

OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES FORCÉES EN RÉGIME SINUSOÏDAL

4



La guitare électrique est munie d'une caisse creuse à laquelle sont adjoints des microphones électromagnétiques. Grâce à la résonance électrique, le son amplifié prime sur la résonance naturelle de la caisse.

- ◆ En quoi consiste la recherche manuelle ou automatique d'une chaîne radio ou d'un canal de télévision?
- ◆ Que veut-on dire par "résonance électrique" dont les applications sont très nombreuses ?

OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES FORCÉES EN RÉGIME SINUSOÏDAL

On a vu dans le chapitre précédent que si un circuit RLC série peut effectuer des oscillations libres, celles-ci cessent plus au moins rapidement à cause de l'amortissement dû à sa résistance.

Quel sera l'effet de l'application d'une tension sinusoïdale aux bornes d'un tel oscillateur, une simple compensation de l'amortissement ou plus !

1 RÉPONSE D'UN CIRCUIT RLC SÉRIE À UNE TENSION SINUSOÏDALE

1.1- PRODUCTION D'OSCILLATIONS FORCÉES

Manipulation

♦ On réalise le montage de la figure 1 : il s'agit d'un circuit RLC série fermé sur un générateur "basse fréquence" délivrant une tension sinusoïdale $u(t)$ de fréquence N réglable :

$$u(t) = U_m \cdot \sin \omega t, \quad U_m \text{ étant maintenue constante.}$$

Le circuit RLC série est constitué d'un résistor de résistance R_0 réglable, d'un condensateur de capacité $C = 0,47 \mu\text{F}$ et d'une bobine d'inductance $L = 0,2 \text{ H}$ et de résistance interne $r = 12,5 \Omega$ (Fig.1).

♦ Pour suivre, simultanément, l'évolution de la tension u délivrée par le GBF entre ses bornes et l'intensité du courant i débité dans le circuit, on relie à un oscilloscope bicourbe, le point M à la masse, le point A à la voie Y_1 et le point B à la voie Y_2 .

♦ On fixe N à la valeur 400 Hz, U_m à 2 V et R_0 à 50Ω par exemple. Lorsque l'interrupteur K est ouvert, on observe sur l'écran de l'oscilloscope uniquement l'oscillogramme (1) de la figure 2. En fermant le circuit, on observe, sur l'écran de l'oscilloscope, les oscillogrammes stables (1) et (2) de la figure 2 avec une sensibilité horizontale de 1 ms/div.

♦ La fréquence étant toujours égale à 400 Hz, on réalise une série de mesures de $U_{R_{0m}}$ pour différentes valeurs de l'amplitude U_m de la tension d'entrée U_m .

Les résultats de mesures ont permis d'obtenir le tracé de la figure 3.

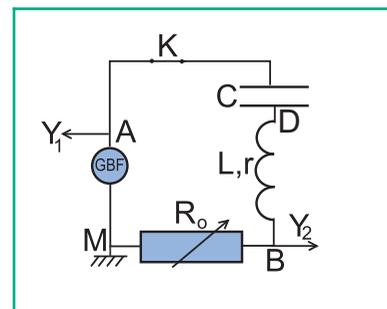


Fig.1 : Circuit RLC série soumis à une tension sinusoïdale

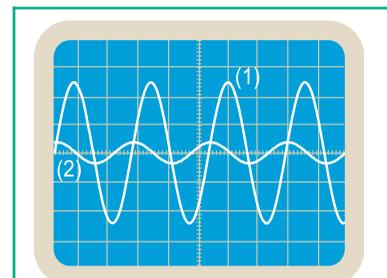


Fig.2 : Oscillogrammes de u et de u_{R_0} .

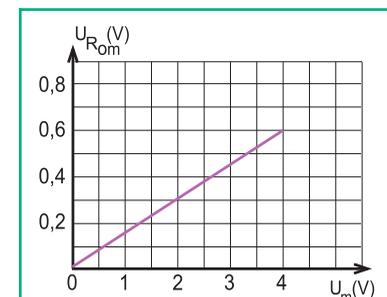


Fig.3 : Tracé de $U_m = f(U_{R_{0m}})$

Questions

- 1°) Comparer la forme de l'oscillogramme représentant $i(t)$ à celle de $u(t)$.
- 2°) Mesurer la fréquence N de $i(t)$ et la comparer à celle de $u(t)$.
- 3°) Comparer la fréquence N à la fréquence propre N_0 de l'oscillateur.
- 4°) a- A l'aide de la courbe de la figure 3, montrer que : $U_m = kU_{R_{0m}}$, où k est une constante que l'on calculera.
b- Montrer que la tension maximale U_m peut s'écrire sous la forme :
 $U_m = Z I_m$ où Z une constante dont on déterminera la dimension.

Commentaire

L'analyse des oscillogrammes de la figure 2 montre que, comme celle de $u(t)$, la courbe représentant $i(t)$ varie sinusoïdalement au cours du temps.

De plus, il y a constamment le même décalage horaire entre les deux oscillogrammes. Par conséquent, l'intensité $i(t)$ varie avec la même fréquence que la tension $u(t)$ imposée par le GBF et non avec la fréquence propre du circuit RLC série : les oscillations imposées par le GBF ne sont plus libres, elles sont forcées. Ainsi, le GBF a joué le rôle d'excitateur.

La forme linéaire de la courbe représentant $U_{R_{0m}}$ en fonction de U_m montre que le quotient $\frac{U_m}{I_m}$ est une constante qui ne dépend que des caractéristiques de l'oscillateur. On l'appelle impédance du circuit et on la note Z .

Interprétation théorique

Pour le circuit utilisé précédemment, la loi des mailles s'écrit :

$$u_{BM} + u_{DB} + u_{AD} + (-u_{AM}) = 0, \text{ d'où } u_{AM} = u_{BM} + u_{DB} + u_{AD}.$$

$$\text{Donc, } u_{AM} = R_0 \cdot i + r \cdot i + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C},$$

$$\text{soit } u_{AM} = R_0 \cdot i + r \cdot i + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C}.$$

$$\text{Or, } q = \int i \cdot dt. \text{ Donc, } u_{AM} = R \cdot i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i \cdot dt, \text{ où } R = R_0 + r \text{ et } \omega = 2\pi N.$$

Une telle équation différentielle à second membre non nul admet comme solution particulière celle du régime permanent :

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Remarque : La solution générale faisant apparaître de plus le régime transitoire qui ne dure qu'une très petite fraction de seconde est hors programme.

Conclusion

La réponse d'un circuit RLC série à une tension sinusoïdale est un courant alternatif sinusoïdal y oscillant :

- à la fréquence N de la tension excitatrice,
- avec une amplitude $I_m = U_m / Z$, où Z est une grandeur physique ayant la dimension d'une résistance appelée impédance du circuit RLC série.

1.2- DÉPHASAGE

Définition

On appelle déphasage entre deux fonctions sinusoïdales de phases initiales φ_1 et φ_2 la différence de phase $\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1)$ ou $(\varphi_1 - \varphi_2)$.

Exemples

♦ Les chronogrammes (1) et (2) de chacune des figures (4a) et (4b) représentent deux tensions u_1 et u_2 synchrones (de même période et simultanées) et de phases initiales φ_1 et φ_2 . Dans le premier cas (Fig.4a), u_1 et u_2 sont dites en phase ou en concordance de phase tandis que dans le deuxième cas (Fig.4b), u_1 et u_2 sont dites en opposition de phase.

Questions

1°) Justifier qualitativement les appellations : concordance de phase et opposition de phase.

2°) a-Montrer que la concordance de phase signifie :

$$\Delta\varphi = 2k\pi \text{ rad, avec } k \text{ entier relatif.}$$

b-Montrer que l'opposition de phase signifie que :

$$\Delta\varphi = (\pi + 2k\pi) \text{ rad, avec } k \text{ entier relatif.}$$

3°) Dans les cas de la figure 5 où le décalage horaire Δt entre u_1 et u_2 est égale à $T/4$, on dit que u_2 et u_1 évoluent au cours du temps en quadrature de phase. Plus précisément, u_2 est en quadrature retard sur u_1 dans le cas de la figure 5a, tandis qu'elle est en quadrature avance sur u_1 dans le cas de la figure 5b.

Expliquer cette différence par le calcul de $\Delta\varphi$ dans les deux cas.

4°) Dédire des exemples traités précédemment que la valeur absolue du déphasage $|\Delta\varphi|$ entre deux fonctions sinusoïdales isochrones est liée à leur décalage horaire Δt par la relation :

$$|\Delta\varphi| = \frac{2\pi}{T} \Delta t$$

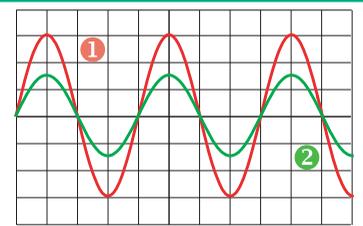


Fig.4a : Tensions u_1 et u_2 en concordance de phase

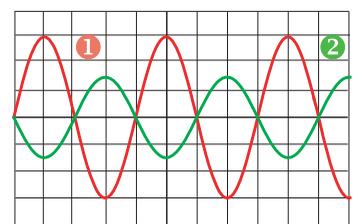


Fig.4b : Tensions u_1 et u_2 en opposition de phase

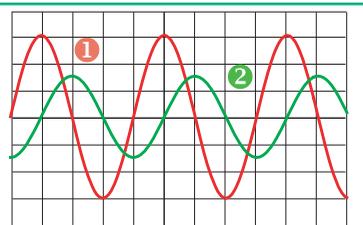


Fig.5a : Tension u_2 en quadrature retard sur u_1

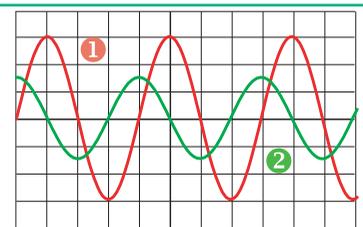


Fig.5b : Tension u_2 en quadrature avance sur u_1

Conclusion

A tout décalage horaire Δt entre deux fonctions sinusoïdales $y_1(t)$ et $y_2(t)$ isochrones (de même période T), représentées dans le même système d'axes, est associé un déphasage $\Delta\varphi$ tel que :

$$|\Delta\varphi| = \frac{2\pi}{T} \Delta t$$

- Si $\Delta t = 0$, $\Delta\varphi = 0$: les deux fonctions sont en concordance de phase.

