac{dx}{dt} = X_m\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$ d'où : $E_c = \frac{1}{2}mX_m^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$.

Compte tenu de $\omega_0^2 m = k$, il vient :

$$E_c = \frac{1}{2}kX_m^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{4}kX_m^2[1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]$$

Donc, les variations de l'énergie cinétique en fonction du temps sont périodiques de période $\frac{T_0}{2}$ (Fig. 7, cas où $\varphi = 0$)

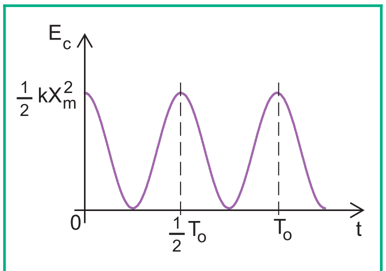


Fig.7 : Energie cinétique en fonction du temps (cas où $\varphi = 0$)

4.2- Energie potentielle élastique

On a vu en deuxième année que l'énergie potentielle élastique d'un système matériel déformable dépend de ses caractéristiques. Pour un pendule élastique, étant une fonction de la raideur k du ressort et de sa déformation Δl, elle s'écrit sous la forme :

$$E_p = \frac{1}{2}k\,\Delta l^2$$

Questions

1°) Montrer que l'énergie potentielle élastique E_p du système {solide, ressort} s'écrit :

$$E_p = \frac{1}{4}kX_m^2[1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]$$

2°) Représenter la courbe $E_p = f(t)$ et montrer que sa période est $\frac{T_0}{2}$.

4.3- L'énergie mécanique et sa conservation

$E = E_c + E_p$

En remplaçant E_c et E_p par les expressions trouvées,

on aura : $E = \frac{1}{2}kX_m{}^2[\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi)]$.

Or, $\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = 1$.

Il vient donc : $E = \frac{1}{2}kX_m{}^2 = \frac{1}{2}mV_m{}^2$.

Ainsi, $E = \frac{1}{2}mv^2(t) + \frac{1}{2}kx^2(t) = \text{cte}$, ∀ t.

Conclusion

En régime libre non amorti, l'énergie mécanique d'un pendule élastique horizontal est constante. Par suite, un tel système est dit conservatif.

4.4- Transformations mutuelles de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle

Au cours de ses oscillations libres non amorties, le pendule élastique passe périodiquement par sa position de repos ($x = 0$) avec une vitesse maximale en valeur absolue ($v = \pm V_m$) et rebrousse chemin lorsque, simultanément, sa vitesse s'annule et son élongation est extrémale ($x = \pm X_m$).

Question

Interpréter énergétiquement ces propriétés oscillatoires.

Interprétation

Lorsque le pendule élastique est écarté au maximum de sa position d'équilibre, position pour laquelle on a $x = X_m$ par exemple, son énergie est purement potentielle.

En se rapprochant de la position de repos, l'élongation x diminue tandis que la valeur de la vitesse augmente. Par conséquent, l'énergie potentielle diminue aux dépens de l'énergie cinétique.

En atteignant la position de repos, l'oscillateur continue à se déplacer grâce à son énergie cinétique.

Au fur et à mesure qu'il s'en éloigne, son énergie cinétique diminue tandis que son énergie potentielle augmente. En atteignant la position $x = - X_m$, l'énergie cinétique s'annule tandis que l'énergie potentielle est maximale. Le solide (S) rebrousse alors chemin.

Par un raisonnement analogue, on montre qu'il va atteindre de nouveau la position extrême $x = X_m$ et ainsi de suite.

La courbe de la figure 8 montre que l'énergie cinétique et l'énergie potentielle dont la somme est constante varient toujours en sens inverses. En effet, lorsque l'une diminue, l'autre augmente et quand l'une s'annule, l'autre est maximale.

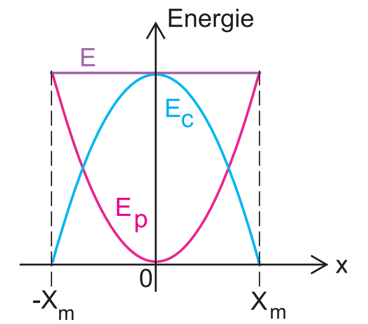


Fig.8 : Transformation de l'énergie cinétique en énergie potentielle et inversement.

Conclusion

Les oscillations libres non amorties d'un pendule élastique sont auto-entretenues par les transformations mutuelles de ses énergies cinétique et potentielle.

OSCILLATIONS LIBRES AMORTIES

Dans la pratique, on constate que l'amplitude des oscillations libres du pendule élastique diminue progressivement à cause des facteurs dissipatifs inévitables (essentiellement les frottements). Même sur une table à coussin d'air, où les frottements sont notablement amoindris, les oscillations prennent fin au bout d'un temps plus ou moins long. De telles oscillations sont dites amorties.

1 ETUDE EXPERIMENTALE

Manipulation

On reprend le dispositif de la figure 1 et on fixe sur le solide une palette perpendiculairement à la direction du déplacement et qui peut se déplacer soit dans l'air, soit dans un liquide.
On peut enregistrer le mouvement du solide oscillant avec la palette se déplaçant d'abord dans l'air puis dans l'eau. On obtient, dans le cas des oscillations amorties, des courbes comme celles des figures 9 et 10.

Questions

1°) A l'aide des chronogrammes des figures 9 et 10 :

a-préciser comment évolue l'amplitude des oscillations libres du pendule au cours du temps ; en déduire que les oscillations sont plus amorties dans l'eau que dans l'air.

b-montrer que les maximums (ou minimums) sont atteints avec la palette dans l'air puis dans l'eau, à des intervalles de temps successifs égaux respectivement à T_1 et à T_2 que l'on calculera.

2°) Comparer les intervalles de temps T_1 et T_2 entre eux et avec la période propre T_0 du pendule.

3°) Déduire des réponses aux questions 1-a et 1-b que, comme celles d'un circuit RLC série, les oscillations libres amorties d'un pendule élastique sont pseudopériodiques.

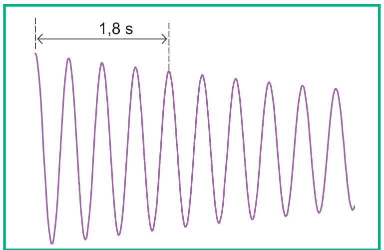


Fig.9 : Oscillations dans l'air

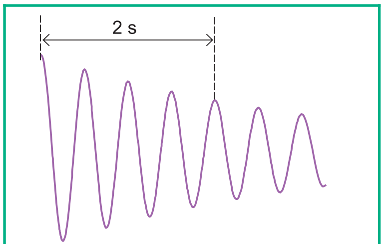


Fig.10 : Oscillations dans l'eau.

