Chapitre 5

INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

Pour commencer

Activité 1

Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f admet une primitive sur l'intervalle I et déterminer celle qui s'annule en1 :

a) $f : x \mapsto x^2 - x - 1$ $\quad I = IR$; c) $f : x \mapsto \dfrac{-1}{x^3}$ $\quad I =]0, +\infty[$

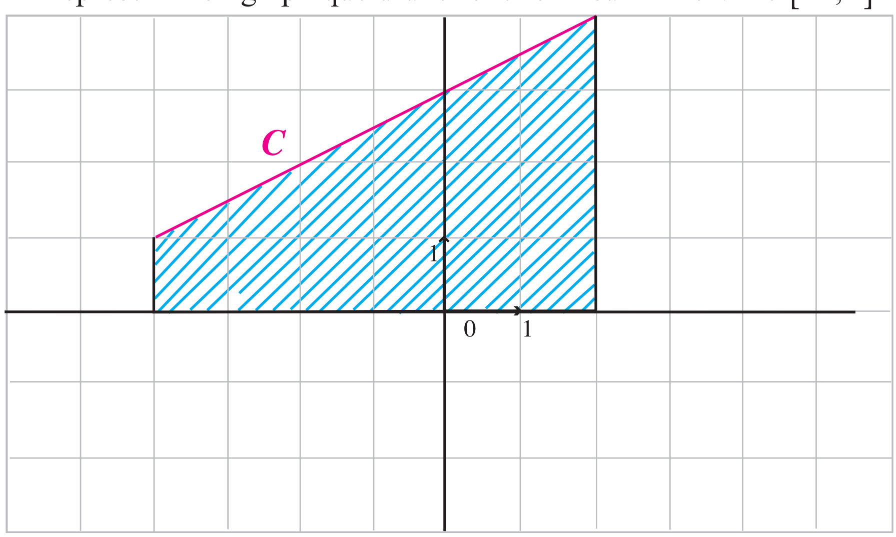
c) $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ $\quad I = IR$; d) $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$ $\quad I = IR$

Activité 2

Le coût marginal d'un produit exprimé en centaines de dinars par tonne, est modélisé par la fonction: $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 50$, lorsque la quantité de production x est comprise entre 0 et 5 tonnes.
Déterminer le coût total de production de x tonnes sachant que les coûts fixes s'élèvent à 1000 dinars.

Activité 3

On donne la représentation graphique d'une fonction f sur l'intervalle $[-4, 2]$



1- Justifier que f admet une primitive F sur $[-4, 2]$.

2- Expliciter f(x) pour x dans $[-4, 2]$.

3- Donner une primitive F de f sur $[-4, 2]$, puis calculer $F(2) - F(-4)$

4- Déterminer l'aire A de la région hachurée (en unités d'aire).

5- Comparer A et $(F(2) - F(-4))$.

I- Définition et propriétés

1) Définition :

Activité 1

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x^2 - x + 1$

1- Montrer que f admet au moins une primitive sur IR.
2- Déterminer la primitive F de f sur IR qui prend pour valeur 1 en -2.
3- Donner une autre primitive G de f sur IR.
4- Comparer $F(b) - F(a)$ et $G(b) - G(a)$.

Activité 2

Soient f une fonction continue sur un intervalle I, F et G deux primitives de f sur I.

1- Montrer que pour tous réels a et b de I, $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$.

2- En déduire que le réel $J = F(b) - F(a)$ ne dépend pas du choix de la primitive de f sur l'intervalle I.

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant deux réels a et b.
On appelle intégrale de f entre a et b et on note $\int_a^b f(t)\,dt$, le réel défini

par $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur I.

Remarques:

1) L'écriture $\int_a^b f(t)dt$ se lit « Intégrale (ou somme) de a à b de f(t) dt »

2) Dans l'écriture $\int_a^b f(t)\,dt$, on peut remplacer la lettre t par toute autre lettre autre que a et b, par exemple : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \ldots.$

3) On écrit $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b$ (On lit F(t) pris entre a et b)

$= F(b) - F(a)$

4) Lorsque $a < b$, le réel $\int_a^b f(t)dt$ est appelé intégrale de f sur $[a,b]$.

Activité 3

Calculer les intégrales suivantes :

$\int_{-1}^{3} a\,dt \quad (a \in IR)$; $\int_{0}^{2} 2t\,dt$; $\int_{0}^{1} x^3 dx$

$\int_{-1}^{1} 2e^{2x+1} dx$; $\int_{1}^{2} \frac{x+1}{x^2+x} dx$; $\int_{1}^{2} \frac{2x+1}{\left(x^2+x\right)^2} dx$

Activité 4

1- Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

a- Vérifier que la fonction F définie par $F(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

b- En déduire $\int_{1}^{e} \frac{\ln(t)}{t} dt$.

2- Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

a- Justifier que f admet au moins une primitive sur IR.

b- Calculer $\int_{0}^{1} f(t)\,dt$.

2) Propriétés :

Relation de Chasles :

Activité 1

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.

1- Vérifier que pour tous réels a, b et c de I on a : $\int_{a}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{b} f(t)\,dt = \int_{a}^{b} f(t)\,dt$.

2- En déduire que $\int_{a}^{a} f(t)\,dt = 0$ et que $\int_{a}^{b} f(t)\,dt = -\int_{b}^{a} f(t)\,dt$.