- Si $\Delta t = T/2$, $\Delta\varphi = \pm\pi$ rad : les deux fonctions sont en opposition de phase.

- Si $\Delta t = T/4$, $\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ rad : les deux fonctions sont en quadrature de phase.

Si le déphasage $(\varphi_2 - \varphi_1)$ est positif, $y_2(t)$ est en avance de phase par rapport à $y_1(t)$ et inversement.

2

INFLUENCE DE LA FRÉQUENCE D'EXCITATION SUR LA RÉPONSE D'UN CIRCUIT RLC SÉRIE

Manipulation

♦ On reprend le montage de la figure 1 où le générateur BF délivre une tension $u(t) = U_m \sin 2\pi Nt$ avec $U_m = 2 \text{ V}$.

En faisant varier la fréquence N des excitations, on constate qu'à chaque fois, la tension $u_{R_0}(t)$ conserve la même forme sinusoïdale mais avec changement de sa valeur maximale $U_{R_{0m}}$ et de son décalage horaire Δt par rapport à $u(t)$.

♦ Dans une deuxième étape, on réalise une série de mesures de l'intensité maximale I_m et du décalage horaire Δt entre $u(t)$ et $i(t)$ en fonction de la fréquence N du GBF.

Les résultats des mesures ont permis d'obtenir :

- le tracé de la figure 6a représentant l'évolution de l'amplitude I_m de l'intensité i en fonction de N .
- le tracé de la figure 6b représentant l'évolution de la phase initiale φ de l'intensité i en fonction de N .

Remarque

Il est pratique aussi de suivre à l'aide d'un ampèremètre l'évolution de l'intensité efficace I en fonction de la fréquence N .

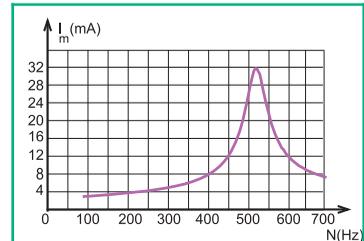


Fig.6a : Evolution de I_m en fonction de N

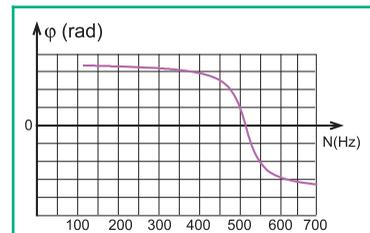


Fig.6b : Evolution de la phase initiale φ en fonction de N

Questions

1°) Montrer que, dans les conditions de l'expérience réalisée, la valeur de la phase initiale φ est égale à la valeur du déphasage entre i et u .

2°) Décrire la forme particulière de la courbe représentant I_m en fonction de N .

3°) a- Déterminer graphiquement la valeur de la fréquence N pour laquelle l'intensité maximale I_m du courant oscillant est à sa valeur la plus élevée I_{m_0} et la comparer à celle de la fréquence propre N_0 de l'oscillateur.

b- Relever I_{m_0} et la valeur correspondante φ_0 de φ .

c- Calculer l'impédance Z qu'a le circuit RLC dans ce cas particulier et la comparer à sa résistance totale ($R_0 + r$).

Conclusion

En régime forcé sinusoïdal, l'intensité maximale I_m et la phase initiale φ du courant oscillant dans un circuit RLC série dépendent de la fréquence N de la tension excitatrice et des grandeurs R , L et C caractéristiques de l'oscillateur.

La réponse d'un circuit RLC série à une tension sinusoïdale de fréquence N égale à la fréquence propre N_0 du circuit est un courant oscillant en phase avec la tension excitatrice et avec l'intensité maximale la plus élevée : c'est la résonance d'intensité.

A la résonance d'intensité, le circuit RLC série se comporte comme un résistor de résistance R .

Interprétation théorique

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Pour déterminer l'amplitude I_m et la phase initiale φ de $i(t)$, il est commode de recourir à la construction de Fresnel dont le principe est expliqué dans la fiche technique de fin de chapitre

Valeur maximale I_m et phase initiale φ de l'intensité i du courant

$$\text{On a : } Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i \cdot dt = U_m \sin \omega t, \text{ avec } R = R_o + r$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi).$$

$$\frac{di}{dt} = \omega I_m \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$\int i \cdot dt = \frac{I_m}{\omega} \sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}) + \text{cte}$$

Etant une fonction sinusoïdale, $U_m \sin \omega t$ ne peut être qu'une somme de fonctions sinusoïdales. Donc, $\text{cte} = 0$.

Il vient alors :

$$R I_m \sin(\omega t + \varphi) + L \omega I_m \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) + \frac{I_m}{C \omega} \sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}) = U_m \sin(\omega t).$$

A chaque terme de cette dernière équation on associe un vecteur tournant.

- $R I_m \sin(\omega t + \varphi), i \rightarrow \vec{OA}_1 [R I_m, \varphi]$
- $L \omega I_m \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}), i \rightarrow \vec{OA}_2 [L \omega I_m, \varphi + \frac{\pi}{2}]$
- $\frac{I_m}{C \omega} \sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}), i \rightarrow \vec{OA}_3 [\frac{I_m}{C \omega}, \varphi - \frac{\pi}{2}]$
- $U_m \sin \omega t, i \rightarrow \vec{OA} [U_m, 0]$ tel que : $\vec{OA} = \vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \vec{OA}_3$

Les vecteurs de Fresnel \vec{OA}_2 et \vec{OA}_3 étant de sens contraires,

il en résulte trois constructions possibles :

- $\|\vec{OA}_2\| > \|\vec{OA}_3\|$, cas correspondant à $L\omega > \frac{1}{C\omega}$,

c'est-à-dire $N > N_o$ (Fig. 7a),

- $\|\vec{OA}_2\| < \|\vec{OA}_3\|$, cas correspondant à $L\omega < \frac{1}{C\omega}$,

c'est-à-dire $N < N_o$ (Fig. 7b),

- $\|\vec{OA}_2\| = \|\vec{OA}_3\|$, cas correspondant à $L\omega = \frac{1}{C\omega}$,

c'est-à-dire $N = N_o$ (Fig. 7c).

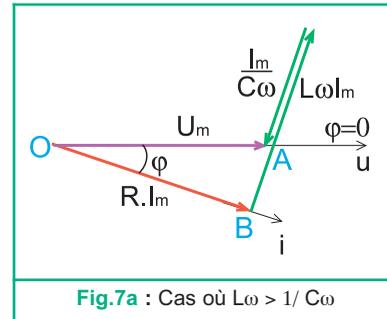


Fig.7a : Cas où $L\omega > 1/C\omega$

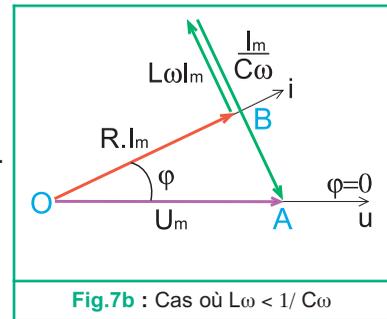


Fig.7b : Cas où $L\omega < 1/C\omega$

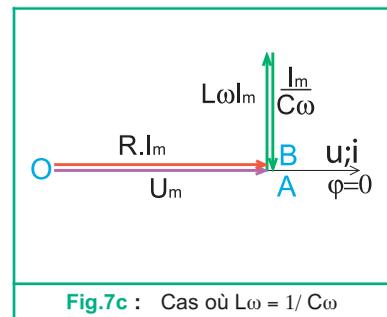


Fig.7c : Cas où $L\omega = 1/C\omega$

Dans le cas général, on a :

$$U_m^2 = (R I_m)^2 + (L\omega I_m - \frac{I_m}{C\omega})^2, \text{ d'où } U_m = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} I_m.$$

Donc,

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}},$$

soit : $I_m = \frac{U_m}{Z}$ avec $Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$.

D'après le cas de la figure 7a, $L\omega > \frac{1}{C\omega}$, on a $\varphi < 0$, ça signifie que l'intensité $i(t)$ du courant est en retard de phase par rapport à la tension excitatrice $u(t)$: le circuit RLC série est dit inductif.

D'après le cas de la figure 7b, $L\omega < \frac{1}{C\omega}$, on a $\varphi > 0$, ça signifie que l'intensité $i(t)$ du courant est en avance de phase par rapport à la tension excitatrice $u(t)$: le circuit RLC série est dit capacitif.

D'après les constructions précédentes et en tenant compte de la dépendance du signe de φ de celui de $(L\omega - \frac{1}{C\omega})$, la phase initiale φ de i est telle que :

$$\text{tg}\varphi = \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R}, \text{ avec } -\frac{\pi}{2} \text{ rad} < \varphi < \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Remarque

Le déphasage φ entre i et u peut être aussi caractérisé par : $\cos\varphi = \frac{R}{Z}$

Résonance d'intensité

L'impédance du circuit s'écrit $Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$.

∞ Aux très basses pulsations ainsi qu'aux pulsations beaucoup plus élevées que la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur, l'écart entre $L\omega$ et $\frac{1}{C\omega}$ augmente. Par suite, l'impédance Z devient de plus en plus grande.

Donc, dans l'un ou dans l'autre cas, $I_m(\omega) = \frac{U_m}{Z} \rightarrow 0$, ce qui signifie que la réponse du circuit RLC série devient de plus en plus faible. Cette réponse s'améliore lorsque Z prend une valeur modérée, ce qui n'est possible qu'avec des valeurs comparables de $L\omega$ et de $\frac{1}{C\omega}$.

Dans le cas particulier où $L\omega = \frac{1}{C\omega}$ obtenu avec $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$,

∞ l'impédance Z est minimale : $Z = R$. Par conséquent, l'intensité maximale prend sa valeur la plus élevée $I_{m0} = \frac{U_m}{R}$: c'est la résonance d'intensité.

∞ $\text{tg}\varphi = \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R} = 0$, ce qui signifie qu'à la résonance, la tension u et l'intensité i sont en phase.

Remarque

L'appellation d'un oscillateur en régime forcé comme étant un résonateur revient au phénomène de résonance.