Interprétation

Les courbes des figures 9 et 10 montrent que l'amplitude des oscillations décroît plus vite dans l'eau que dans l'air. Or, on sait que la décroissance de l'amplitude est d'autant plus grande que l'amortissement est plus important. Donc, l'eau amortit plus les oscillations que l'air.
Le passage du solide par la position d'équilibre est toujours périodique, mais le mouvement oscillatoire n'est plus périodique à cause de la diminution de l'amplitude. Le mouvement est dit pseudopériodique.

On appelle pseudopériode la durée T qui sépare deux passages successifs du solide par la même position et dans le même sens.
La pseudopériode T (T_1 ou T_2) est voisine de la période propre T_0 des oscillations.

Lorsqu'on augmente les frottements en immergeant totalement la palette dans l'eau, ou en utilisant un liquide plus visqueux que l'eau (de l'huile par exemple), on constate que le mouvement cesse d'être oscillatoire à partir d'une certaine valeur de l'amortissement : on dit qu'il est apériodique (Fig.11). Pour un amortissement particulier, l'oscillateur retourne à sa position d'équilibre, sans osciller, en un minimum de temps : un tel régime est dit apériodique critique.

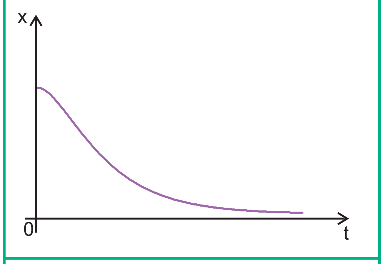


Fig.11 : Régime apériodique

Conclusion
Selon l'importance de l'amortissement, les oscillations d'un pendule élastique sont :
- faiblement amorties, le régime est pseudopériodique.
- fortement amorties, le régime est apériodique.

2 ETUDE THÉORIQUE

2.1- Equation différentielle des oscillations

Dans un repère lié au laboratoire, le solide (S) est soumis aux forces extérieures suivantes (Fig.12) :
- son poids $\vec{P}$,
- la réaction $\vec{R}$ du coussin d'air,
- la tension du ressort (force de rappel) $\vec{T} = -K\,x\,\vec{i}$,
- les forces de frottement ; celles- ci étant supposées de type visqueux, elles sont équivalentes à une force $\vec{f}$ de sens contraire au vecteur vitesse et de la forme : $\vec{f} = -h\vec{v}$ où h est est une constante positive, ne dépendant que de la nature du liquide visqueux, appelée coefficient de frottement.

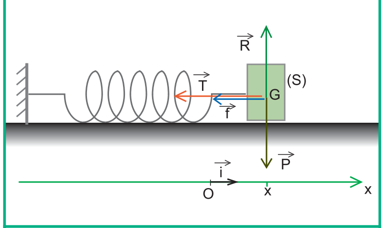


Fig.12 : Bilan des forces extérieureà (S)

La deuxième loi de Newton, appliquée au solide (S), s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{f} = m\vec{a}$$

Par projection orthogonale sur l'axe x'x on obtient :

$$-kx - h\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}\text{ , avec }\frac{dx}{dt} = v\text{ et }\frac{d^2x}{dt^2} = a,$$

il vient finalement : $m\frac{d^2x}{dt^2}+h\frac{dx}{dt}+kx=0$ ou encore :

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{h}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0 \qquad \textbf{(1)}$$

Remarque

Cette équation différentielle admet des solutions qui dépendent de la valeur de h et qui donnent les régimes mis en évidence expérimentalement.

2.2- L'ÉNERGIE MÉCANIQUE ET SA NON CONSERVATION

En l'absence de frottement, on a montré que le caractère non amorti des oscillations est dû à la conservation de l'énergie mécanique E du pendule (système solide-ressort). Qu'en est-il pour E et qu'est-ce qui fait diminuer l'amplitude des oscillations lorsque les frottements sont présents ?

L'énergie mécanique E du pendule élastique a pour expression : $E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2$.

N'ayant pas les expressions de x(t) et de v(t), pour étudier l'évolution de E au cours du temps, il suffit de déterminer l'expression de sa dérivée par rapport au temps :

$$\frac{dE}{dt}=mv\frac{dv}{dt}+kx\frac{dx}{dt}$$

En remplaçant v par $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dv}{dt}$ par $\frac{d^2x}{dt^2}$, on obtient : $\frac{dE}{dt}=\frac{dx}{dt}\left[m\frac{d^2x}{dt^2}+kx\right]$

Or d'après (1), dans le cas où les frottements sont de type visqueux, $m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=-h\frac{dx}{dt}$.

D'où : $\frac{dE}{dt}=-h\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=-hv^2$. $\quad \frac{dE}{dt}=-hv^2$ (h est une constante positive)

On a ainsi : $\frac{dE}{dt}<0$. $\frac{dE}{dt}$ négative signifie que l'énergie mécanique de l'oscillateur diminue au cours du temps. Etant due aux frottements, cette diminution de E se traduit par une dissipation progressive sous forme d'énergie thermique. Celle-ci ne permet pas des transformations mutuelles intégrales d'énergie cinétique et d'énergie potentielle du pendule au cours de ses oscillations, ce qui explique la diminution de l'amplitude de ces dernières.

Conclusion

Un pendule élastique soumis à des forces de frottement constitue un système non conservatif.

Dans le cas de frottements visqueux, la diminution d'énergie mécanique d'un pendule élastique est telle que : $\frac{dE}{dt}=-hv^2$, où h est le coefficient de frottement.

La diminution d'énergie due aux frottements est elle-même la cause d'amortissement des oscillations libres.