Propriétés

Soit f une fonction continue sur un intervalle I

Pour tous réels a, b et c de I on a $\int_{a}^{b} f(t)\,dt = \int_{a}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{b} f(t)\,dt$ (*Relation de Chasles*)

Pour tout réel a de I on a $\int_{a}^{a} f(t)\,dt = 0$

Pour tous réels a et b de I on a $\int_{a}^{b} f(t)\,dt = -\int_{b}^{a} f(t)\,dt$. (*inversion des bornes*)

Activité 2

1- On considère la fonction f définie sur IR $f(x)=|x-1|$

a) Calculer les intégrales : $\int_0^1 f(t)\,dt$ et $\int_1^3 f(t)\,dt$.

b) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^3 |t-1|\,dt$

2- Calculer de même les intégrales suivantes :

$\int_1^3 \left(|x-2|+x^2\right)dx$; $\int_1^e \left|1-\frac{2}{t}\right|dt$.

Linéarité de l'intégrale

Activité 1

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I contenant a et b.
F et G deux primitives respectives de f et de g sur I.

1- Montrer que $\int_a^b \left(f(t)+g(t)\right)dt=\int_a^b f(t)\,dt+\int_a^b g(t)\,dt$.

2- Soit $k\in IR$, montrer que $\int_a^b k.f(t)\,dt=k\int_a^b f(t)\,dt$.

3- En déduire que pour tous réels α et β,

$\int_a^b \left(\alpha f(t)+\beta g(t)\right)dt=\alpha\int_a^b f(t)\,dt+\beta\int_a^b g(t)\,dt$.

Propriétés

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I contenant a et b.

* $\int_a^b \left(f(t)+g(t)\right)dt=\int_a^b f(t)\,dt+\int_a^b g(t)\,dt$.
* Pour tout réel k on a $\int_a^b k.f(t)\,dt=k\int_a^b f(t)\,dt$

Activité 2

Soit f une fonction continue sur l'intervalle [-1, 2]

Sachant que : $\int_{-1}^2 f(t)\,dt=\frac{1}{2}$, calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_{-1}^2 4f(t)\,dt$; b) $\int_{-1}^2 \left(f(t)-e^t\right)dt$; c) $\int_{-1}^2 \left(3e^t-2f(t)\right)dt$

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(t) = t\ln t - t$.

a- Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(t) = \ln t$.

b- Calculer $I = \int_1^e \ln t\,dt$.

c- En déduire $J = \int_1^e \ln 3t\,dt$ et $K = \int_1^e \ln(t^2)\,dt$.

Intégrales et ordre :

Activité 1

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I. On suppose que pour tout x de I on a $f(x) \geq 0$.

1- a) Justifier que la fonction F est croissante sur I.
b) En déduire que si a et b sont deux éléments de I tels que $a \leq b$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

2- Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle [a,b]

Montrer que : si pour tout x de [a,b] $u(x) \leq v(x)$ alors $\int_a^b u(x)dx \leq \int_a^b v(x)dx$.

Propriétés :(*Positivité et comparaison d'intégrales*)

1)Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$.

Si pour tout réel x de $[a,b]$ on a $f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

2) Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$.

Si pour tout réel x de $[a,b]$ on a $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

a- Montrer que f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

b- En déduire que pour tout x de $[2,3]$ on a $1,39 \leq f(x) \leq 1,64$.

c- Donner alors un encadrement de $I = \int_2^3 e^{\frac{1}{x}}\,dx$.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x-1-\ln x$

1- a- Déterminer le sens de variation de f sur $]0,+\infty[$.

b- Calculer $f(1)$ et en déduire que pour tout x de $]0,+\infty[$, on a $f(x)\geq 0$.

2- Prouver que $0\leq \int_1^2 \ln x\,dx \leq \frac{1}{2}$.

Activité 4

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=x^2-1$.

a- Calculer $\int_0^2 f(t)dt$.

b- Déterminer le signe de f sur $[0,2]$.

c- Est il vrai que si $\left(a\leq b \text{ et } \int_a^b f(t)dt\geq 0\right)$ alors f est positive sur $[a,b]$.

II- Intégration par parties :

Activité 1

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I de IR

1- a) Déterminer une primitive sur I de la fonction : $u'v+uv'$.

b) En déduire une primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x\mapsto x\ln x+\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}$

c) Calculer $\int_1^e\left(x\ln x+\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\right)dx$ puis $\int_1^e x\ln x\,dx$.

2- En s'inspirant de la question 1-, calculer les intégrales $\int_0^1 xe^x\,dx$ puis $\int_0^1 x^2e^x\,dx$.

Théorème

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle [a,b] dont les dérivées u' et v' sont
continues sur [a,b].

On a $\int_a^b u'(x)v(x)\,dx=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u(x)v'(x)\,dx$

Remarque

On utilise la méthode d'intégration par parties, chaque fois que l'on veut calculer une intégrale de la forme $\int_a^b u'(x)v(x)\,dx$, dont le calcul direct n'est pas simple alors que celui de l'intégrale $\int_a^b u(x)v'(x)\,dx$ l'est .

Activité 2

1- Calculer chacune des intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

a) $I = \int_{2}^{0} (2t-1)e^{t}dt$ b) $J = \int_{1}^{e} (x+1)\ln x dx$ c) $\int_{0}^{\pi} t\cos t dt$

2- A l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer les intégrales

$I = \int_{0}^{\pi} t^2 \sin t\, dt$ et $J = \int_{2}^{0} (x^2 - x)e^{x}\, dx$.