Conclusion

La réponse d'un circuit RLC série à une tension sinusoïdale de fréquence N égale à la fréquence propre N_0 du circuit est un courant oscillant en phase avec la tension excitatrice et avec l'intensité maximale I_m la plus élevée : c'est la résonance d'intensité.

$$N = N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} : \text{Résonance d'intensité} \Leftrightarrow \begin{cases} I_m \text{ est la plus élevée} \\ u \text{ et } i \text{ sont en phase} \end{cases}$$

3 INFLUENCE DE LA RÉSISTANCE TOTALE DU CIRCUIT SUR LA RÉSONANCE

Manipulation

On refait l'étude expérimentale du paragraphe 2, avec $L = 0,2 \text{ H}$ et $C = 0,47 \mu\text{F}$, mais en fixant R_0 successivement aux valeurs $R_{02} = 20 \Omega$ et $R_{03} = 200 \Omega$.

Les résultats des mesures faites permettent d'obtenir :

- les courbes de résonance d'intensité (1) et (2) de la figure 8a, correspondant respectivement à R_{02} et R_{03} .
- les courbes (a) et (b) de la figure 8b, représentant l'évolution de la phase initiale φ de l'intensité i en fonction de N et correspondant respectivement à R_{02} et R_{03} .

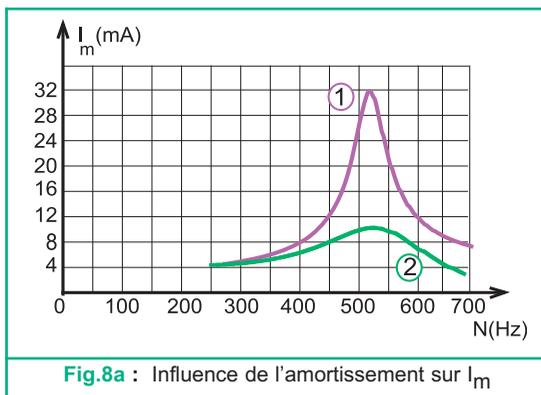


Fig.8a : Influence de l'amortissement sur I_m

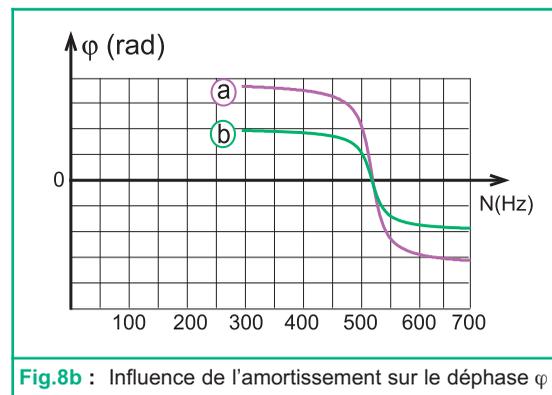


Fig.8b : Influence de l'amortissement sur le déphasage φ

Questions

- 1°) Comparer les allures des courbes de résonance (1) et (2) entre elles ; en déduire l'influence de la résistance totale du circuit sur la résonance d'intensité.
- 2°) Pour les valeurs R_{02} et R_{03} de R_0 , déterminer graphiquement :
 - a- la valeur de la fréquence de résonance,
 - b- le déphasage φ , entre l'intensité i et la tension d'alimentation u .

Interprétation

A la résonance d'intensité, on a $I_{m0} = \frac{U_m}{R}$. Cela signifie que l'importance de la résonance dépend de l'ordre de grandeur de R , donc de R_0 car $R = R_0 + r$: I_{m0} est d'autant plus grande que R est plus petite.

- Si R est très petite, le maximum de I_m est très élevé, ce qui se traduit par un pic de résonance très pointu (courbe (1) de la figure 8a) : c'est la résonance aiguë.

- Si R est grande, I_{m0} est faible, ce qui se traduit par un pic de résonance très peu prononcé (courbe (2) de la figure 8a) : c'est la résonance floue.

Conclusion

La résonance d'intensité du courant d'un oscillateur RLC série est d'autant plus aiguë que l'amortissement est faible.

Cependant, quel que soit l'amortissement, la fréquence de résonance reste toujours égale à la fréquence propre du résonateur.

4 LE PHÉNOMÈNE DE SURTENSION**Manipulation**

On reprend le montage de la figure 1, avec $L = 0,2 \text{ H}$, $C = 0,47 \mu\text{F}$ et $U_m = 2 \text{ V}$, en choisissant comme fréquence d'excitation, la fréquence propre ($N_0 = 520\text{Hz}$) du circuit RLC série. On mesure la valeur maximale U_{Cm} de la tension aux bornes du condensateur pour des valeurs de la résistance R_0 égales à $R_{01} = 20 \Omega$, $R_{02} = 50 \Omega$ et $R_{03} = 200 \Omega$. Les résultats des mesures sont consignés dans le tableau suivant :

$R_0 (\Omega)$	20	50	200
$U_{Cm} (\text{V})$	40,0	21,0	6,5

Questions

1°) Reproduire, puis compléter le tableau suivant :

$R_0 (\Omega)$	20	50	200
$Q = U_{Cm}/U_m$			

2°) Le quotient $Q = \frac{U_{Cm}}{U_m}$ est appelé facteur de surtension à la résonance.

Justifier cette appellation.

3°) a-Montrer théoriquement que Q peut s'écrire uniquement en fonction des caractéristiques R , L et C de l'oscillateur.

b-Calculer les valeurs théoriques de Q , correspondant respectivement aux valeurs 20Ω , 50Ω et 200Ω de la résistance R_0 .

4°) Quelle précaution faut-il prendre pour avoir un facteur de surtension modéré ?

Expression de Q

Pour une pulsation ω égale à la pulsation propre ω_0 ,

$$U_C = \frac{I_0}{C\omega_0} \quad \text{et} \quad I_0 = \frac{U}{R_0 + r} \quad \text{D'où :} \quad Q = \frac{1}{(R_0 + r) C\omega_0} \quad (1)$$

$$\text{Or, } \frac{1}{C\omega_0} = L\omega_0. \text{ Donc, } Q \text{ s'exprime autrement comme suit :} \quad Q = \frac{L\omega_0}{R_0 + r} \quad (2)$$

$$\text{En remplaçant } \omega_0 \text{ par } \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ dans (1) par exemple, il vient :} \quad Q = \frac{1}{(R_0 + r) C} \sqrt{LC}.$$

$$\text{Donc :} \quad Q = \frac{1}{(R_0 + r)} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Donc, le facteur de surtension Q augmente quand l'inductance L augmente et lorsque la capacité C et la résistance R du circuit diminuent. S'il est trop élevé, la surtension devient dangereuse tant pour l'utilisateur que pour les composants du circuit ou les appareils d'une manière générale : elle peut provoquer le claquage du condensateur et des étincelles entre les spires de la bobine, d'où le risque d'électrocution.

Remarque

A la résonance d'intensité : $U = (R_o + r)I$ et $U_{\text{Bobine}} = \sqrt{r^2 + (L\omega_o)^2} I$.

Si la valeur de l'inductance L est telle que, $L\omega_o \gg (R_o + r)$,

La valeur de la tension efficace aux bornes de la bobine sera plus grande que la valeur de la tension efficace d'alimentation. Donc, il y a aussi risque de surtension aux bornes de la bobine (Fig.9).

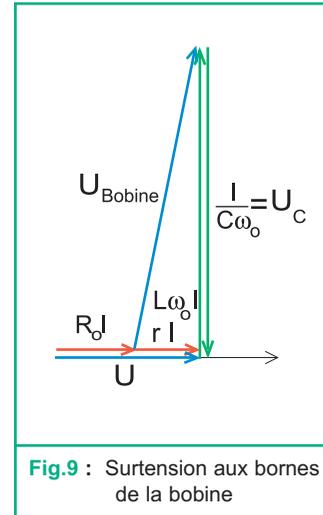


Fig.9 : Surtension aux bornes de la bobine

Conclusion

- A la résonance d'intensité d'un circuit RLC série, il peut survenir aux bornes du condensateur, une surtension caractérisée par le facteur :

$$Q = \frac{1}{(R_o + r)} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

- Le facteur de surtension Q est d'autant plus grand que la résonance est plus aiguë.
- Une surtension élevée peut entraîner des conséquences néfastes.

5 APPLICATIONS DE LA RÉSONANCE

Les applications de la résonance sont très nombreuses. on cite essentiellement :

- les oscillateurs à quartz,
- le haut-parleur et le microphone électrodynamique,
- la réception d'émissions radiophoniques.

Dans le dernier exemple cité, lorsqu'il s'agit d'un poste radio ordinaire, la résonance aiguë est recherchée pour écouter nettement une émission, on doit accorder la fréquence propre de l'oscillateur RLC série du récepteur (poste radio) avec la fréquence sur laquelle émet la station choisie. Cependant, dans le cas d'une chaîne "haute fidélité", les étages d'amplification doivent répondre avec des courbes de résonance floue (les plus aplaties possibles) dans le domaine des sons audibles afin que l'appareil puisse restituer les timbres des voix et des instruments de musique.

6 PUISSANCE MOYENNE ET FACTEUR DE PUISSANCE

Dans ce paragraphe, on se propose d'étudier le bilan énergétique des oscillations forcées d'un circuit RLC série en régime sinusoïdal.

6.1- PUISSANCE ÉLECTRIQUE INSTANTANÉE

♦ On applique aux bornes A et B du dipôle D une tension sinusoïdale de basse fréquence $u(t) = U\sqrt{2} \sin \omega t$ (Fig.10). Il sera parcouru par un courant d'intensité sinusoïdale $i(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$ et recevra, à tout instant, une puissance électrique instantanée : $p(t) = u(t) \cdot i(t)$.

Étant générale, cette expression est applicable au circuit RLC série.

Ainsi, $p = u \cdot i = U\sqrt{2} \sin(\omega t) \cdot I\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi) = 2UI \sin(\omega t + \varphi) \sin(\omega t)$.
En appliquant au produit des deux facteurs sinusoïdaux figurant dans cette expression de p , la relation trigonométrique

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)], \text{ on aboutit à :}$$

$$p = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi).$$

On constate que la puissance instantanée est la somme algébrique du terme constant "UIcosφ" et du terme "-UIcos(2ωt+φ)" évoluant périodiquement au cours du temps avec une fréquence double de celle de u et de i , ce qui rend $p(t)$ périodique de période $T_p = T/2$.