ANALOGIE ENTRE UN OSCILLATEUR MECANIQUE ET UN OSCILLATEUR ELECTRIQUE

L'étude des oscillations libres d'un pendule élastique et celle d'un circuit RLC révèle une analogie formelle entre l'oscillateur mécanique et l'oscillateur électrique. Cette analogie est récapitulée dans le tableau suivant :

Oscillateur		le pendule élastique	le circuit RLC série
Grandeurs caractéristiques	**Coefficient d'inertie**	masse m	indulance L
	Coefficient de rappel	raideur k	inverse de la capacité $\frac{1}{C}$
	Facteur dissipatif	coefficient de frottement h	résistance R
Grandeurs oscillantes		élongation x	charge q
		vitesse $v = \frac{dx}{dt}$	intensité $i = \frac{dq}{dt}$
Equation différentielle des oscillations	**amorties**	$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{h}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$	$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$
	non amorties	$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$	$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$
Période propre de l'oscillateur		$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$
Equation horaire des oscillations non amorties		$x = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x)$ ou $v = V_m \sin(\omega_0 t + \varphi_v)$	$q = Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_q)$ ou $i = I_m \sin(\omega_0 t + \varphi_i)$
Energie de l'oscillateur	**Formes et expressions générales**	- potentielle élastique : $\frac{1}{2}kx^2$ - cinétique : $\frac{1}{2}mv^2$ - mécanique : $E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$	- électrostatique : $\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ - magnétique : $\frac{1}{2}Li^2$ - totale : $E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2$
	non amorti	se conserve	se conserve
		$E = \frac{1}{2}kX_m^2 = \frac{1}{2}mV_m^2 = cte$	$E = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C} = \frac{1}{2}LI_m^2 = cte$
	amorti	diminue	diminue
		$\frac{dE}{dt} = -hv^2 < 0$	$\frac{dE}{dt} = -Ri^2 < 0$

L'essentiel

- En l'absence de tout frottement, les oscillations libres d'un pendule élastique sont non amorties. Autrement, elles sont d'autant plus amorties que les frottements sont plus importants.
- Les oscillations libres non amorties d'un pendule élastique sont régies par l'équation différentielle : $\boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}$, où x est l'élongation du centre d'inertie du solide S et $\boxed{\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}}$.
- Les oscillations libres non amorties d'un pendule élastique sont périodiques de période propre : $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}}$.
- En l'absence de tout frottement, le pendule élastique oscillant est un système conservatif.
- Les oscillations libres non amorties d'un pendule élastique résultent des transformations mutuelles d'énergie cinétique et d'énergie potentielle.
- Les oscillations libres amorties d'un pendule élastique soumis à des frottements visqueux sont régies par l'équation différentielle : $\boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{h}{m}\dfrac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$, où h est le coefficient de frottement.

  Selon l'importance de l'amortissement, le régime peut être :

  - pseudopériodique (amortissement faible)
  - apériodique (amortissement important)
- Les oscillations libres amorties d'un pendule élastique sont pseudopériodiques ; leur pseudopériode T est légèrement supérieure à la période propre T_0 de l'oscillateur :

  l'écart $(T - T_0)$ est d'autant plus remarquable que l'amortissement est plus important.
- La diminution d'énergie due aux frottements rend les oscillations libres du pendule élastique amorties.

Exercices

Exercice résolu

ÉNONCÉ

Un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur $k = 10\ N.m^{-1}$ est enfilé sur une tige horizontale.

Une des extrémités du ressort est reliée à un cylindre creux (C) de masse $m = 100\ g$ qui peut coulisser sans frottement le long de la tige.

L'abscisse x du centre d'inertie G du cylindre (C) est repérée par rapport à O, position de G à l'équilibre.

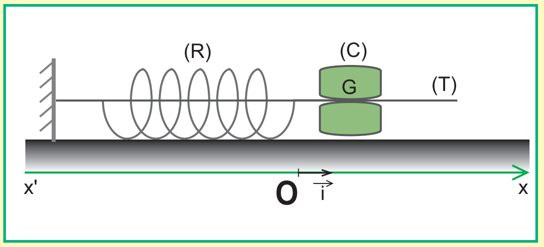


Fig.1

On écarte le cylindre de sa position d'équilibre d'une distance $x_0 = 2$ cm et on l'abandonne à lui-même à un instant t_0 choisi comme origine des temps.

1°) Dans une première expérience, le cylindre est abandonné sans vitesse initiale.

a- En appliquant le théorème du centre d'inertie, montrer que les oscillations du centre d'inertie G du cylindre (C) sont sinusoïdales de pulsation propre ω_0 que l'on calculera.

b- Montrer, par la détermination de $\left(\frac{dE}{dt}\right)$, que le système (cylindre, ressort) est conservatif.

c- Exprimer l'énergie mécanique E en fonction de k et de x_0. En déduire que l'amplitude X_{m1} est égale à x_0.

d- Déterminer l'équation horaire du mouvement de G.

2°) Dans une deuxième expérience, le cylindre (C) est abandonné avec une vitesse initiale $v_0 = 0{,}2\ m.s^{-1}$.

a- Qu'est-ce qui change dans les oscillations du pendule ? Justifier qualitativement la réponse.

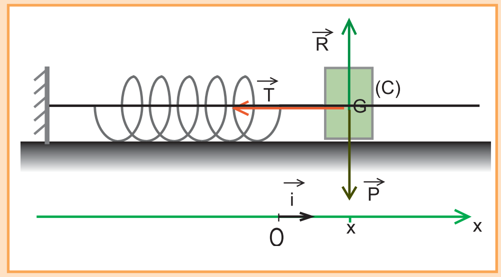
b- Sachant que l'élongation de G s'écrit : $x(t) = X_{m2} \sin(\omega_0 t + \varphi_2)$, déterminer l'amplitude X_{m2}, la phase initiale φ_2 et la vitesse maximale V_{m2} de G.

c- Calculer l'énergie mécanique E_{02} de l'oscillateur à l'instant $t_0 = 0$.

d- Retrouver énergétiquement les valeurs de X_{m2} et de V_{m2}.

3°) Comparer les énergies mécaniques du système {cylindre + ressort} dans les deux expériences considérées.

SOLUTION



1°) a- A un instant t donné, lorsque le cylindre (C) est en mouvement, il est soumis aux forces extérieures suivantes : son poids $\vec{P}$, la réaction $\vec{R}$ de la tige et la tension $\vec{T}$ du ressort.
L'application du théorème du centre d'inertie au cylindre (C) donne : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\vec{a}$.
Par projection orthogonale sur Ox on obtient :

$-\,kx = ma = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$. D'où l'équation différentielle :

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0{}^2 x = 0$ (1), avec $\omega_0{}^2 = \dfrac{k}{m}$. Les oscillations du cylindre (C) sont donc sinusoïdales de pulsation : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}}$.

A.N. : $\underline{\omega_0 = 10 \text{ rad.s}^{-1}}$

b- L'énergie mécanique de l'oscillateur est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle : $E = E_c + E_p = \dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}kx^2$.