III- Valeur moyenne :

Activité 1

Une entreprise fabrique un produit en quantité x, avec $x \in [0, 700]$

Le coût total de fabrication exprimé en dinars est donné par $C(x) = 0.02x^2 + 2500x$

1- Déterminer le coût marginal C'(x) pour $x \in [0, 700]$.

2- Calculer le coût moyen m pour 700 objets fabriqués.

3- Calculer $I = \dfrac{1}{700}\int_{0}^{700} C'(x)\, dx$

On obtient m = I, nous dirons que dans **ce cas** que le coût moyen de fabrication de 700 objets est égal à la moyenne du coût marginal entre 0 et 700 objets fabriqués.

Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a , b]

On appelle valeur moyenne de f sur [a , b] et on note $\bar{f}$ le réel $\bar{f} = \dfrac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(t)\, dt$.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $[-2, 3]$ par $f(x) = 3x^2 - 2x$.

Calculer la valeur moyenne $\bar{f}$ de f sur $[-2, 3]$.

Activité 3

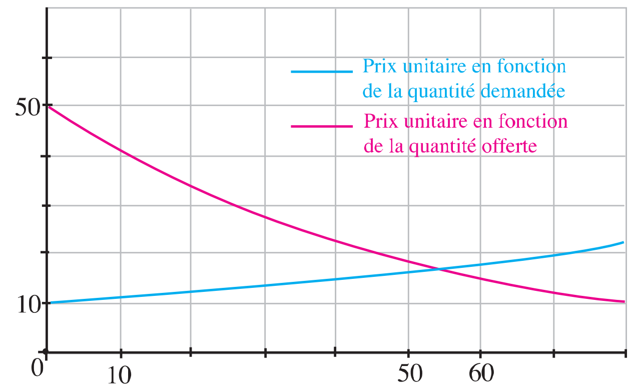
Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = e^{1-x}$

1- Calculer la valeur moyenne m_1 de f sur l'intervalle $[1, 4]$, puis la valeur moyenne m_2 de f sur l'intervalle $[4, 8]$.

2- Soit m la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[1, 8]$

Vérifier que $m = \dfrac{3m_1 + 4m_2}{7}$.

Activité 4



La courbe d'offre d'un produit est définie par la relation liant quantité offerte q (en tonnes) et prix unitaire p (en dinars par kilogramme) : $p_O = 10\times(1,01)^q$.

La courbe de demande est définie par la relation liant quantité demandée et prix unitaire : $p_d = 50\times(0,98)^q$.

1- Déterminer une valeur arrondie entière q_e de la quantité d'équilibre.
(la quantité d'équilibre correspond à l'égalité du prix d'offre et du prix de la demande).

2- Déterminer alors la valeur arrondie entière du prix d'équilibre p_e.

3- On admet que la valeur moyenne du prix d'offre des producteurs pour une quantité de a tonnes à b tonnes est égale à $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b p_O(q)\,dq$.

a) Calculer la valeur moyenne du prix d'offre des producteurs pour une quantité de 50t à 60t.

b) Comparer cette valeur moyenne avec le prix d'équilibre p_0.

IV- Calcul d'aires planes

Activité 1

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \left|\dfrac{1}{2}x+1\right|$.

1- Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.(l'unité étant 1cm)

2- Calculer en cm^2, l'aire A de la région du plan limitée par la courbe C de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations x = -4 et x = 2.

3- Calculer l'intégrale $I = \int_{-4}^{2}\left|\dfrac{1}{2}x+1\right|dx$.

4- Vérifier que A = I.

Activité 2

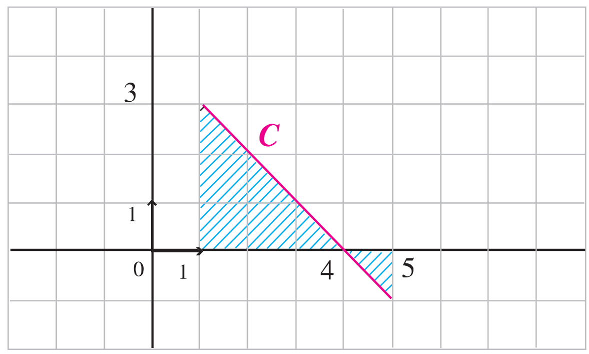
On donne le graphique suivant :

1- Vérifier que C est la représentation graphique de la fonction f définie sur [1 , 5] par f(x) = –x + 4

2- Calculer l'aire A de la région hachurée sur le graphique.

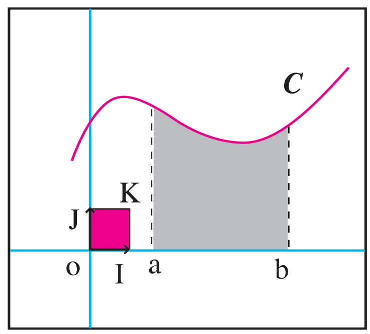
3- Calculer $\int_1^5 |f(x)|\,dx$.

4- Vérifier que $\int_1^5 |f(x)|\,dx = A$.



Théorème

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$, f une fonction continue sur l'intervalle [a ; b], et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$.
(l'unité d'aire notée u.a. , est l'aire du rectangle OIJK)
$\int_a^b |f(x)|\,dx$ est l'aire, en u.a. , du domaine plan compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = a et x = b.



