Chapitre 4

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN
FONCTIONS EXPONENTIELLES

Pour commencer

Fonction Logarithme Népérien

- Définition
- Propriétés
- Etude et représentation graphique

Fonction exponentielle de base e

- Définition
- Propriétés
- Etude et représentation graphique
- Fonction $x \mapsto a^x$ avec $a > 0$

Avec l'ordinateur

Exercices et problèmes

Math culture

Pour commencer

Activité 1

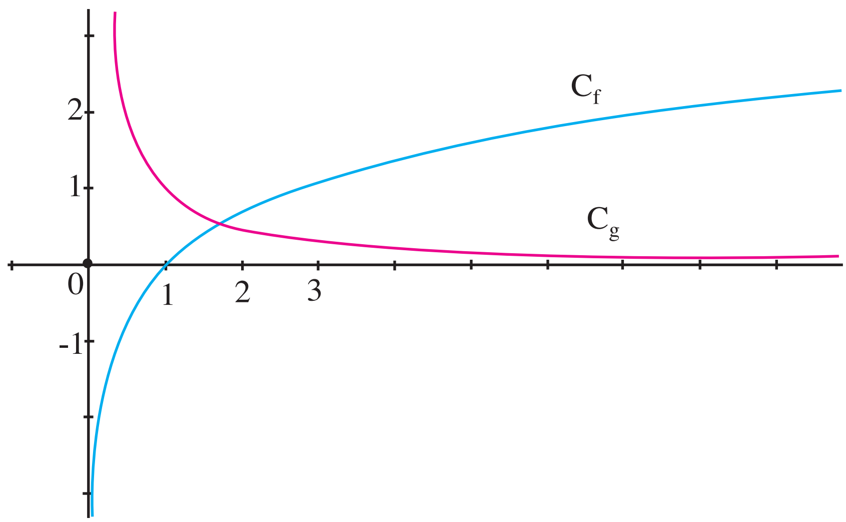
Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.

1- Vérifier que la fonction F, définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ est une primitive de f.

2- Donner la primitive G de f qui prend la valeur 2 en 1.

Activité 2

On donne dans le graphique suivant les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$.



1) Déterminer graphiquement selon les valeurs de x le signe de f(x) et de g(x).
2) Sachant que l'une des deux fonctions est une primitive de l'autre,
   Reconnaître parmi les deux affirmations suivantes, celle qui est vraie
   - f est une primitive de g.
   - g est une primitive de f.

Activité 3

Soient n un entier naturel non nul et f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x^n}$

1- Montrer que f possède une primitive sur $]0,+\infty[$.

2- Pour n supérieur ou égal à deux, déterminer la primitive de f qui s'annule en 1.

3- Peut-on faire de même pour n = 1?

A - FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

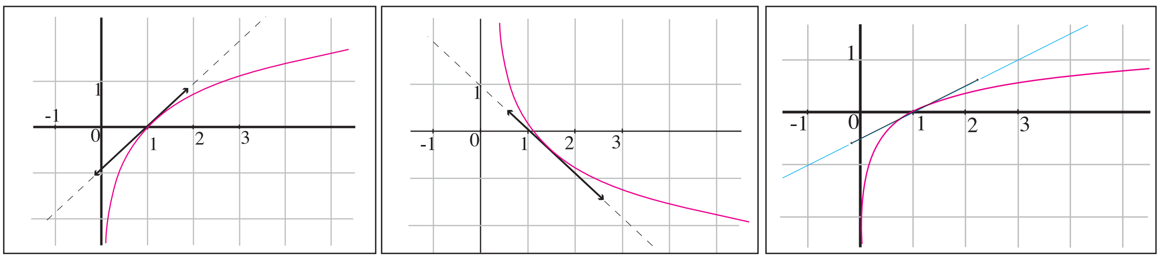
1) Définition

Activité 1

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.