Ainsi, pendant une demi oscillation de i , $\cos(2\omega t + \varphi)$ varie entre +1 et -1. Par conséquent, p peut être positive et le dipôle RLC série est effectivement un récepteur. Puis, elle peut devenir négative et le même dipôle se comporte alors comme un générateur. Cependant, pour déterminer le bilan, ces constatations restent insuffisantes.

6.2- PUISSANCE ÉLECTRIQUE MOYENNE

Définition

La puissance moyenne d'un dipôle D est la valeur moyenne prise par sa puissance instantanée $p(t)$ sur une très grande durée Δt (tendant vers l'infini). Lorsque $p(t)$ est périodique[⊙], il est équivalent de prendre Δt égale à une période.

On note la puissance électrique moyenne P et on l'appelle aussi en régime forcé sinusoïdal, puissance électrique active ou réelle.

Comme toute puissance, la puissance moyenne s'exprime en watt (W) et se mesure avec un wattmètre.

⊙ Le cas unique qui figure dans le programme est celui du régime sinusoïdal forcé.

Expression de P

Lorsque la puissance instantanée $p(t)$ est périodique, sa valeur moyenne P sur une période T_p s'écrit :

$$P = \frac{1}{T_p} \int_{kT_p}^{(k+1)T_p} p(t) dt$$

où k est un entier naturel.

En régime sinusoïdal, on vient de trouver : $p(t) = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi)$.

$$\text{Donc, } P = \frac{1}{T_p} \int_{kT_p}^{(k+1)T_p} UI \cos \varphi dt - \frac{1}{T_p} \int_{kT_p}^{(k+1)T_p} UI \cos(2\omega t + \varphi) dt.$$

$$\text{Ce qui donne : } P = \frac{UI \cos \varphi}{T_p} \left[t \right]_{kT_p}^{(k+1)T_p} - \frac{UI}{2\omega T_p} \left[\sin(2\omega t + \varphi) \right]_{kT_p}^{(k+1)T_p}.$$

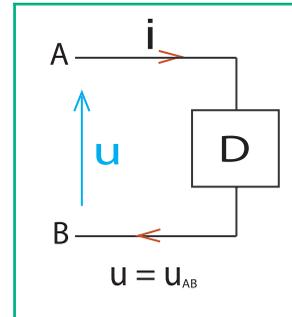


Fig.10 : Dipôle D parcouru par un courant alternatif

La fonction $\sin(2\omega t + \varphi)$ étant périodique de période $T_p = \frac{2\pi}{\omega}$,

on a : $\left[\sin(2\omega t + \varphi) \right]_{kT_p}^{(k+1)T_p} = 0$.

Cependant, $\left[t \right]_{kT_p}^{(k+1)T_p} = T_p$. Il vient donc : **$P = UI \cos\varphi$**

Cette forme générale de l'expression de la puissance moyenne est indépendante de la nature du dipôle.

Etant semblable à l'expression de la puissance consommée en courant continu, le produit UI intervenant dans l'expression de P est appelé puissance apparente du dipôle.

La puissance apparente s'exprime en volt-ampère (V.A).

Le facteur $\cos\varphi$ auquel la puissance moyenne est proportionnelle s'appelle **facteur de puissance**.

Pour un circuit RLC série, $\cos\varphi = \frac{R}{Z}$. Donc, ce facteur est toujours positif. Par suite, la puissance moyenne est positive, ce qui veut dire que le circuit RLC série se comporte dans l'ensemble comme un dipôle passif.

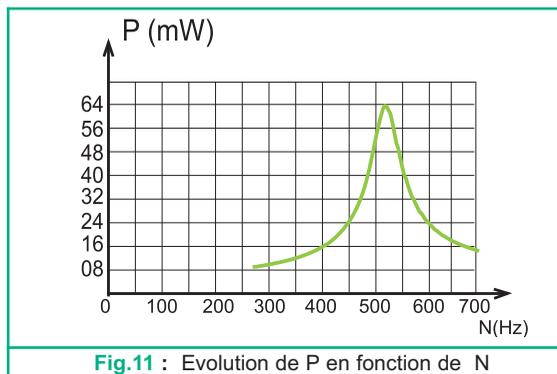
D'autre part, on a $U = Z.I$, d'où : **$P = R.I^2$**

Ainsi, on montre que la puissance active d'un circuit RLC série est due à sa résistance totale R : c'est une puissance consommée par effet Joule. En d'autres termes, la puissance moyenne dissipée dans le circuit sert à compenser l'amortissement : en moyenne, l'énergie transférée de l'excitateur à l'oscillateur sert, lorsque le régime oscillatoire est établi, à compenser les pertes par effet Joule.

6.3- RÉSONANCE DE PUISSANCE

La puissance moyenne ($P = RI^2$) d'un circuit RLC série est proportionnelle au carré de l'intensité efficace du courant oscillant dans le circuit. Il s'en suit une résonance de puissance à chaque fois qu'il y a résonance d'intensité (Fig.11).

A la résonance d'intensité, P est maximale, ce qui est en accord avec la condition ($\cos\varphi = 1$) établie précédemment.



6.4- TRANSFERT DE PUISSANCE MOYENNE

La puissance moyenne fournie par le GBF au circuit RLC série en régime forcé sinusoïdal est:

$$P = R \frac{U^2}{Z^2} = \frac{RU^2}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

Discutons cette relation dans les deux cas extrêmes d'amortissement.

- Si l'amortissement est important, lorsque ω tend vers zéro ou ω est très grand, la puissance transférée est quasiment nulle. Mais, au voisinage de ω_0 , P devient égale à U^2/R . Le transfert de puissance s'effectue alors quelle que soit la fréquence mais il reste faible. Par conséquent, l'amplitude des oscillations est faible. C'est ce qui justifie la résonance floue (Fig.12).
- Si l'amortissement est faible, le transfert de puissance est important. Par conséquent, l'amplitude des oscillations est élevée. C'est ce qui justifie la résonance aiguë (Fig.12).

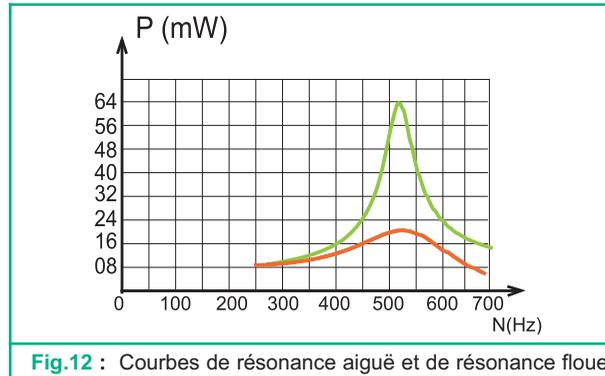


Fig.12 : Courbes de résonance aiguë et de résonance floue

6.5- IMPORTANCE DU FACTEUR DE PUISSANCE $\cos\varphi$

Dans toute installation électrique, la tension d'alimentation est imposée par le réseau de la distribution de la STEG. Tout appareil de l'installation est caractérisé par sa puissance nominale, la puissance moyenne en fonctionnement normal. En marche, il sera parcouru par un

courant d'intensité efficace : $I = \frac{P}{U \cos\varphi}$.

Le courant électrique débité provoque un échauffement par effet Joule des câbles de la ligne de transport d'électricité.

Par conséquent, la puissance est perdue et, en grande partie, la perte est à la charge de la STEG : c'est la perte en ligne.

Comment minimiser la perte en ligne ?

Si l'on désigne par P_o la puissance moyenne perdue par effet Joule dans la ligne d'alimentation de résistance R_o , on a : $P_o = R_o I^2$,

soit :

$$P_o = R_o \frac{P^2}{U^2 \cos^2 \varphi}$$

P et U étant imposées, pour minimiser P_o , il faut chercher à minimiser R_o et à augmenter $\cos\varphi$. Les possibilités de diminution de R_o sont limitées. En effet, l'opération demande l'augmentation du diamètre des câbles électriques, ce qui augmente leurs poids. Par conséquent, les lignes et leur infrastructure coûteront beaucoup plus cher.

Ainsi, la seule solution pratique pour rendre minimales les pertes par effet Joule est d'augmenter le facteur de puissance $\cos\varphi$. Pour ce, on exige qu'une installation électrique ait un facteur de puissance élevé ($\cos\varphi > 0,8$).

Conclusion

La puissance moyenne d'un circuit RLC série est dissipée par effet Joule. Cette dissipation se fait à n'importe quelle fréquence mais elle est d'autant plus importante que la résistance est plus grande.

A la résonance d'intensité, correspond une résonance de puissance :

la puissance moyenne de l'oscillateur RLC série est dans ces conditions la plus élevée.

L'essentiel

■ Comme en régime libre non amorti, les oscillations forcées d'un circuit RLC série sont sinusoïdales mais de fréquence imposée par l'excitateur.

■ La réponse d'un circuit RLC série à une tension excitatrice sinusoïdale de fréquence N est un courant électrique d'intensité sinusoïdale de valeur maximale I_m et de phase initiale φ dépendant de la fréquence des excitations et des grandeurs électriques R , L et C de l'oscillateur :

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R}$$

■ Selon le signe de $(L\omega - \frac{1}{C\omega})$ ou du déphasage $\Delta\varphi$ entre i et u , l'oscillateur électrique RLC série peut être inductif ou capacitif.

■ En régime forcé sinusoïdal, la valeur maximale de l'intensité du courant est d'autant plus élevée que l'amortissement est plus faible.

■ La résonance d'intensité est obtenue pour une fréquence N_e des excitations égale à la fréquence propre N_0 de l'oscillateur.

■ La résonance d'intensité d'un circuit RLC série peut être accompagnée d'une surtension aux bornes du condensateur, caractérisée par un quotient $Q > 1$ appelé dans ces conditions facteur de surtension :

$$Q = \frac{U_c}{U}$$

■ En régime sinusoïdal forcé, la puissance moyenne P d'un circuit RLC série est la valeur moyenne prise par sa puissance instantanée $p(t)$ durant une période :

$$P = UI\cos\varphi = RI^2$$

■ Comme la résonance d'intensité, la résonance de puissance est obtenue pour une fréquence des excitations égale à la fréquence propre de l'oscillateur.