La dérivée de E par rapport au temps donne : $\dfrac{dE}{dt} = kx\dfrac{dx}{dt} + mv\dfrac{dv}{dt}$ Or $v = \dfrac{dx}{dt}$ et $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$.

D'où : $\dfrac{dE}{dt} = v\left[kx + m\dfrac{d^2x}{dt^2}\right]$. D'après l'équation différentielle (1), le terme $\left[kx + m\dfrac{d^2x}{dt^2}\right]$ est nul quelle que soit v . Donc, $\dfrac{dE}{dt} = 0$, ce qui signifie : le système {cylindre, ressort} est conservatif.

c- Le système {cylindre, ressort} étant conservatif, son énergie mécanique E_1 est constante. Donc, $E_1 = E(t{=}0) = E_{01}$.

Or, à l'instant $t_0 = 0$: $v_0 = 0$ et $x = x_0$; d'où : $E_{01} = \dfrac{1}{2}kx_0{}^2$.

On sait que pour $x = \pm X_{m1}$, $v = 0$. Donc, $E_1 = \dfrac{1}{2}kX_{m1}{}^2$.

Par suite, $\dfrac{1}{2}kX_{m1}{}^2 = \dfrac{1}{2}kx_0{}^2$. Cela donne : $\mathbf{X_{m1} = x_0}$.

d- L'équation horaire du mouvement de G est de la forme : $x(t) = X_{m1}\sin(\omega_0 t + \varphi_1)$.

A t = 0 ; $x_0 = X_{m1}\sin\varphi_1$. Or, $X_{m1} = x_0 = 0.02$ m ; d'où $\sin\varphi_1 = 1$. Ce qui donne : $\boldsymbol{\varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}}$ **rad.**

Finalement : $\boxed{x(t) = 0.02\sin\left(10t + \dfrac{\pi}{2}\right).}$

2°) a- Etant abandonné à lui-même avec une vitesse initiale v_0 , l'oscillateur possède une énergie mécanique E_{02} supérieure à son énergie mécanique E_{01} lorsqu'il est abandonné sans vitesse dans la première expérience, ce qui rend l'amplitude X_{m2} des oscillations dans la deuxième expérience supérieure à $X_{m1} = x_0$.

b- On a : $x(t) = X_{m2} \sin(\omega_0 t + \varphi_2)$

Par dérivation de l'élongation : $x(t) = X_{m2} \sin(\omega_0 t + \varphi_2)$, on obtient la vitesse :

$v(t) = X_{m2}\,\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$.

A $t_0 = 0$, $x_0 = X_{m2} \sin\varphi_2$ (1) et $v = v_0 = X_{m2}\,\omega_0 \cos\varphi_2$ (2)

Le rapport $\frac{(1)}{(2)}$ donne : $\text{tg}\,\varphi_2 = \frac{x_0\omega_0}{v_0}$. A.N : $\text{tg}\,\varphi_2 = 1$; d'où $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$ rad ou bien $\frac{3\pi}{4}$ rad.

Or $v_0 = X_{m2}\,\omega_0 \cos\varphi_2 > 0$. Donc $\cos\varphi_2 > 0$. D'où, $\boldsymbol{\varphi_2 = \frac{\pi}{4}}$ **rad**.

D'après (1), on obtient $\boxed{X_{m2} = \frac{x_0}{\sin\varphi_2}}$.

A.N. : $X_{m2} \approx 2.83\ 10^{-2}$ m

$v(t) = X_{m2}\,\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$ donne : $\boxed{V_{m2} = X_{m2}\,\omega_0}$

A.N. : $V_{m2} = 0{,}283\ \text{m.s}^{-1}$.

c) A l'instant $t_0 = 0$, $v = v_0$ et $x = x_0$ d'où : $\boxed{E_{02} = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2}$

A.N. : $\mathbf{E_{02} = 4\ 10^{-3}\ J}$.

d) Le système (cylindre-ressort) étant conservatif, E_2 est constante : $\boxed{E_2 = \frac{1}{2}kX_{m2}^2 = E_{02}}$.

Ce qui entraîne : $\boxed{X_{m2} = \sqrt{\frac{2E_{02}}{k}}}$

A.N : $\mathbf{X_{m2} \approx 2.83\ 10^{-2}\ m}$

$E_{02} = \frac{1}{2}mV_{m2}^2$, d'où : $\boxed{V_{m2} = \sqrt{\frac{2E_{02}}{m}}}$.

A.N. : $\mathbf{V_{m2} = 2\sqrt{2}.10^{-1} m.s^{-1}}$

3°) L'énergie mécanique E est proportionnelle au carré de l'amplitude X_m.

On a : $E_1 = \frac{1}{2}kX_{m1}^2$ et $E_2 = \frac{1}{2}kX_{m2}^2$, d'où : $\frac{E_2}{E_1} = \frac{X_{m2}^2}{X_{m1}^2}$.

Comme X_{m2} est supérieure à X_{m1}, il vient $\frac{E_2}{E_1} > 1$. Donc, $\mathbf{E_2 > E_1}$.

Remarque : on peut répondre à la question en comparant directement E_{02} et E_{01} car

$E_1 = E_{01}$ et $E_2 = E_{02}$.

En fait, $\frac{E_2}{E_1} = \frac{E_{02}}{E_{01}} = 1 + \frac{1}{\omega_0^2}\left(\frac{v_0}{x_0}\right)^2 > 1$. Donc, $\mathbf{E_2 > E_1}$.

Exercices à résoudre

Tests rapides des acquis

1 Items "vrai ou faux"

Evaluer les propositions suivantes par vrai ou faux.

1°) Au passage par la position d'équilibre, la valeur algébrique de la vitesse est : $v = \omega_0 X_m$.

2°)L'équation différentielle d'un pendule élastique est : $\frac{d^2x}{dt^2} - \omega_0^2 x = 0$

3°) Les oscillations d'un pendule élastique ne sont pas amorties dans l'air.

4°)L'énergie cinétique maximale du solide (S) de masse m d'un pendule élastique en oscillations libres non amorties, a pour expression $E_C = \frac{1}{2}kX_m^2$

5°) La vitesse instantanée v(t) d'un solide en oscillations libres non amorties est toujours en quadrature avance de phase par rapport à son élongation x(t).

6°) Les frottements influent sur l'amplitude des oscillations d'un pendule élastique.

7°) La pseudopériode des oscillations amorties d'un pendule élastique augmente avec l'amortis-sement.