Parmi les trois courbes ci-dessous, une seule représente une primitive F de f sur $]0,+\infty[$

1- Calculer f(1) et reconnaître la courbe de F.
2- Préciser F(1).
3- Préciser le sens de variation de F.
4- Montrer graphiquement qu'il existe un unique réel x_0 tel que $F(x_0) = 1$.



f est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$ donc elle admet une primitive sur cet intervalle.

La primitive de f qui s'annule en 1 est une nouvelle fonction appelée ***Fonction logarithme népérien***.

Définition

La fonction ***logarithme népérien,*** **notée ln(ou Log)**, est la primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

Remarque

On adoptera la notation courante **ln**.

$$\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \ln x$$

Conséquences immédiates:

1) $\ln(1)=0$
2) La fonction ln est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$

   et pour tout $x>0$ $\quad (\ln)'(x)=\frac{1}{x}$
3) La fonction ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

   et on a: $x_1 > x_2 > 0$ équivaut à $\ln(x_1) > \ln(x_2)$

Activité 2

1- Montrer que :
$\ln(x) < 0$ équivaut à $0 < x < 1$

$\ln(x) > 0$ équivaut à $x > 1$

2- Soient x et y deux réels strictement positifs, prouver que :
$\ln(x) = \ln(y)$ équivaut à $x = y$

Activité 3

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes

$f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x+2}$; $g : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)$; $h : x \mapsto \dfrac{1}{\ln\left(x^2+1\right)}$; $k : x \mapsto \ln(x+2) - \ln(x-2)$

Activité 4

1) Soient u et f les fonctions définies sur IR par $u(x) = x^2 - x + 3$ et $f(x) = \ln|u(x)|$

a- Vérifier que pour tout x de IR, $u(x) > 0$

b- Montrer que f est dérivable sur IR et que $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

2) Soient v et g les fonctions définies sur $]1,+\infty[$ par $v(x) = \dfrac{1}{x} - 1$ et $g(x) = \ln|v(x)|$

a- Prouver que pour tout x de $]1,+\infty[$ on a $v(x) < 0$.

b- Montrer que g est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que $g'(x) = \dfrac{v'(x)}{v(x)}$.

Théorème (admis)

Si une fonction u est dérivable sur un intervalle ouvert I et si pour tout x de I, $u(x) \neq 0$ alors la fonction $f : x \mapsto \ln|u(x)|$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée est définie par:
$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Remarque

Lorsque u est une fonction dérivable sur un intervalle I et qui ne s'annule pas sur I, une primitive sur I de la fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ est la fonction $x \mapsto \ln|u(x)|$.

Activité 5

1- Pour chacun des cas suivants, justifier que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I puis définir sa fonction dérivée f '.

a) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$; $I =]0,+\infty[$ b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{x+2}\right)$; $I =]-2,1[$

c) $f(x)=\ln\left|\frac{2}{x}+x\right|$; $I=]0,+\infty[$ d) $f(x)=\ln|\ln x|$; $I=]0,1[$

2- Déterminer une primitive de f sur l'intervalle I

a) $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$; $I=\mathbb{R}$ b) $f(x)=\frac{4x^3+2x}{(x^4+x^2)}$; $I=]0,+\infty[$

c) $f(x)=\frac{2+3\sqrt{x}}{x+x\sqrt{x}}$; $I=]0,+\infty[$ d) $f(x)=-\mathrm{tg}(x)$; $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

2) Propriété fondamentale

Activité 1

Soit a un réel strictement positif, on considère les fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\ln(ax)$ et $g(x)=\ln(x)+\ln(a)$.

a- Montrer que f et g sont deux primitives sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$.

b- Calculer f(1) et g(1) .

c- Déduire que : pour tout $x\in]0,+\infty[$ $f(x)=g(x)$

Propriété

Pour tous réels strictement positifs a et b on a : $\ln(a\,b)=\ln(a)+\ln(b)$

Activité 2

1) Soit a,b et c trois réels strictement positifs, montrer que :

ln(abc) = ln(a) + ln(b) + ln(c).