■ Les pertes, par effet Joule, sont d'autant plus faibles que le facteur de puissance est plus grand.

Exercices

Exercice résolu

ÉNONCÉ

On associe en série un condensateur de capacité C , une bobine B d'inductance L et un résistor de résistance $R_0 = 81,5 \Omega$. L'ensemble est alimenté par un générateur de basse fréquence (GBF) délivrant à ses bornes une tension alternative sinusoïdale $u(t)$ de valeur maximale $U_m = 6 \text{ V}$ et de fréquence N réglable (Fig.1).

1°) a- Préciser parmi les points A et B du circuit celui auquel on doit relier la masse du GBF afin de visualiser simultanément la tension d'alimentation $u(t)$ et la tension u_{R_0} aux bornes du résistor, sur l'écran d'un oscilloscope bicourbe.

b- Reproduire le schéma de la figure 1 en y indiquant les branchements effectués à l'oscilloscope.

2°) Pour une valeur N_1 de la fréquence N du GBF, on obtient les oscillogrammes (1) et (2) de la figure 2 avec les réglages suivants:

- base de temps : $0,5 \text{ ms/div}$;
- voie utilisée pour visualiser $u(t)$: 2 V/div ;
- voie utilisée pour visualiser $u_{R_0}(t)$: 1 V/div .

a- Identifier parmi les oscillogrammes (1) et (2) celui représentant $u(t)$.

b- Déterminer graphiquement la fréquence N_1 et la valeur maximale I_m de l'intensité $i(t)$ du courant électrique oscillant dans le circuit RLC série.

c- Calculer l'impédance Z du circuit RLC série.

d- Déterminer graphiquement le déphasage entre $i(t)$ et $u(t)$.

En déduire que la bobine a une résistance interne non nulle que l'on calculera.

3°) Pour étudier le comportement de l'oscillateur à une autre fréquence N_2 du GBF, on visualise simultanément avec $u(t)$, la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.

a- Préciser le point du circuit auquel on doit relier la masse du GBF à cette fin.

b- Reproduire de nouveau le schéma de la figure 1 tout en y indiquant les nouveaux branchements effectués à l'oscilloscope.

c- En fermant le circuit, on obtient les oscillogrammes de la figure 3 avec une sensibilité horizontale de 1 ms/div et une même sensibilité de 2 V/div pour les deux voies Y_1 et Y_2 . Identifier l'oscillogramme représentant $u_C(t)$.

d- Déterminer graphiquement la fréquence de $u_C(t)$ ainsi que son déphasage par rapport à $u(t)$.

e- Montrer que l'oscillateur RLC série est en résonance d'intensité.

f- Calculer le facteur de surtension et préciser si sa valeur présente un danger tout en justifiant la réponse.

g- Calculer C et L .

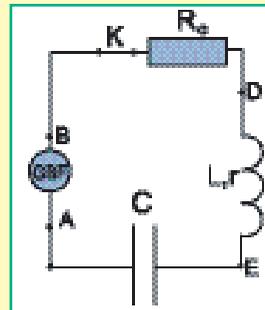


Fig.1

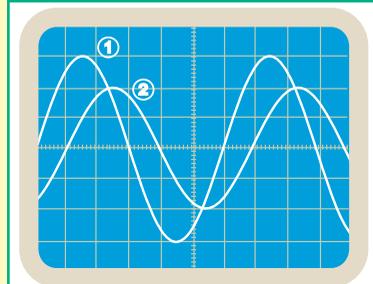


Fig.2

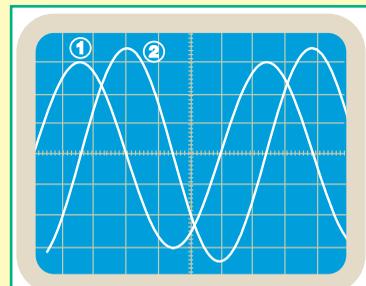


Fig.3

SOLUTION

1°) a - Afin de visualiser simultanément $u(t)$ et $u_{R_o}(t)$, il faut que la masse du GBF soit du côté du résistor de résistance R_o . Il faut alors la relier au point B.

b - Comme sur le schéma de la figure 4, le point A est à relier à l'entrée Y_1 (ou Y_2) afin de visualiser $u(t)$ tandis que le point D est à relier à l'entrée Y_2 (ou Y_1) pour visualiser $u_{R_o}(t)$.

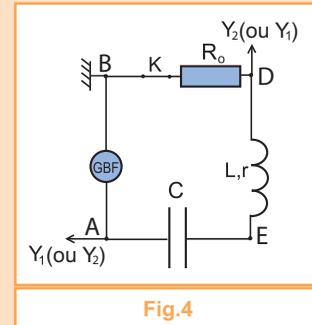


Fig.4

2°) a - $U_m = 6$ V et la voie utilisée pour visualiser $u(t)$ est de 2 V/div. Donc, l'oscillogramme (1) dont les crêtes sont distantes de 6 div est celui qui représente $u(t)$.

b - $u_{R_o}(t) = R_o \cdot i(t)$: étant proportionnelles l'une à l'autre, $i(t)$ et $u_{R_o}(t)$ évoluent au cours du temps avec la même fréquence.

Du fait que le décalage horaire entre les oscillogrammes (1) et (2) de la figure 2 est constant, on affirme que $u_{R_o}(t)$ évolue avec la même fréquence N_1 de $u(t)$.

$N_1 = \frac{1}{T_1}$. Or, T_1 s'étale sur 6 divisions et la sensibilité horizontale utilisée est de 0,5 ms/div.

Donc, $T_1 = 3$ ms, ce qui signifie : $N_1 \approx 333$ Hz.

On a : $u_{R_o}(t) = R_o \cdot i(t)$, ce qui signifie : $i(t) = \frac{u_{R_o}(t)}{R_o}$. D'autre part, en s'appuyant sur la forme sinusoïdale de l'oscillogramme (2) de la figure 2, on écrit : $u_{R_o}(t) = U_{Rom} \sin(2\pi N_1 t + \varphi)$, où φ est sa phase initiale. Donc, $i(t) = I_m \sin(2\pi N_1 t + \varphi)$, avec $I_m = \frac{U_{Rom}}{R_o}$.

2 div $\rightarrow U_{Rom}$ et 1 div $\rightarrow 1$ V. Donc, $U_{Rom} = 2$ V. D'où, avec $R_o = 81,5 \Omega$: $I_m = 24,5$ mA.

c - L'impédance Z du circuit RLC série s'écrit : $Z = \frac{U_m}{I_m}$.

A.N. : Avec $U_m = 6$ V et $I_m = 24,5$ mA, $Z = 244,9 \Omega \approx 245 \Omega$.

d - Soit $\Delta\varphi = \varphi_i - \varphi_u$, le déphasage entre $i(t)$ et $u(t)$ de phases initiales respectives φ_i et φ_u . φ_i étant égale à la phase initiale φ de $u_{R_o}(t)$, déterminer $\Delta\varphi$ revient à déterminer graphiquement le décalage horaire Δt entre les oscillogrammes (2) et (1) de la figure 2 représentant respectivement $u_{R_o}(t)$ et $u(t)$.

$|\Delta\varphi| \rightarrow \Delta t = \frac{T}{6}$ et π rad $\rightarrow \frac{T}{2}$. Donc, $|\Delta\varphi| = \frac{\pi}{3}$ rad.

Les maximums de $u_{R_o}(t)$ sont atteints à Δt après ceux de $u(t)$. Donc, $u_{R_o}(t)$ est en retard de

phase par rapport à $u(t)$, ce qui signifie $\Delta\varphi < 0$. Par suite, on a : $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{3}$ rad.

On sait que $\cos\varphi = \frac{R}{Z}$. Ceci équivaut : $R = Z \cdot \cos\varphi$. Avec $Z = 245 \Omega$ et $\cos\varphi = 0,5$ car

$\varphi = -\pi / 3$ rad, on a : $R = 122,5 \Omega$. Or, $R_0 = 81,5 \Omega$. Donc, $R > R_0$. Il en découle que la bobine a une résistance non nulle $r = R - R_0$.

A. N. : $r = 41 \Omega$.

3°) a - Pour visualiser simultanément la tension d'alimentation $u(t)$ et la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur, la masse du GBF doit être reliée au point A (Fig. 5).

b - Comme sur le schéma de la figure 5, le point B est à relier à l'entrée Y_1 (ou Y_2) afin de visualiser $u(t)$ tandis que le point E est à relier à l'entrée Y_2 (ou Y_1) pour visualiser $u_C(t)$.

c - L'oscillogramme (1) étant le seul d'amplitude égale à 6 V, il représente $u(t)$. Donc, c'est l'oscillogramme (2) qui représente $u_C(t)$.

d - Du fait que le décalage horaire entre les oscillogrammes (1) et (2) de la figure 3 est constant, on affirme que $u_C(t)$ évolue avec la même fréquence N_2 de $u(t)$.

En procédant comme on a fait pour répondre à la question 2.b, on obtient : $N_2 = 167 \text{ Hz}$.

Les maximums de la tension $u(t)$ sont atteints à $T/4$ avant ceux de $u_C(t)$, ce qui signifie que

$u_C(t)$ est en quadrature retard de phase par rapport à $u(t)$: $\varphi_{u_C} - \varphi_u = -\frac{\pi}{2}$ rad.

e - On a : $i = \frac{dq}{dt}$, d'où : $\varphi_i = \varphi_q + \frac{\pi}{2}$. D'autre part, $u_C = \frac{q}{C}$. Il s'en suit : $\varphi_{u_C} = \varphi_q$.

Donc, $\varphi_i = \varphi_{u_C} + \frac{\pi}{2}$. Or, $\varphi_{u_C} - \varphi_u = -\frac{\pi}{2}$ rad, Donc, $\varphi_u - (\varphi_i - \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ rad, d'où : $\varphi_u - \varphi_i = 0$.

Il s'agit alors d'une résonance d'intensité.

f - $Q = \frac{U_{Cm}}{U_m}$. En procédant comme on a fait pour déterminer graphiquement la valeur de

U_{Rom} dans la réponse à la question 2.c, on trouve : $U_{Cm} = 7 \text{ V}$. On a ainsi : $Q \approx 1,17C$.