Activité 3

Soit f la fonction définie sur $[-2,1]$ par

$$f(x) = x^3 - 3x + 3$$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan

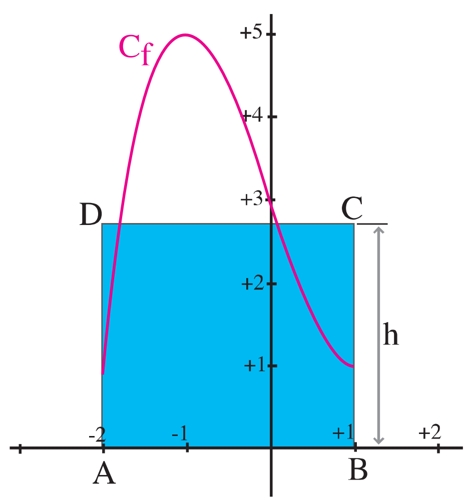
1- Calculer l'aire A en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = -2 et x = 1.

2- Calculer la valeur moyenne $\overline{f}$ de f sur l'intervalle [-2,1].

3- On considère le rectangle ABCD de la figure (tel que A(-2,0) et B(1,0)).

a) Déterminer la largeur h du rectangle ABCD pour que son aire soit égale à A.

b) Vérifier que $h = \overline{f}$.

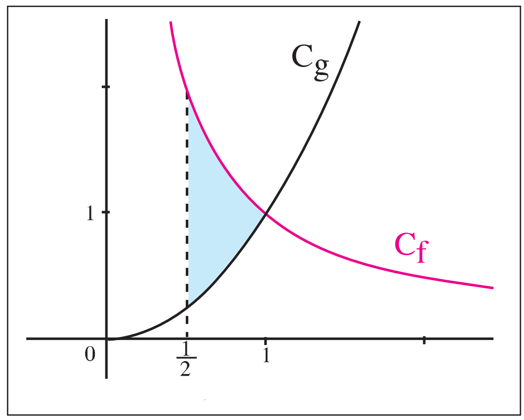


Activité 4

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=e^{-x}$

1- Dresser le tableau de variation de f .
2- Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.(l'unité graphique étant 1 cm).
3- Calculer l'aire en cm^2 de la région du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et x = 2.
4- a- Soit $\lambda>1$, calculer en fonction de λ, l'aire $A(\lambda)$ de la région du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et $x=\lambda$.
b- Calculer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

Activité 5



Dans le graphique ci-contre , C_f et C_g représentent respectivement les fonctions f et g définies par $f(x)=\dfrac{1}{x}$ et $g(x)=x^2$.

On se propose de calculer l'aire A de la partie du plan limitée par les courbes C_f , C_g et les droites d'équations respectives
$x=\dfrac{1}{2}$ et $x=1$.

1- Colorier la région du plan limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=\dfrac{1}{2}$ et $x=1$.

2- Colorier (par une autre couleur)la région du plan limitée par la courbe C_g , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=\dfrac{1}{2}$ et $x=1$.

3- En déduire la valeur de A et la comparer à $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f(t)-g(t)\right|dt$.

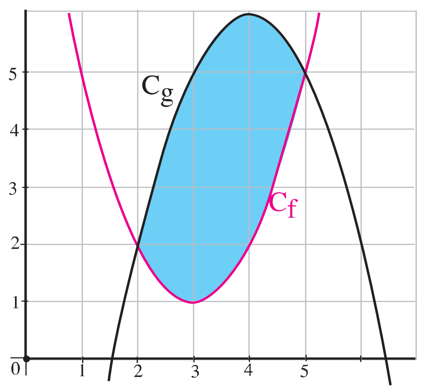
Théorème :

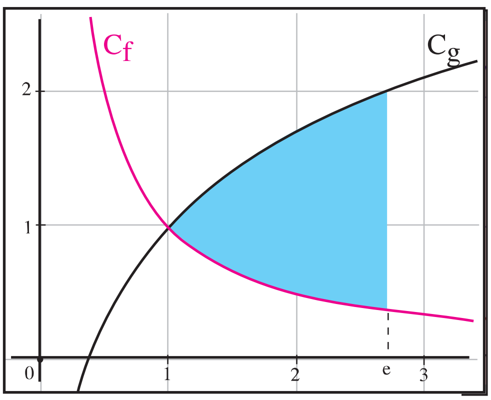
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle [a,b]
L'intégrale $\int_a^b\left|f(t)-g(t)\right|dt$ est l'aire, en unités d'aire, de la région du plan limitée par les courbes représentatives de f et de g et des droites d'équations x = a et x = b.

Activité 6

Dans chacun des cas suivants, on donne deux fonctions f et g ainsi que leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé du plan.
Calculer dans chacun des cas suivants l'aire (en unité d'aire) du domaine colorié.

a) $f(x)=x^2-6x+10$ et $g(x)=-x^2+8x-10$; b) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ et $g(x)=\ln(x)+1$





Activité 7

Soient les fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=2x-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{15}{4}$ et $g(x)=x-2$.

On désigne par C et C') les courbes représentatives respectives de f et de g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (L'unité graphique étant 2cm).

1- a- Montrer que pour tout $x>0$ on a $f(x)-g(x)=\dfrac{(x-2)(4x^2+x+2)}{4x^2}$.

b- En déduire les positions relatives de C et C'.