2 Questions à Choix Multiples

Préciser pour chacune des questions suivantes, la proposition juste.

1°) La période propre T_0 des oscillations d'un pendule élastique :

a- dépend de l'amplitude X_m.

b- est proportionnelle à la masse du solide (S).

c- ne dépend pas des conditions initiales.

d- est le temps qui sépare deux passages successifs du solide par sa position d'équilibre.

2°) Les oscillations non amorties d'un pendule élastique ont une amplitude qui :

a- dépend de la vitesse initiale ;

b- ne dépend que de la distance dont on a écarté initialement le pendule de sa position de repos ;

c- Une amplitude qui augmente au cours du temps.

3°) La diminution de l'amplitude des oscillations amorties d'un pendule élastique est due :

a- aux transformations mutuelles d'énergie ciné-tique et d'énergie potentielle ;

b- aux frottements ;

c- uniquement à la dissipation de son énergie cinétique en énergie thermique.

4°) Au cours des oscillations libres d'un pendule élastique, la vitesse du solide au passage par la position d'équilibre, est :

a- toujours maximale ; **b-** toujours nulle;

c- maximale ou minimale.

5°) Un pendule élastique est formé d'un ressort de raideur k = 40 $N.m^{-1}$ et d'un solide de masse m = 100 g, sa période propre vaut :

a- 0,62 s ; **b-** 3,10 s ; **c-** 0,31 s.

6°) L'équation différentielle du mouvement sans frottement d'un solide de masse m accroché à un ressort de raideur k est :

a- $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{m}{k}x = 0$; **b-** $\frac{d^2x}{dt^2} + \sqrt{\frac{k}{m}}x = 0$;

c- $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$.

7°) Un pendule élastique en oscillations libres amorties a :

a-une pseudopériode croissante au cours du temps ;

b-une pseudopériode égale à sa période propre ;

c-son amplitude qui diminue en raison des frottements.

8°) Le régime d'oscillations d'un pendule élastique amorti est pseudopériodique lorsque :

a-l'amortissement est faible ;

b-l'oscillateur est abandonné avec une vitesse initiale

c- L'amplitude est constante.

Exercices d'application

3 Un pendule élastique horizontal est constitué d'un solide de masse m = 300 g et un ressort de raideur k = 10 N.m^{-1}. Le solide est lancé à l'instant t = 0s, depuis sa position d'équilibre, avec une vitesse v_0 = 0,2 m.s^{-1} dans le sens positif. L'élongation du centre d'inertie du solide est : $x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$.
Déterminer X_m, ω_0 et φ.

4 Un solide (S) de masse m = 0,1 kg est accroché à l'une des extrémités d'un ressort de masse négligeable et de raideur k = 10 N.m^{-1} et dont la deuxième extrémité est attachée à un point fixe. L'ensemble { solide ; ressort } est disposé sur un banc à coussin d'air horizontal.
Le solide (S) est déplacé de façon à provoquer l'allongement du ressort de 2 cm puis abandonné à lui même sans vitesse initiale à un instant t_0 qui sera pris comme origine des temps.
1°) Etablir l'équation différentielle du mouvement du solide (S).
2°) Déterminer la période des oscillations du solide (S).
3°) Déterminer l'expression de l'élongation x(t) du centre d'inertie G de (S).

5 Un pendule élastique horizontal est constitué d'un ressort à spires non jointives, de raideur k = 25 N.m^{-1} et d'un solide de masse m = 0,5 kg.
On écarte le solide de 2 cm de sa position d'équilibre et on le lâche. Le pendule effectue des oscillations sinusoïdales non amorties.
1°) Calculer la période propre de l'oscillateur.
2°) Calculer la vitesse du solide au passage par la position d'équilibre.
3°) Comment évolue l'amplitude des oscillations, si le mouvement du solide devient amorti ?

Exercices de synthèse

6 Un corps (C) de masse M = 0,2kg est attaché à l'une des extrémités d'un ressort (R) à spires non jointives, de raideur k =20 N.m^{-1} et de masse négligeable devant M.
L'autre extrémité du ressort est fixe. L'ensemble ressort (R) et corps (C) peut osciller horizontalement le long d'une tige (T). A l'équilibre, le centre de gravité G du corps (C) coïncide avec l'origine d'un repère $(O, \vec{i})$ porté par un axe horizontal x'x (figure 1). Au cours de son mouvement, G est repéré par son abscisse x.

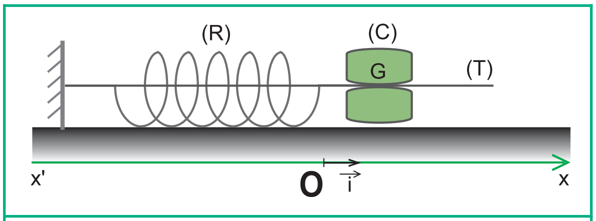


Fig. 1

L'équation horaire du mouvement de G est x = 0,1 sin (ω_0t + φ). Sachant que, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{M}}$
1°) a-calculer la valeur de la période T_0 des oscillations de G,
b- en déduire la valeur de la fréquence propre N_0.
2°) A l'aide d'un dispositif approprié, on soumet le corps (C) à des frottements visqueux.

L'enregistrement des différentes positions de G au cours du temps donne la courbe de la figure 2.

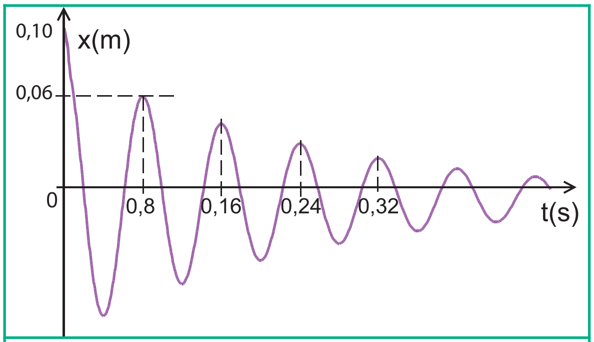


Fig. 2

a-Déterminer, graphiquement, la valeur de la pseudo-période T des oscillations de G, la comparer à celle de la période propre T_0 de l'oscillateur.
b-Déterminer les valeurs des énergies mécaniques E_0 et E_1 de l'oscillateur respectivement aux instants t_0 = 0 et t_1 = T.
c- Comparer les valeurs de E_0 et de E_1.