Q étant très peu supérieur à l'unité du fait que U_{Cm} est très légèrement supérieure à U_m , on ne court aucun danger.

g - On est à la résonance d'intensité. Donc, $Q = \frac{1}{RC\omega_2}$, d'où : $C = \frac{1}{RQ\omega_2}$.

A. N. : Sachant que $\omega_2 = 2\pi N_2$ et avec $N_2 = 167 \text{ Hz}$, on trouve : $C = 6,68 \text{ nF}$.

D'autre part, la fréquence d'excitation est égale à la fréquence propre de l'oscillateur :

$N_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, d'où $L = \frac{1}{4\pi^2 N_2^2 C}$. A.N : $L = 137 \text{ mH}$

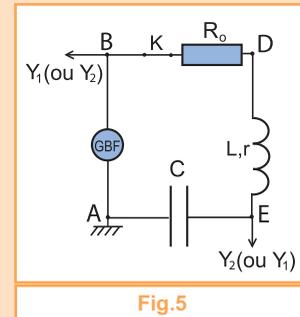


Fig.5

Exercices à résoudre

Tests rapides des acquis

1 Items "vrai ou faux"

Evaluer les propositions suivantes par vrai ou faux.

- 1°) Les oscillations d'un circuit RLC série auquel est appliquée une tension sinusoïdale sont libres.
 2°) La fréquence des oscillations forcées d'un circuit RLC série peut être égale à sa fréquence propre.
 3°) La résonance d'intensité est obtenue lorsque la tension aux bornes du circuit RLC série est en phase avec l'intensité du courant qui y circule.
 4°) La résonance d'intensité est obtenue lorsque l'impédance du circuit RLC série est maximale.
 5°) Le facteur de surtension d'un circuit RLC série augmente lorsque la résistance totale du circuit augmente.
 6°) La puissance moyenne consommée par le condensateur est nulle.
 7°) La résonance de puissance est elle même une résonance d'intensité.
 8°) Pour minimiser les pertes par effet Joule dans les lignes d'alimentation en électricité, on diminue le facteur de puissance.

2 Questions à Choix Multiples

Préciser pour chacune des questions suivantes, la (ou les) proposition(s) juste(s).

- I- Un circuit RLC série est en résonance d'intensité lorsque :
- a-son impédance est maximale;
 - b-la fréquence qui lui est imposée est égale à sa fréquence propre;
 - c-son impédance est égale à la résistance du résistor;
 - d-l'intensité du courant qui y circule et la tension qui lui est appliquée sont en phase.
- II- A la résonance d'intensité, l'intensité du courant i est :
- a-en quadrature avance de phase sur la tension aux bornes du condensateur ;
 - b-en quadrature retard de phase par rapport à la tension aux bornes de la bobine.
 - c-en phase avec la tension aux bornes du résistor.
 - d-en phase avec la tension aux bornes du circuit RLC série.
- III- Lors des oscillations forcées, un circuit RLC série a un caractère capacitif lorsque :
- a- $LC\omega^2 < 1$;
 - b-la tension aux bornes du condensateur est supérieure à celle aux bornes de la bobine en valeur maximale ;
 - c- l'intensité du courant qui y circule est en avance de phase sur la tension appliquée entre ses bornes.
- V- A la résonance d'intensité, une augmentation de la résistance du circuit RLC série entraîne:
- a- la diminution de la fréquence caractéristique de la résonance;
 - b- la diminution de la valeur maximale de l'amplitude de l'intensité du courant ;
 - c- l'augmentation de la valeur maximale de la puissance moyenne consommée par le circuit.
- VI- Le facteur de surtension Q d'un circuit RLC série s'écrit :
- a- $\frac{2\pi LN_0}{R}$;
 - b- $\frac{U_L}{U}$ quel que soit la fréquence N ;
 - c- $\frac{1}{R} \sqrt{\frac{C}{L}}$;
 - d- $\frac{U_C}{U}$ à la résonance d'intensité.

Exercices d'application

3 Les émetteurs produisent des oscillations électriques forcées dans les circuits d'accord des récepteurs radio. La recherche des stations émettrices sur ces derniers est un exemple de résonance d'intensité.

On désire capter une émission à la fréquence $N = 16233$ Hz. Quelle valeur doit-on donner à la capacité C du condensateur du circuit d'accord RLC série sachant que la bobine a une inductance $L = 10^{-4}$ H ?.

4 On monte en série un condensateur de capacité C et une bobine d'inductance L et de résistance r aux bornes d'un générateur BF délivrant une tension sinusoïdale u de pulsation ω variable:

$$u(t) = 30\sqrt{2} \sin \omega t$$

En fixant ω à 2000 rad.s^{-1} , les mesures fournissent : $I = 600 \text{ mA}$, $U_1 = 30 \text{ V}$ et $U_2 = 30 \text{ V}$.
 I : Valeur efficace de l'intensité i du courant circulant dans le circuit.

U_1 : Valeur efficace de la tension u_1 aux bornes de la bobine.

U_2 : Valeur efficace de la tension u_2 aux bornes du condensateur.

L'intensité i est de la forme : $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$.

1°) A l'aide de la construction de Fresnel, calculer φ , r , L et C .

2°) Comparer par le calcul de leur quotient, la pulsation d'alimentation ω et la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur RLC série et préciser, tout en justifiant la réponse, le sens dans lequel il faut faire varier ω pour avoir une résonance d'intensité.

5 Un circuit RLC série comprenant :

- Un condensateur de capacité $C = 20 \mu\text{F}$,
- un résistor de résistance $R = 20 \Omega$,
- une bobine d'inductance $L = 0,55 \text{ H}$ et de résistance interne $r = 12,5 \Omega$.

On applique aux bornes de ce circuit une tension sinusoïdale de fréquence variable :

$$u(t) = 100\sqrt{2} \sin 2\pi N t \text{ avec } N = 48 \text{ Hz}$$

1°) Donner, sans démonstration, l'expression de l'impédance Z en fonction de R , r , L et C .
La calculer.

2°) Donner l'expression de l'intensité efficace I en fonction de Z .

3°) Le circuit est équivalent à un résistor de résistance $(R + r)$.

a- Montrer que la valeur de N est égale à la fréquence propre N_0 du circuit. La calculer.

b- Quelles sont alors les valeurs de l'impédance Z_0 et de l'intensité I_0 obtenues pour $N = N_0$.

6 On considère un circuit comportant, en série, un résistor de résistance R , une bobine d'inductance L et un condensateur de capacité C . Ce circuit est alimenté par un générateur BF délivrant une tension sinusoïdale de valeur efficace U et de pulsation ω réglable. Un ampèremètre de résistance négligeable permet de mesurer l'intensité efficace I du courant dans le circuit.

1°) Pour une pulsation ω donnée, utiliser la construction de Fresnel pour exprimer l'impédance du circuit et le déphasage en fonction de ω , R , L et C .

2°) U étant constante, on fait varier ω et on relève l'intensité efficace I pour chaque valeur de ω .

a- Donner l'allure générale de la courbe représentant $I = f(\omega)$. Quel phénomène cette courbe met-elle en évidence ?

b- Soit ω_0 la valeur de la pulsation pour laquelle le phénomène précédent se produit. La pulsation ω_0 dépend-elle de R , L et C ?

Donner l'expression de ω_0 en fonction de deux de ces trois grandeurs.

c- Que deviennent l'impédance Z et le déphasage pour $\omega = \omega_0$?

7 Un dipôle RLC série constitué d'une bobine B d'inductance L et de résistance r et d'un condensateur de capacité $C = 0,5 \mu\text{F}$, est alimenté par un générateur délivrant une tension alternative sinusoïdale de fréquence N variable. La tension efficace U aux bornes du générateur est maintenue constante et égale à 2 V . Les valeurs de la fréquence N_0 de résonance d'intensité et de l'intensité efficace I_0 correspondante sont respectivement 2325 Hz et 130 mA . Déterminer :

1°) les caractéristiques de la bobine inductive,
2°) le facteur de surtension et la puissance moyenne maximale consommée par le circuit RLC série.

8 On établit une tension alternative sinusoïdale de pulsation ω entre les bornes M et N d'une portion de circuit comprenant un condensateur de capacité C et une bobine d'inductance L et de résistance interne r. L'intensité efficace étant $I = 0,20$ A, la mesure des tensions efficaces fournit les résultats suivants :

$U_{MN} = 120$ V, $U_{MP} = 160$ V et $U_{PN} = 56$ V. (P : point de connexion de la bobine au condensateur).

1°) Calculer les impédances de la bobine et du condensateur ainsi que la résistance r de la bobine.

2°) Calculer le déphasage de la tension u_{MN} par rapport à l'intensité i du courant.

3°) Sachant qu'un courant de pulsation $\omega_0 = 250$ rad.s⁻¹ parcourant le circuit serait en phase avec la tension u_{MN} , déterminer :

a- les valeurs de l'inductance et de la capacité,

b- la pulsation ω et la fréquence N correspondante,

c- la puissance moyenne consommée dans le circuit.

4°) Montrer que l'intensité efficace du courant reprendra la valeur $I = 0,20$ A pour une deuxième pulsation ω' que l'on calculera.

5°) Comparer les puissances moyennes consommées dans le circuit aux pulsations ω , ω_0 et ω' .

9 Un oscillateur RLC série comprenant un résistor de résistance $R = 50$ Ω , un condensateur de capacité $C = 1$ μ F et une bobine d'inductance L réglable et de résistance négligeable est alimenté par un générateur délivrant une tension sinusoïdale :

$$u(t) = 10\sqrt{2} \sin(100\pi t)$$

1°) Etablir l'équation différentielle régissant les oscillations du courant circulant dans le circuit RLC série.

2°) Sachant qu'en régime permanent, l'intensité du courant s'écrit $i(t) = I_m \sin(100\pi t + \varphi)$:

a-déterminer la valeur L_0 de l'inductance de la bobine donnant une résonance d'intensité,

b-montrer que si l'on ferme le circuit en maintenant L égale à L_0 , il se produit un phénomène de surtension aux bornes du condensateur.

2°) Sachant que la valeur de la tension de rupture, sérigraphiée sur le boîtier du condensateur utilisé, est $U_0 = 100$ V, déterminer la valeur de l'inductance L de la bobine à ne pas dépasser pour éviter tout risque de claquage du condensateur.