2- Calculer l'aire (en cm^2) du domaine compris entre C, C' et les droites d'équations $x=1$ et $x=3$.

On se propose de compléter les travaux pratiques du chapitre étude de fonctions en calculant l'intégrale de f entre a et b d'une part, et l'aire de la région du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = a et x = b d'autre part.

Etape 1 : Définition des variables :

* Les cellules A3, A4, A5, B3, B4, B5, B7 et C7 sont définies dans le chapitre étude de fonctions .

* Dans la cellule D3 taper : « Intégrale de f »

Dans la cellule D4 taper : « Aire A »

Définir les variables i et aire

* Sélectionner la cellule B3

Dans le menu : 'Insertion' sélectionner la commande 'nom' puis 'définir'.

Taper la lettre : i ; puis valider

* Sélectionner la cellule B4

Dans le menu : 'Insertion' sélectionner la commande 'nom' puis 'définir'.

Taper : aire ; puis valider.

Etape 2 : Programmation de la fonction et de la procédure de remplissage du tableau de valeurs.

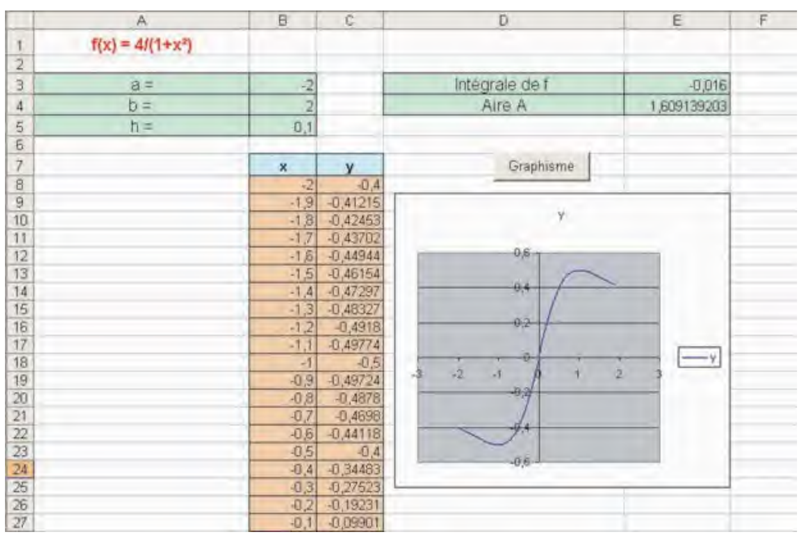
* Afficher l'éditeur de code de Visual Basic et taper les lignes suivantes :

```
Function f(x)
    On Error GoTo Erreur
    f = x / (x ^2 + 1)                    ' On peut considérer toute autre fonction'
    Exit Function
Erreur:
    f = ""
    Resume Next
End Function
Function Intégrale(a, b)
     i = 0                                 'calcul de l'intégrale de f(x)dx de a jusqu'à b
    aire =                                 'le calcul reste correct même si b<a
    x = a
    dx = (b - a) / 100 'dx est négatif lorsque a>b      ' pour plus de précision on peut
diviser par
   Do                                                   '1000 au lieu de 100
       i = i + f(x) * dx                                ' valeur cumulée de l'intégrale
       aire = aire + Abs(f(x)) * dx                     ' valeur cumulée de l'aire
       x = x + dx
    Loop While (dx > 0 And x < b) Or (dx < 0 And x > b)    ' cette condition tient compte
     Cells(4, 5) = aire                  '   des 2cas possibles a<b et b<a
    Intégrale = i
End Function                             'Reprise de la procédure considérée dans le chapitre
Sub calculs()                            ' étude de fonctions
```

```
    a = Cells(3, 2)
    b = Cells(4, 2)
    h = Cells(5, 2)
    i = 8
    x = a
    Do While i <= 100
       Cells(i, 2) = ""
       Cells(i, 3) = ""
       i = i + 1
    Loop
    i = 8
    Do While x <= b
       Cells(i, 2) = x
       Cells(i, 3) = f(x)
       x = x + h
       i = i + 1
    Loop
    Cells(3, 5) = Intégrale(a, b)          ' appel de la fonction intégrale
End Sub
```

Etape 3 : Remplissage du tableau de valeurs et traçage de la courbe (étapes décrites dans le chapitre étude de fonctions.

Cliquer sur le bouton ajouté (ici libellé Graphisme) et le tableau se remplit en fonction des valeurs et de la fonction choisies.



	A	B	C	D	E
1	f(x) = 4/(1+x²)				
2					
3	a =	-2		Intégrale de f	-0,016
4	b =	2		Aire A	1,609139203
5	h =	0,1			
6					
7		x	y	Graphisme	
8		-2	-0,4		
9		-1,9	-0,41215		
10		-1,8	-0,42453		
11		-1,7	-0,43702		
12		-1,6	-0,44944		
13		-1,5	-0,46154		
14		-1,4	-0,47297		
15		-1,3	-0,48327		
16		-1,2	-0,4918		
17		-1,1	-0,49774		
18		-1	-0,5		
19		-0,9	-0,49724		
20		-0,8	-0,4878		
21		-0,7	-0,4698		
22		-0,6	-0,44118		
23		-0,5	-0,4		
24		-0,4	-0,34483		
25		-0,3	-0,27523		
26		-0,2	-0,19231		
27		-0,1	-0,09901		

On peut traiter une autre fonction, pour cela il faut activer l'éditeur visual basic (menu outils, macro, éditeur visual basic) ou simplement à l'aide du raccourci clavier Alt+F11, puis modifier la fonction ou éventuellement ajouter de nouvelles procédures.