D'après Bac. Juin 2005 (section sport)

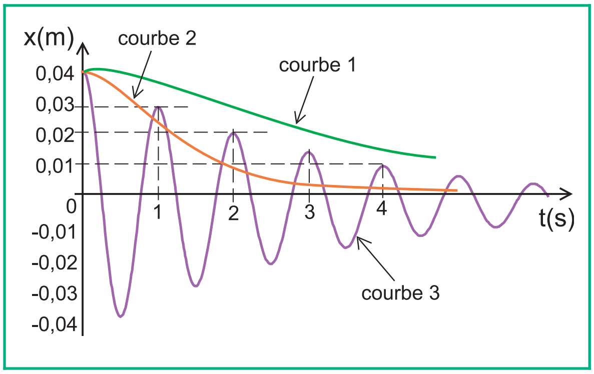
7 On écarte le solide (S) d'un pendule élastique horizontal d'une distance d = 2 cm, à partir de sa position de repos et on l'abandonne à lui même sans vitesse.

1°) En supposant que le mouvement du solide (S) sur le plan s'effectue sans frottement, déterminer la nature des oscillations du pendule.

2°) Sachant que la masse du solide (S) est m = 360 g et que la période des oscillations vaut T_0 = 0.60 s, calculer la raideur du ressort.

3°) Calculer la valeur maximale de la vitesse du solide au passage par sa position de repos.

8 La courbe de la figure ci-dessous représente l'enregistrement de l'élongation x du centre d'inertie G du solide (S) d'un oscillateur mécanique pour trois valeurs de l'amortissement.



1°) Parmi les trois enregistrements, indiquer celui (ou ceux) qui correspond(ent) à :

* des oscillations pseudopériodiques ;

* un régime apériodique.

2°) Dans la pratique,comment obtient-on un régime apériodique à partir d'un régime pseudopériodique?

3°) Parmi les cas de régime apériodique, le régime critique correspond au retour le moins lent à l'état de repos. Identifier la courbe correspondante.

9 Un ressort à spires non jointives, de longueur à vide l_0 = 10 cm, peut être allongé ou raccourci au maximum de 8,5 cm.

1°) Le ressort étant vertical, on lui attache un solide de masse m = 0,1 kg, sa longueur devient l = 15 cm. Déterminer la raideur k du ressort.

2°) Le ressort attaché toujours au solide de masse m = 0,1 kg est disposé sur un banc à coussin d'air horizontal.Déterminer la pulsation, la période et la fréquence des oscillations du pendule lorsqu'il est mis en mouvement.

3°) Le solide est écarté de sa position d'équilibre, l'abscisse de son centre d'inertie G est alors égale à x_0 = 5,5 cm. Déterminer l'expression de l'élongation x du centre d'inertie G dans les cas suivants :

a-Le solide est abandonné sans vitesse initiale à l'instant t = 0.

b-Le solide est lâché sans vitesse initiale et passe pour la première fois par sa position d'équilibre à l'instant t = 0.

c-Le solide est lancé à l'instant t=0 vers les élongations croissantes avec une vitesse initiale telle qu'il subit ensuite son raccourcissement maximal.

10 Un solide de masse m = 292 g et de centre d'inertie G peut coulisser sans frottements le long d'une tige horizontale. Il est attaché à un ressort horizontal de raideur k = 8N.m^{-1}. L'élongation x de G est repérée sur un axe Ox parallèle à la tige. L'origine O de cet axe correspond à la position du centre d'inertie G du solide lorsque le système est au repos.

1°) Etablir l'équation différentielle de mouvement du centre d'inertie G.

2°) Déterminer l'expression littérale de la période T_0.

L'enregistrement de l'élongation en fonction du temps a permis de tracer le graphe de la figure 1.

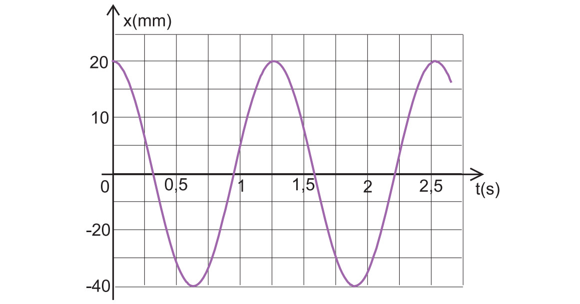


Fig. 1

a-Déterminer graphiquement les valeurs de X_m et T_0 puis trouver φ.

b-Vérifier que la valeur de T_0, mesurée précédemment est en accord avec les valeurs numériques de m et k.

3°) Sur le graphe de la figure 2, on a représenté les couples (x ; a) où a est l'accélération du centre d'inertie G à un instant t.

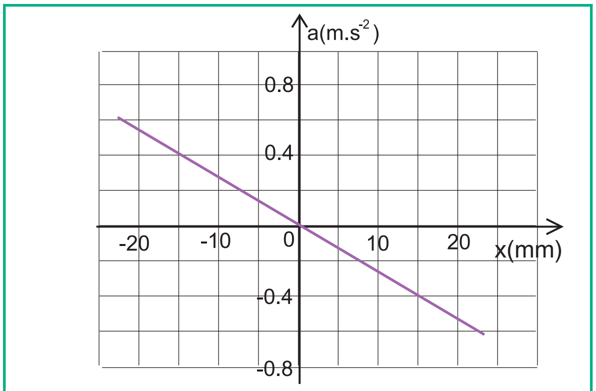


Fig. 2

a-Montrer que l'allure de ce graphe est en accord avec l'équation différentielle précédente

b-Déterminer l'expression littérale du coefficient directeur de la droite obtenue et montrer que cette valeur est en accord avec la valeur expérimentale.

11

Le dispositif de la figure suivante comporte:

- un ressort (R), disposé verticalement tel que son extrémité supérieure est fixe, de raideur $k = 12\ N.m^{-1}$ et de masse négligeable.
- un récipient transparent contenant un liquide visqueux.
- un solide (S) de masse M = 0,304 kg accroché à l'extrémité libre du ressort. Au cours de son mouvement, il baigne totalement dans le liquide et est soumis à des frottements de type visqueux équivalents à $\vec{f} = -h\vec{v}$ où h est le coefficient de frottement caractéristique du liquide visqueux utilisé et $\vec{v}$ la vitesse instantanée du centre d'inertie G du solide (S).