10 Un dipôle AB est constitué par l'association en série d'un résistor, d'un condensateur de capacité C et d'une bobine purement inductive d'inductance L.

On désigne par R la résistance totale du circuit. On applique aux bornes du dipôle AB une tension $u_{AB} = U_m \sin \omega t$ de valeur efficace U, constante mais de pulsation ω réglable. Un wattmètre mesure la puissance électrique moyenne P reçue par le dipôle.

1°) Démontrer que lorsque l'on règle $\omega = \omega_0$ pour obtenir les conditions de résonance d'intensité pour ce dipôle, on mesure une valeur maximale P_0 pour la puissance moyenne. Exprimer P_0 en fonction de U et de R.

En déduire l'expression de l'énergie électrique E_0 reçue par le dipôle pendant une période, en fonction de U, R et ω_0 .

2°) Dans les conditions de résonance, exprimer en fonction du temps l'énergie totale E_t emmagasinée dans le dipôle, sous forme magnétique E_L dans la bobine et sous forme électrique E_C dans le condensateur.

Montrer que E_t reste constante. Dans ces conditions, exprimer cette énergie totale en fonction de L, U et R. Que devient donc à chaque instant l'énergie électrique reçue par le dipôle ?

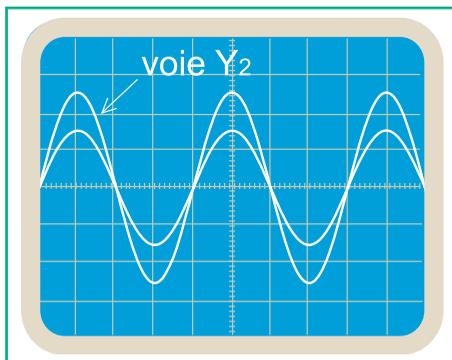
3°) Exprimer le rapport $\frac{E_t}{E_0}$ en fonction du facteur de surtension Q du circuit.

11 Un générateur G délivrant une tension alternative sinusoïdale de fréquence N réglable et de valeur efficace U alimente un circuit RLC série constitué d'un résistor de résistance $R = 300 \Omega$, d'un condensateur de capacité $C = 3 \mu\text{F}$ et d'une bobine d'inductance L et de résistance interne r .

On se propose de visualiser simultanément à l'oscilloscope, la tension $u(t)$ aux bornes du circuit (voie Y_1) et la tension $u_R(t)$ aux bornes du résistor (voie Y_2).

Pour une valeur N_0 de la fréquence N de la tension délivrée par G, on obtient les oscillogrammes de la figure ci-après avec :

- sensibilité verticale sur la voie Y_1 : $4\text{V} / \text{div}$.
- sensibilité verticale sur la voie Y_2 : $2\text{V} / \text{div}$.
- sensibilité horizontale : $1\text{ms} / \text{div}$.



a- Quel est le phénomène observé ?

b- Déterminer la valeur de l'inductance L et celle de la résistance r de la bobine.

◆ Exercices de synthèse

12 On dispose d'un condensateur sur lequel le fabricant fournit les indications suivantes :

Références	EFD-CPM13B
Capacité	1,2 MF
Tolérance	10%
Tension maximale	160 V

On se propose de faire une recherche de la valeur réelle de la capacité C . Pour ce, on réalise un circuit série constitué d'un GBF délivrant une tension sinusoïdale de valeur efficace $U = 2\text{V}$, d'un résistor de résistance $R = 10 \Omega$, d'une bobine d'inductance $L = 58\text{mH}$ et de résistance r et du condensateur à étudier. Puis, on y insère un voltmètre et un ampèremètre.

1°) Schématiser le montage à réaliser de telle sorte que l'on puisse :

- vérifier que la tension efficace à la sortie du GBF soit maintenue constante et égale à 2V ,
- mesurer l'intensité efficace du courant dans le circuit RLC série.

2°) On va rechercher la résonance d'intensité en faisant varier la fréquence de la tension délivrée par le GBF. Lors des mesures, on constate qu'à la fréquence $N = 610\text{Hz}$, l'intensité efficace prend sa valeur maximale $I = 96,7\text{mA}$.

a- Quelle est la valeur numérique de la fréquence propre du circuit ? justifier la réponse.

b- Déduire de cette fréquence, la valeur de la capacité C du condensateur. Quelle indication aurait dû porter le fabricant à la place de MF ?

c- La valeur obtenue par cette méthode de mesure est-elle dans le domaine de tolérance donné par le constructeur ?

13 Un circuit électrique comporte en série:

- un résistor de résistance $R = 40 \Omega$,
- un condensateur de capacité C ,
- une bobine d'inductance L et de résistance r .

L'ensemble est alimenté par un GBF délivrant une tension sinusoïdale de fréquence N réglable:

$$u(t) = 10\sqrt{2} \sin(2\pi Nt)$$

1°) Pour une fréquence N_0 , la valeur de la tension efficace aux bornes du résistor est $U_R = 9,6\text{V}$ et la tension instantanée aux bornes du condensateur est :

$$u_c(t) = U_c \sqrt{2} \sin(318\pi t - \frac{\pi}{2}) \text{ où } U_c = 36\text{V}.$$

a- Montrer que le circuit est en résonance d'intensité.

b- Déterminer :

- la valeur de l'intensité efficace I_0 du courant électrique circulant dans le circuit,
- les valeurs de C , L et r ,
- la valeur du coefficient de surtension Q du circuit.

c- Montrer que u et u_C vérifient à chaque instant la relation : $u_C^2 = -Q^2 u^2 + 2U_C^2$.

d- Etablir l'expression de l'énergie électrique totale en fonction de u et u_C et montrer qu'elle se conserve.

14 Un générateur basse fréquence (G.B.F.) délivrant une tension sinusoïdale de valeur efficace $U = 10$ V, est utilisé pour alimenter un résistor de résistance $R = 100 \Omega$, un condensateur de capacité $C = 0,5 \mu\text{F}$ et une bobine de résistance $r = 100 \Omega$ et d'inductance $L = 50$ mH, ces trois dipôles étant montés en série.

1°) Pour la fréquence $N_1 = 318$ Hz du G.B.F., calculer :

- a-** l'impédance Z_1 du circuit RLC série,
- b-** la valeur efficace I_1 de l'intensité du courant débité par le G.B.F.,
- c-** la puissance P_1 consommée par le circuit,
- d-** la phase φ_1 de la tension $u(t)$ délivrée par le générateur par rapport à l'intensité du courant qu'il débite. Préciser parmi ces deux grandeurs (tension ou intensité du courant) celle qui est en avance de phase sur l'autre.

En déduire le caractère (résistif, capacitif ou inductif) du circuit.

2°) Pour la fréquence N_1 , tracer à l'échelle le diagramme de Fresnel du circuit.

3°) On fixe la fréquence N à une valeur N_0 égale à la fréquence propre du circuit RLC série.

a- Que devient le diagramme de Fresnel tracé précédemment ?

b- En exploitant ce nouveau diagramme, calculer l'impédance Z_0 du circuit, la valeur efficace I_0 de l'intensité du courant débité par le G.B.F et la puissance P_0 consommée par le circuit.

15 On dispose des appareils et des composants suivants :

- un générateur de tension sinusoïdale de valeur efficace réglable de 0 à 10 V, de fréquence réglable de 5 à 5 kHz,
- un ampèremètre,
- deux voltmètres,
- une bobine d'inductance L et de résistance r ,
- un condensateur de capacité C ,
- une boîte de résistance réglable de 0 à 1,1 k Ω ,
- un oscilloscope bicourbe.

1°) Schématiser avec les éléments adéquats de la liste ci-dessus le montage permettant d'étudier la variation de l'intensité du courant dans un circuit RLC série soumis à une tension sinusoïdale de fréquence variable (l'oscilloscope sera utilisé au 3°).

2°) la mesure de l'intensité efficace dans le circuit en fonction de la fréquence permet de dresser le tableau suivant. La tension efficace U d'entrée est maintenue constante, égale à 5V pour tout l'exercice.

N(Hz)	100	200	300	400	500	600	700
I(mA)	1,6	3,4	5,7	8,9	15,1	27,6	47,0
N(Hz)	800	900	1000	1100	1200	1300	1400
I(mA)	31,5	20,5	14,6	11,7	9,8	8,5	7,6

a- Tracer la courbe $I = f(N)$.

Echelles :

- Sur l'axe des abscisses, 1cm représente 100 Hz.
- Sur l'axe des ordonnées, 1cm représente 2,5 mA.

b- Que représente la fréquence N_0 correspondant au maximum d'intensité ?

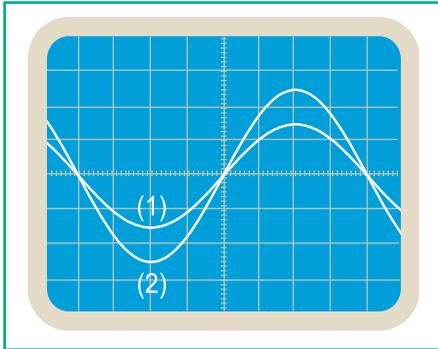
Donner sa valeur.

c- Quelle est la résistance totale du circuit ?

3°) a- Représenter sur le schéma du montage le branchement de l'oscilloscope pour visualiser la tension $u(t)$ délivrée par le générateur sur la voie A et les variations d'intensité du courant sur la voie B.

b- Lorsque $N = N_0$, on observe l'oscillogramme de la figure ci-dessous. Les réglages de l'oscilloscope sont :

- déviation verticale voie A : 2 V/div.
- déviation verticale voie B : 1 V/div.
- balayage horizontal : 0,2 ms / div.



Quelle est, parmi les courbes (1) et (2), celle qui correspond à celle enregistrée sur la voie A ?
En déduire la valeur de la résistance R réglable puis celle de la résistance r de la bobine.

c- La tension efficace U_C mesurée aux bornes du condensateur est alors maximale et vaut 21,5 V. Déterminer la valeur de C .

d- Calculer la valeur de l'inductance L .

Étude de texte

Le facteur de puissance

16 Le facteur de puissance est un paramètre qui rend compte de l'efficacité qu'a une installation électrique pour consommer de la puissance lorsqu'elle est en marche.