1- Cocher la ou les bonne(s) réponse(s) :

QUESTIONS	REPONSES	QUESTIONS	REPONSES
a) $\int_3^6 x^2\,dx =$	☐ 189 ☐ 27 ☐ 63	e) Si $\int_{-1}^{2} f(t)\,dt = -3$ et si $\int_4^2 f(t)\,dt = 5$ alors $\int_{-1}^{4} f(t)\,dt$ vaut :	☐ 2 ☐ -8 ☐ 8
b) $\int_{-1}^{1} e^{-x}\,dx =$	☐ $e-\frac{1}{e}$ ☐ $\frac{1}{e}-e$ ☐ 0	f) Si $\int_0^2 f(t)\,dt = -1$ et si $\int_0^2 g(t)\,dt = 3$ alors $\int_0^2 (2f(t)-3g(t))\,dt$ vaut :	☐ -11 ☐ 7 ☐ -7
c) $\int_1^e \ln x\,dx$ est un nombre	☐ Positif ☐ Négatif ☐ Nul	g) Soit f la fonction définie sur $[1,2]$ par $f(x)=\frac{1}{x}$. La valeur moyenne de f sur $[1,2]$ est	☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ $-\ln\frac{1}{2}$ ☐ $\ln 2$
d) $\int_0^{-1} x^2\,dx$ est un nombre	☐ Positif ☐ Négatif ☐ Nul	h) Si pour tout $t\in[-1,2]$ on a $0{,}1 \le f(t) \le 1$ et $I=\int_{-1}^{2} f(t)\,dt$ Alors :	☐ $0{,}1 \le I \le 1$ ☐ $-0{,}1 \le I \le 2$ ☐ $0{,}3 \le I \le 3$

2- Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = -(x+1)e^{-x}$.

a- Calculer f ’(x).

b- En déduire la valeur de l’intégrale $I = \int_0^1 xe^{-x}\,dx$.

3- Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = (1+\ln x)^2$.

a- Calculer f ’(x).

b- En déduire la valeur de l’intégrale $I = \int_1^e \frac{1+\ln x}{x}\,dx$.

4- Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.

a- Montrer que la fonction $F : x \mapsto \ln(1+e^x)$ est une primitive de f sur IR.

b- En déduire la valeur de l’intégrale $I = \int_0^e f(x)\,dx$.

5- Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^2 (t+1)\,dt$; b) $\int_{-1}^1 (3x^2 - x)\,dx$; c) $\int_{-1}^1 \left(4x(x^2-1)\right)dx$

d) $\int_{-1}^1 e^x\,dx$; e) $\int_1^2 \left(t+\frac{1}{t}\right)dt$; f) $\int_e^1 \frac{t+1}{t}\,dt$

g) $\int_{-1}^1 \left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{x^2}\right)dx$; h) $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{4t+1}}\,dt$; i) $\int_0^1 2xe^{x^2}\,dx$

j) $\int_e^1 \frac{\ln t}{t}\,dt$; k) $\int_1^e \frac{3}{x}(\ln x)^2\,dx$; l) $\int_2^1 \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\,dx$

6- a- Calculer $\int_{-1}^4 \frac{1}{x+2}\,dx$.

b- Montrer que pour tout x de $]-2,+\infty[$ on a $\frac{x}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2}$.

c- En déduire la valeur de $I = \int_{-1}^2 \frac{x}{x+2}\,dx$.

7- a- Montrer que pour tout x de $]-2,2[$ on a $\frac{4}{4-x^2} = \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}$.

b- En déduire la valeur de $I = \int_{-1}^1 \frac{4}{4-x^2}\,dx$.

8- Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x^2+x}$.

a- Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$ on a $f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$.

b- En déduire la valeur de $I = \int_1^2 f(x)\,dx$.

9- Soit la fonction f définie sur $IR \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{x^2-2x+5}{x-2}$.

a- Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x de $IR \setminus \{2\}$ on a :

$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$.

b- En déduire l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$.

10- a- Montrer que pour tout réel x on a $\frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$.

b- En déduire la valeur de $I = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$ et de $J = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^{-x}+1}\,dx$.

11- On considère la fonction f définie sur IR par $f(x)=(x^2+2x-3)e^x$

a- Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction F définie sur IR par $F(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ soit une primitive de f sur IR.

b- En déduire la valeur de l'intégrale $I=\int_0^1 f(x)\,dx$

12- a- A l'aide d'un intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$I=\int_0^1 (2x-1)e^{3x}\,dx \quad ; \quad J=\int_1^e (1-x)\ln x\,dx$$

b- En déduire les valeurs des intégrales

$$K=\int_0^1 (x^2-x)e^{3x}dx \quad ; \quad L=\int_1^e (2x-x^2)\ln x\,dx$$

c- Soit n un entier naturel non nul, on pose $I_n=\int_0^1 x^n e^x\,dt$

Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$

13- Le débit en $m^3\times h^{-1}$ d'une pompe à arrosage qui fonctionne en été de 6 heures à 20 heures, est modélisé par $f(x)=5e^{0,002x}$ où x est l'heure considérée ($6\le x\le 20$).

a- Vérifier que la fonction F définie sur IR par $F(x)=2500e^{0,002x}$ est une primitive de la fonction f sur IR.

b- Le volume V d'eau débité par cette pompe entre 6 et 20 heures est égal à : $\int_6^{20} f(x)dx$

Vérifier que V est environ $71,85\ m^3$.

c- Montrer que le débit moyen de cette pompe entre 6 et 20 heures est environ $5,13m^3.h^{-1}$

14- *(Valeur moyenne du coût marginal*

Une entreprise fabrique des objets dont le nombre $x\in[0\ ;\ 3,5]$ est exprimé en milliers.