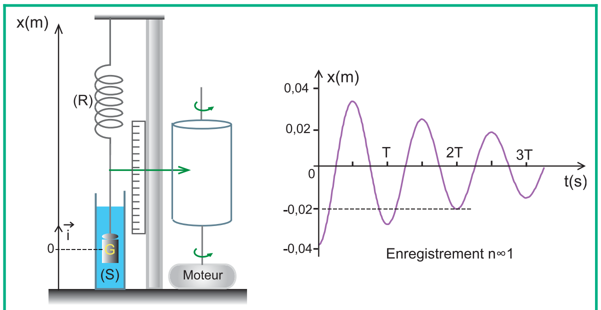


Fig. 1

1°) Enregistrement n°1 : On utilise un liquide visqueux de coefficient de frottement $h_a = 0,2\ N.s.m^{-1}$. On agit sur le dispositif expérimental de sorte que G soit écarté de sa position d'équilibre O, origine du repère $(O, \vec{i})$ d'axe x'x, de 4 cm vers le bas et libéré sans vitesse initiale à un instant t = 0. Un stylet est solidaire du ressort en A. Il enregistre, grâce à sa pointe qui appuie légèrement sur le cylindre enregistreur tournant à vitesse constante, le diagramme correspondant à l'enregistrement n°1 et traduisant les oscillations pseudopériodiques de G au cours du temps. L'intensité des frottements auxquels est soumis le solide (S) est telle que la valeur de sa pseudo période T peut être assimilée à celle de sa période propre $T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$.

a-Calculer la valeur de la pseudopériode T.

b-Déterminer la durée d'un tour du cylindre enregistreur, sachant que le diagramme associé à l'enregistrement n°1 correspond à un seul tour de ce cylindre.

2°) Enregistrement n°2, n°3 et n°4.

On dispose de trois liquides visqueux dont les coefficients de frottement sont :

$h_b = 1\ N.s.m^{-1}$; $h_c = 4\ N.s.m^{-1}$ et $h_d = 6\ N.s.m^{-1}$.

Pour chaque liquide utilisé, un enregistrement est effectué dans les mêmes conditions que celles pour l'enregistrement n°1. On obtient les enregistrements n°2, 3 et 4 (Fig. 2).

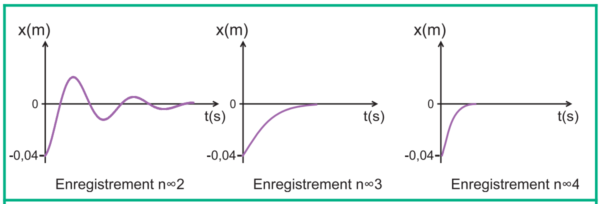


Fig. 2

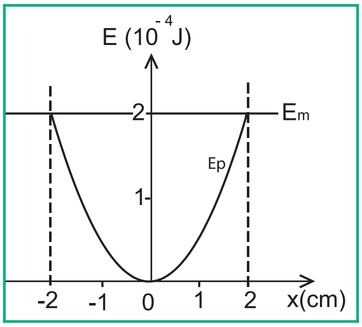
Reproduire le tableau suivant et le remplir en indiquant pour chaque enregistrement la valeur du coefficient de frottement associé au liquide utilisé et l'une des deux indications «pseudo périodique» ou «apériodique»

	h (en $N.s.m^{-1}$)	Nature des oscillations (pseudo périodique ou apériodique)
Enregistrement n° 2		
Enregistrement n° 3		
Enregistrement n° 4		

D'aprés Bac. juin 2004

12

Sur la figure ci-dessous on a représenté les variations des énergies potentielle élastique et mécanique d'un pendule élastique horizontal en fonction de l'élongation x du centre d'inertie du solide (S). On désigne par k la raideur du ressort et par m la masse de (S).



1°) Comment varie l'énergie mécanique au cours du temps. Donner sa valeur. Déduire si les oscillations libres de ce pendule sont amor-ties ou non amorties.

2°) Dans quel domai-ne d'élongation x évolue le mobile ?

3°) Justifier la forme de la courbe représentant l'énergie potentielle élastique de l'oscillateur.

13 Etude de texte

Le tsunami

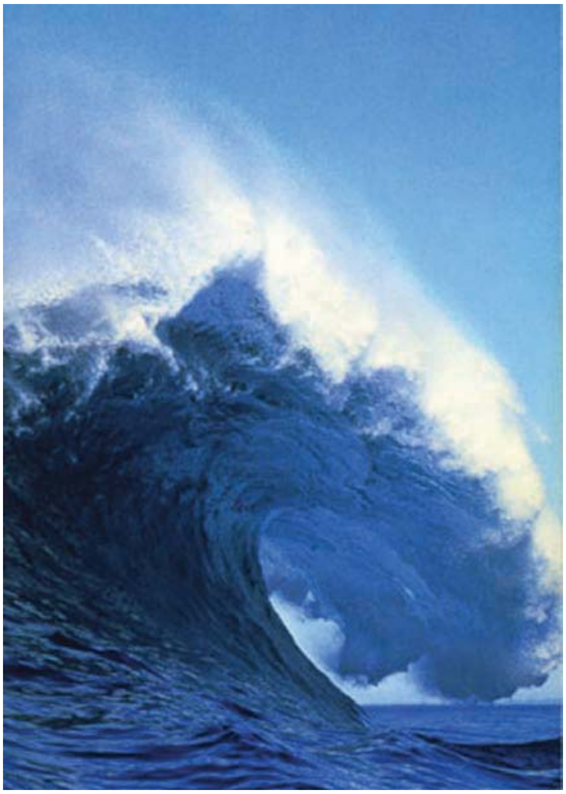
Le tsunami est une catastrophe naturelle qui peut être meurtrière et destructrice comme celle qui a suivi le séisme de Sumatra (Indonésie) du 26 décembre 2004. Dès lors, le terme "tsunami" est passé dans la langue courante des différents peuples du monde. Le tsunami est provoqué par un déplacement rapide d'un grand volume d'eau d'océan ou de mer. Ce mouvement est en général dû à un séisme, à une éruption volcanique sous-marine de type explosive ou bien à un glissement de terrain sous-marin de grande ampleur. Un impact météoritique peut aussi en être la cause, de même qu'une explosion atomique sous-marine.

Tous ces phénomènes entraînent des oscillations de la Terre avec une fréquence pouvant atteindre 3 mHz et qui ne dépend que de sa structure interne ; les oscillations les plus graves sont celles de fréquence comprise entre 0,3 mHz et 3 mHz. En fait, il peut en résulter une élévation ou un abaissement brutal du niveau de la surface d'eau océanique.