Un mauvais facteur de puissance va augmenter les pertes en ligne, gaspiller la capacité et réduire l'efficacité de l'infrastructure électrique de l'utilisateur.

La structure tarifaire des fournisseurs d'électricité comme la STEG est établie de façon à inciter les

usagers à maintenir constamment un facteur de puissance très élevé. Cela évite les variations de tension et les pertes d'énergie sur le réseau et, par conséquent, le surdimensionnement des installations. Si chacun améliore le facteur de puissance de sa propre installation électrique, il réduit les frais de puissance tout en prolongeant la durée de vie de ses équipements.

La puissance apparente que le réseau de la STEG fournit se décompose en une puissance active et une puissance réactive.

La puissance active assure le fonctionnement des équipements produisant de la chaleur (appareils d'éclairage, radiateurs, etc.), alors que la puissance réactive résulte de la création de champs magnétiques utiles au fonctionnement de divers équipements (moteurs, compresseurs, etc.).

L'une des façons de mieux gérer les coûts d'énergie, c'est de minimiser la puissance maximale en fonction des besoins simultanés des usagers en énergie électrique. En fait, la puissance maximale joue un rôle déterminant dans l'établissement de la puissance qui leur est facturée pour une période donnée.

L'une des solutions proposées aux industriels est de monter des condensateurs dans l'installation électrique de leur usine afin de réduire l'écart entre la puissance moyenne et la puissance apparente et d'améliorer ainsi leur facteur de puissance.

Questions

1°) Préciser les effets d'un mauvais facteur de puissance ?

2°) Dégager du texte les avantages du facteur de puissance élevé.

3°) Démontrer l'amélioration du facteur de puissance d'une installation électrique industrielle par l'insertion de condensateurs.

Fiche technique

Construction de Fresnel

Dans de nombreux problèmes de physique qui traitent des phénomènes périodiques, on est souvent amené à exprimer la somme y de deux ou plusieurs fonctions sinusoïdales isochrones $y_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$, $y_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$, ..., $y_n = a_n \sin(\omega t + \varphi_n)$. Sachant que leur somme est une fonction sinusoïdale de même période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, y peut se mettre sous la forme :

$y = a \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, où a est son amplitude et φ sa phase initiale. Pour déterminer a et φ , il est commode de recourir à une méthode graphique connue sous le nom de construction de Fresnel. Pour la réaliser, on procède comme suit :

A une fonction $y = a \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, on associe, un vecteur tournant \vec{OA} appelé vecteur de Fresnel (Fig.1) :

- de module égal à l'amplitude a de y ,
- d'origine O confondue avec le centre du cercle trigonométrique,
- tournant avec une vitesse angulaire égale à la pulsation ω , dans le sens trigonométrique choisi conventionnellement comme sens positif,
- faisant, à l'instant $t = 0$ avec l'axe (\vec{O}, i) un angle égal à la phase initiale φ .

A tout instant t , la projection orthogonale de \vec{OA} sur l'axe (O, j) est $y = a \sin(\omega t + \varphi)$ (Fig.2).

Le fait que les positions relatives des vecteurs de Fresnel associés à des fonctions isochrones ne soient pas modifiées au cours du temps permet de représenter chacun d'entre eux dans sa position à $t = 0$ (Fig.3) :

$$y_{k=1,2,\dots,n} = a_k \sin(\omega t + \varphi_k) \quad \mapsto \vec{OA}_k [a_k, \varphi_k].$$

$$y = y_1 + y_2 + \dots + y_n \quad \mapsto \vec{OA} = \vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \dots + \vec{OA}_n.$$

Or, $y = a \cdot \sin(\omega t + \varphi)$. Donc, on a $\vec{OA} [a, \varphi]$ (Fig.4).

Ainsi, on vient de réaliser un exemple de construction de Fresnel (Fig.4) avec laquelle on peut déterminer les expressions de l'amplitude a et de la phase initiale φ de y en fonction des amplitudes a_k et des phases initiales φ_k des fonctions sinusoïdales y_k dont elle est la somme.

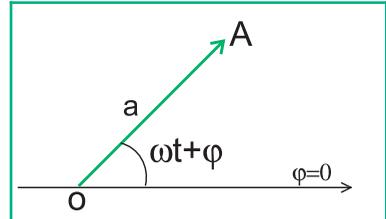


Fig.1 : Vecteur de Fresnel

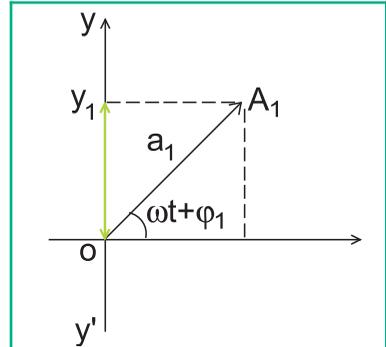


Fig.2 : Projection d'un vecteur de Fresnel sur l'axe $y'y$

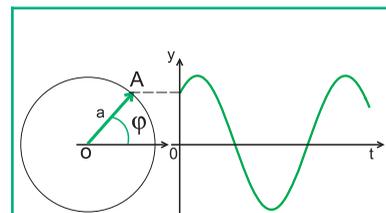


Fig.3 : Représentation d'un vecteur de Fresnel à $t = 0$.

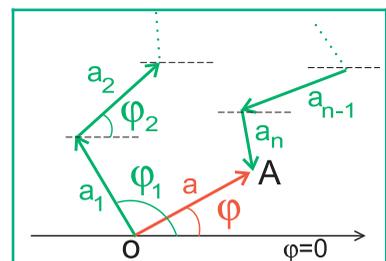
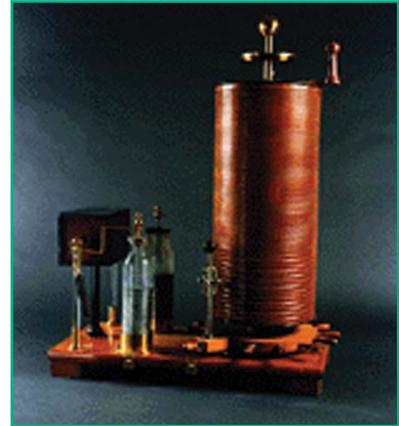


Fig.4 : Exemple de construction de Fresnel

En savoir plus

Générateur de courant haute fréquence

Etant inventé et construit vers 1895, l'appareil de la figure ci-contre permet, à partir d'une source de courant de haute tension fournie par une bobine spéciale connue sous le nom de bobine de Ruhmkorff (partie cylindrique située à la partie droite de la figure), de la transformer en courant de haute fréquence. Le principe est fondé sur la propriété de la décharge oscillante des condensateurs qui se compose d'une série de décharges, alternativement dans un sens, puis en sens contraire, avec des intensités qui décroissent rapidement. L'intervalle de temps qui sépare deux décharges successives est d'ailleurs extrêmement court. Une décharge



oscillante constitue donc un courant qui change de sens un grand nombre de fois par seconde. Ce phénomène est d'autant plus net qu'il se produit lorsque la décharge traverse des conducteurs métalliques, gros et courts. Il est dû à l'auto-induction du circuit de décharge. La période est d'autant plus grande que le circuit est plus enroulé sur lui-même, c'est-à-dire qu'il a une auto-induction plus considérable. Elle croît également avec la capacité du condensateur. Les courants de haute fréquence ont la propriété d'illuminer les tubes à vide (Crookes, Geissler) à distance, sans aucune liaison par fil. Les premières applications pratiques des courants, en haute tension, ont été réalisées dans le domaine médical. Nikola Tesla, physicien autrichien né en Dalmatie en 1857, s'aperçoit que les courants ainsi produits sont sans danger pour le corps humain qui peut aisément recevoir des effluves électriques même sous une intensité de deux ou trois ampères, en ne ressentant seulement qu'une sensation de chaleur. Les fréquences élevées sont sans action directe sur les fibres nerveuses et musculaires.

Le docteur et professeur Arsène d'Arsonval généralise l'emploi de ces courants dans le monde médical dès 1893. Il crée ainsi le service d'électrothérapie à la Salpêtrière et appelle cette nouvelle thérapeutique la d'arsonvalisation. Ces courants ont la propriété de produire une dilatation vasculaire générale abaissant la tension artérielle.

Les premiers appareils étaient munis du résonateur du docteur Oudin (c'est le cas de l'appareil présenté ci-dessus) : il s'agit d'un autotransformateur constitué par un solénoïde placé verticalement, dont l'extrémité se termine par une boule conductrice. La partie inférieure seule sert de circuit de décharge des armatures externes de deux condensateurs, reliés sur une longueur correspondant à quelques spires par l'intermédiaire d'un contact mobile ajustable. Selon son emplacement, il se produit par résonance électrique, un courant de haute fréquence dont les effets sont considérablement amplifiés.

Objectifs

- ◆ A l'aide d'un enregistrement graphique, reconnaître le régime d'oscillations libres (amorties ou non amorties) d'un pendule élastique.
- ◆ Distinguer les régimes pseudopériodique, apériodique et critique des oscillations amorties.
- ◆ Etablir l'équation différentielle des oscillations libres d'un pendule élastique.
- ◆ Mesurer la période des oscillations d'un pendule élastique.
- ◆ Calculer l'énergie mécanique d'un pendule élastique en régime libre.
- ◆ Expliquer la conservation de l'énergie mécanique d'un oscillateur non amorti.
- ◆ Expliquer la diminution d'amplitude des oscillations libres amorties d'un pendule élastique par la non conservation de son énergie mécanique.

Prérequis

SAVOIR

- ◆ Ecrire l'expression de l'énergie cinétique.
- ◆ Enumérer les facteurs dont dépend l'énergie potentielle élastique.
- ◆ Ecrire l'équation horaire d'un mouvement rectiligne sinusoïdal.
- ◆ Enoncer la loi de Hooke.

SAVOIR FAIRE

- ◆ Délimiter un système matériel.
- ◆ Distinguer les forces intérieures des forces extérieures d'un système.
- ◆ Reconnaître la période et la fréquence d'un mouvement périodique.
- ◆ Calculer la pulsation d'un mouvement rectiligne sinusoïdal.
- ◆ Appliquer la relation fondamentale de la dynamique à un solide en mouvement de translation.
- ◆ Ecrire la solution générale de toute équation différentielle de la forme

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0, \text{ où } k \text{ est une constante positive.}$$