Le coût de fabrication C(x) est exprimé en milliers de dinars et le coût marginal $C_m(x)=C'(x)$ est modélisé par $C_m(x)=1+\dfrac{x-3}{8}e^x \quad ; \quad x\in[0\ ;\ 3,5]$

1- a- Dresser le tableau de variation de la fonction C_m

b- En déduire que $C_m(x)\ge 0$ pour tout x de $[0\ ;\ 3,5]$.

2- Soit u la fonction définie sur $[0\ ;\ 3,5]$ par $u(x)=\dfrac{x-4}{8}e^x$

a- Calculer $u'(x)$ pour x de $[0\ ;\ 3,5]$.

b- En déduire la primitive de C_m qui s'annule en 0.

3- Calculer la valeur moyenne $\overline{C_m}$ de C_m sur $[0\ ;\ 3,5]$.

15- Soient f une fonction définie sur [a,b] et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Dans chacun des cas suivants, calculer l'aire de la région du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = a et x = b :

a) $f(x)=x^2+x+1 \quad a=0$ et $b=1$; b) $f(x)=\dfrac{2}{x} \quad a=2$ et $b=3$

c) $f(x)=e^{1-x} \quad a=-2$ et $b=2$; d) $f(x)=\dfrac{2}{x+1}\ln(x+1) \quad a=0$ et $b=1$

16- Soient f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan (l'unité graphique : 3cm).

a- Démontrer que la droite D :y = x est asymptote à C en $+\infty$

b- Vérifier que pour tout x de $]0,+\infty[$, on a $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$ et dresser le tableau de variation de la fonction f.

c- Tracer la courbe représentative de f et la droite D.

d- Calculer l'aire (en cm^2) du domaine compris entre la courbe C, la droite D et les droites d'équations x = 1 et x = 3.

17- Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2e^{-x}$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (l'unité étant 2cm).

1- Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

2- Dresser le tableau de variations de f.

3- Construire la courbe C.

a- Soit $\alpha \in]0,+\infty[$, montrer que l'aire $A(\alpha)$ de la région du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = α est égale à $4\left(1-e^{-\alpha}(1+\alpha+\dfrac{\alpha^2}{2})\right)$ cm² . (On utilisera deux intégrations par parties successives).

b- Calculer $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$.

18- On considère la fonction f définie sur [0,6] par : $f(x)=\dfrac{1}{36}(6x-x^2)$

1- a- Dresser le tableau de variations de f .

b- Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

c- Calculer $\int_0^6 f(x)dx$. Interpréter graphiquement cette intégrale.

d- Soient a et b deux réels de [0,6] tels que $a \le b$. Montrer que $0 \le \int_a^b f(x)dx \le 1$

2- Une entreprise fabrique un produit et vend chaque semaine x milliers d'unités tel que $0 \le x \le 6$.
Soient a et b deux réels de [0,6] tels que $a \le b$. On estime que la probabilité de vendre entre a et b milliers d'unités pour une semaine choisie au hasard est $\int_a^b f(x)dx$.

Déterminer la probabilité de vendre :
a- Moins de 2000 unités ; b- Entre 2000 et 4000 unités ; c- Plus de 4000 unités.

19- On considère les fonctions f et g définies sur $[1,+\infty[$ par

$f(x) = 1,1x + \ln x - \ln(x+1)$ et $g(x) = 1,1x + \dfrac{1}{x}$

On désigne par C_f et C_g leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan (l'unité graphique est 2cm).

A- 1- a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b- Dresser le tableau de variation de f.

2- a- Montrer que la droite D d'équation $y = 1,1x$ est une asymptote à C_f

b- Etudier la position relative de C_f par rapport à D

3- Tracer C_f et D.

B- 1- Dresser le tableau de variation de g

2- Vérifier que la droite D est asymptote à C_g et préciser la position relative de C_g par rapport à la droite D.

3- Tracer C_g dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4- On pose pour tout x de $[1,+\infty[$, $H(x) = (x+1)\ln(x+1) - x\ln x$

a- Calculer $H'(x)$ pour $x \in [1,+\infty[$

b- En déduire une primitive sur $[1,+\infty[$ de la fonction $h : x \mapsto g(x) - f(x)$

c- Calculer l'intégrale $\int_1^5 \left(g(x) - f(x)\right)dx$.

En donner une interprétation graphique.

C- Les fonctions f et g modélisent respectivement la quantité d'objets produits par une entreprise et la quantité d'objets commandés à cette entreprise.
Plus précisément, si t est la date exprimée en semaines, f(t) est la quantité en milliers d'objets produits à la date t et g(t) est la quantité d'objets commandés à cette même date en milliers.

1- Lorsque $f(t) \ge g(t)$, on dit que « *la demande est satisfaite* à la date t »
Démontrer que la demande n'est jamais satisfaite.