En plein océan (ou en pleine mer), le tsunami provoque l'oscillation de quantités d'eau énormes tant en surface qu'en profondeur (les particules d'eau sont animées d'oscillations horizontales dans la direction de propagation du tsunami) avec des périodes variant entre 10 min (profondeur de 1 km d'eau) et plus de 60 min (profondeur de 6 km d'eau au minimum).

Lorsque le tsunami s'approche des côtes, sa période diminue tandis que son amplitude augmente. Lorsque l'amplitude du tsunami devient non négligeable par rapport à la profondeur de l'eau, une partie de la vitesse d'oscillation de l'eau se transforme en un mouvement (ou courant d'eau) horizontal global. Sur les côtes, c'est davantage ce courant d'eau horizontal et rapide (typiquement plusieurs dizaines de km/h) qui est la cause des dégâts que d'élévation du niveau de l'eau : ce n'est pas principalement la hauteur du tsunami qui en fait sa force destructrice mais la durée de l'élévation du niveau de l'eau et la quantité d'eau déplacée à son passage.

On peut voir le phénomène sous un autre angle: une vague classique, d'une période d'au plus une minute, n'élève pas le niveau de l'eau suffisamment longtemps pour que de grandes quantités d'eau déferlent profondément sur les côtes, tandis que le niveau des eaux s'élève au dessus de son niveau normal pendant 5 à 30 minutes lors du passage d'un tsunami.



Questions

1°) Relever les trois types d'oscillations libres évoquées dans le texte.

2°) a- Qu'est-ce qui montre que les oscillations de la Terre provoquées par les séismes entre autres sont libres ?

b- Calculer les valeurs minimale et maximale des périodes de ces oscillations.

c- Quelle qualification donne-t-on à ces périodes d'oscillations libres de la Terre ?

3°) Qu'est-ce qui montre que le tsunami est un phénomène oscillatoire ?

4°) Justifier la durée d'élévation du niveau de l'eau de mer allant de 5 à 30 min lors du passage d'un tsunami.

En savoir plus

Les oscillations libres de la Terre

Comme tout corps élastique, la Terre peut vibrer librement à des fréquences bien déterminées par sa forme et sa constitution. Ces oscillations sont les modes normaux du corps, ou oscillations libres. Ce dernier qualificatif se justifie par le fait qu'après excitation de l'oscillation, celle-ci perdurera indéfiniment, si l'on fait abstraction des forces de frottement.

Pour exciter les modes normaux de la Terre (le mode le plus simple est le fondamental, tandis que les autres sont les harmoniques), il faut évidemment des sources formidables telles que les grands tremblements de Terre. En fait, si le séisme est suffisamment important, les oscillations libres de la Terre se produisent à des fréquences qui ne dépendent que de sa structure interne.

Les périodes des modes sismiques sont comprises entre quelques secondes et 54 min, tandis que leur amplitude peut atteindre le millimètre. Certains modes perdurent jusqu'à un mois après des séismes particulièrement violents. Par suite, leurs fréquences sont très basses : à la période de 20.5 minute par exemple, correspond une fréquence de 0.001Hz. Pour se donner une meilleure idée des ordres de grandeur, comparons cette fréquence à celle du « Do 256 Hertz », qui occupe le centre du clavier d'un piano. Pour atteindre la fréquence de 0.001 Hertz, il faudrait descendre de 18 octaves (En musique, une octave est l'intervalle séparant deux sons dont les fréquences fondamentales sont en rapport de un à deux), alors que le clavier d'un piano n'en compte au total que 8. Prenons un autre exemple : dans le cas d'une corde de guitare, sa fréquence est d'autant plus basse qu'elle est longue (lorsque le guitariste obtient un son plus ou moins grave d'une corde en la pinçant en différent endroits, il ne fait rien d'autre que l'allonger ou la raccourcir). En supposant que l'on pourrait fabriquer et tendre une corde de guitare de 300 km de long, elle émettrait une fréquence aussi basse que 0,001 Hz !

L'harmonie d'un son provient d'une relation simple qui lie les fréquences harmoniques et fondamentales. Dans le cas d'un stylo qui tombe, le choc excite sa fréquence fondamentale, par exemple égale à 197 Hz, mais également des « harmoniques », de 211, 217, 219, 287, 311 Hertz… Il n'existe pas de relation simple entre harmoniques et fondamentale, c'est ce qui rend le son sec et désagréable. Cependant, pour le physicien, il s'agit toujours d'une somme de fondamentale et d'harmoniques. Si l'on pouvait entendre les sons qui correspondent aux modes sismiques, il s'agirait également d'un bruit non harmonieux, vu les relations complexes qui existent entre fondamentales et harmoniques.

Pour qu'il y ait des oscillations, il faut des forces de rappel qui tendent à ramener les particules à leur position d'équilibre. Dans le cas des modes sismiques, ces forces de rappel sont dues essentiellement à l'élasticité liée aux forces de cohésion moléculaire.

D'après **M. Van camp**

Objectifs

- Distinguer, en régime mécanique forcé, entre l'excitateur et le résonateur.
- Distinguer en mécanique, entre les oscillations libres et les oscillations forcées.
- Mettre en évidence la résonance d'élongation d'un pendule élastique.
- Etablir l'expression de l'amplitude X_m des oscillations d'un pendule élastique en fonction de la fréquence N de l'excitateur.
- Etudier l'influence de l'amortissement sur la résonance d'élongation d'un pendule élastique.
- Établir l'expression du déphasage entre la force excitatrice F et l'élongation x du solide.
- Interpréter théoriquement le phénomène de résonance.
- Distinguer une résonance aiguë d'une résonance floue.
- Utiliser l'analogie formelle électrique - mécanique pour :
  - caractériser la résonance de charge dans un circuit RLC série,
  - caractériser la résonance de vitesse d'un pendule élastique,
  - exprimer la puissance mécanique moyenne d'un pendule élastique.

Prérequis

Savoir	Savoir faire
◆ Exprimer la période propre des oscillations libres d'un pendule élastique en fonction de ses grandeurs caractéristiques. ◆ Ecrire l'équation différentielle caractéristique des oscillations libres d'un pendule élastique amorti ou non amorti. ◆ Exprimer la puissance électrique moyenne absorbée par un oscillateur électrique.	◆ Appliquer la relation fondamentale de la dynamique à un solide en mouvement. ◆ Associer à une fonction sinusoïdale, un vecteur de Fresnel. ◆ Faire la construction de Fresnel. ◆ Faire l'analogie formelle entre un oscillateur mécanique amorti et un circuit RLC - série.