2- On admet que le nombre total d'objets en milliers dont la demande n'est pas satisfaite entre les dates n et n', avec $n' > n$ est donné par : $\int_n^{n'} (g(t) - f(t))\,dt$

Donner à un objet près, le nombre total d'objets dont la demande n'est pas satisfaite entre les dates 1 et 5.

3- On considère que « *le niveau de fabrication est suffisant* » lorsque moins de 20 demandes ne sont pas satisfaites c'est-à-dire lorsque l'on a : $g(t) - f(t) \leq 0,02$

En admettant que $(g - f)$ est une fonction strictement décroissante sur $[1, +\infty[$, à partir de quelle date le niveau de fabrication est-il suffisant ?

20-

1) g est la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = -x^2 - 4 + \ln x$.

Dresser le tableau de variations de g et en déduire le signe de g(x) pour tout x > 0.

2) f est la fonction définie sur]0 ; +∞[par : $f(x) = -x + 2 - \dfrac{4\ln x}{x}$

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées). Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

a) Etudier le sens de variation de f.

b) Etudier la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c) Calculer la limite de f en +∞.

d) Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation y = -x + 2 est asymptote à $\mathscr{C}$ en +∞.

e) Etudier la position relative de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$.

f) Dresser le tableau de variation de f.

g) Déterminer les points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à $\mathscr{D}$.

h) Représenter $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.

3) h est la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $h(x) = -x + 2 - \dfrac{4}{x}$.

On appelle $\mathscr{H}$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Etudier les variations de h.

b) Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ est asymptote à $\mathscr{H}$. Déterminer l'autre asymptote à $\mathscr{H}$.

c) Etudier les intersections de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{H}$, et étudier la position relative des deux courbes.

4) Calculer $\int_a^b (f(x) - h(x))\,dx$ .Interpréter graphiquement le résultat.

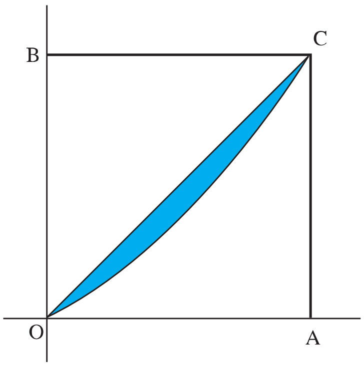
21- A- Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 5 cm).

Les points C et A ont respectivement pour coordonnées (1 ; 1) et (1 ; 0), et $\mathscr{D}$ est la droite d'équation y = x.

1- Soit g la fonction définie sur [0 ; 1] par : $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{e - 1}$.

a) Etudier les variations de g et vérifier que sa courbe représentative $\mathscr{C}$ passe par les points O et C.
b) Déterminer des équations des tangentes à $\mathscr{C}$ en O et C.
c) Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.
d) Calculer l'aire de la portion du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
2- Dans cette question, on se propose de généraliser les résultats obtenus à la première question et d'en donner une interprétation économique.
On considère une fonction F définie et continue sur $[0 ; 1]$ satisfaisant aux conditions (C) suivantes : F est croissante, $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$.

B- Une fonction F satisfaisant aux conditions (C) décrit la distribution de la masse salariale d'une entreprise entre ses salariés, que l'on classe par salaires croissants : F(x) représente le pourcentage des salaires perçus par le pourcentage x de salariés (par exemple, si 50% des salariés perçoivent 30% de la masse salariale, alors $F(0,5) = 0,3$).
La courbe $\mathscr{C}$ correspondante est appelée **courbe de Lorentz**Le coefficient γ égal au rapport de l'aire coloriée sur le dessin à l'aire du triangle OAC, appelé **indicateur de Gini**, est alors un indicateur d'inégalité de répartition salariale.



a) Vérifier que la fonction g étudiée à la première question satisfait aussi aux conditions (C) et donner la valeur γ_i de γ correspondante.
b) Mêmes questions pour les fonctions h et k définies sur $[0 ; 1]$ par : $h(x) = x^2$ et

$$k(x) = \frac{x^3 + x}{2}.$$

Les fonctions g, h et k représentent trois entreprises G, K et L.
Classer ces trois entreprises de la plus égalitaire au moins égalitaire.

PID ou proportionnel, intégral, dérivée

Pâte à papier, pâtisserie ou pétrole, en usine le problème est le même : éviter à tout prix que la cuve ne déborde et garde le tout à la bonne température lors de la fabrication. Il faut donc jouer du thermostat et de la vanne pour réguler l'ensemble.

L'une des méthodes les plus courantes de régulation des processus de fabrication industriels est le contrôle PID. Le principe est simple :

Si le niveau d'une cuve est N_0 et que le niveau mesuré à l'instant t est n(t), la commande à envoyer à la vanne pour qu'elle fasse elle-même les régulations nécessaires est représentée par la somme de trois termes.

Le premier est proportionnel à l'écart $N(t)–N_0$, le deuxième à la dérivée de ce même écart et le troisième est sa primitive. Ces deux derniers termes jouent un rôle primordial. La dérivée permet de contrebalancer les variations brutales liées au premier écart, l'intégrale entre deux instants aide à supprimer les éventuelles oscillations de niveau autour de la valeur fixée N_0

D'où le nom de régulation par « contrôle PID », qui signifie tout simplement **P**roportionnel, **I**ntégral, **D**érivée.