2) Soit a un nombre réel strictement positif, montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $\ln(a^n)=n\ln(a)$.

Activité 3

Parmi les réponses a, b et c retrouver celles qui sont correctes :

	a	b	c
ln(2)+ln(9) =	ln(11)	ln(18)	ln(6)+ln(3)
ln(27) =	3ln(3)	9ln(3)	ln(9)+ln(3)
ln(108)+ln(2)	ln(110)	ln(216)	3ln(6)
$\ln(24)+2\ln(5)=$	ln(600)	$2\ln(12)+\ln(25)$	ln(6)+2ln(10)
Pour $x>0$, $\ln x+\ln(\frac{1}{x})=$	$\ln(\frac{x+1}{x})$	0	1
Pour $x>0$, $\ln(x^2+6x+9)=$	$\ln(x^2)+6\ln(x)+\ln(9)$	$\ln(x+3)^2$	$2\ln(x+3)$
Pour $x>0$, $\ln(x)+\ln(x+1)=$	$\ln(x)\,.\,\ln(x+1)$	$\ln(x^2+x)$	$\ln(x^2)+\ln(x)$

Activité 4

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations:
 a) $\ln x + \ln(x+1) = \ln(6)$; b) $\ln(x-1) + \ln(2+x) = \ln(x^2)$
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations:
 a) $\ln(2x+2) > \ln(x+5)$; b) $\ln(x-2) \leq \ln(3x+6)$.

Activité 5

Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. Calculer $\ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right)$ et en déduire que $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$.
2. Calculer $\ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln b$ et en déduire que $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$.
3. Sachant que $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ prouver que $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$.

Propriétés

1- Pour tout réel on a : $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.

2- Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$ on a : $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

3- Pour tout réel $a > 0$ on a : $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

Activité 6

On sait que pour tout entier naturel n et pour tout réel a strictement positif on a :
l'égalité (E) : $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$

On suppose que n est un entier relatif inférieur ou égal à -1, en écrivant $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ vérifier que l'égalité (E) reste vraie.(on remarquera que $(-n) \in \mathbb{N}$).

Ainsi :

Pour tout $a > 0$ et tout $n \in \mathbb{Z}$: $\ln(a^n) = n\ln(a)$

Activité 7

1) On donne $\ln 2 \simeq 0,7$ et $\ln 3 \simeq 0,1$
 Donner une valeur approchée de chacun des réels A et B:
 $A = 4\ln(\frac{1}{2}) + 3\ln(2) + \ln(8)$; $B = \ln(\frac{4}{5}) - 3\ln(3) + \ln(10)$
2) Sans utiliser une calculatrice, comparer les réels x et y dans chacun des cas suivants :
 a) $x = 3\ln(2)$ et $y = 2\ln(3)$; b) $x = \ln(5) - \ln(2)$ et $y = \ln(12) - \ln(5)$

3) a, b et c sont trois réels strictement positifs tels que : $\ln a = \ln(\frac{b}{2}) = 3$ et $\ln c = -2$

Calculer le réel $D = \ln\left(\frac{16a^3c^2}{b^4}\right)$.

3) Etude de la fonction ln

Activité 1

1) Montre que si la fonction ln est majorée alors elle admet une limite finie ℓ lorsque x tend vers $+\infty$.

2) Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(2x)] = \ell$

3) En écrivant $\ln(2x) = \ln x + \ln 2$ déduire que l'hypothèse faite en 1) entraîne $\ln 2 = 0$.
Déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

4) En écrivant $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$, montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$

Théorème

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty$$

Activité 2

On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x} - \ln x$.

1- Vérifier que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $g'(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{2x}$.

2- Déterminer le sens de variation de g sur $]0,+\infty[$.

3- Montrer que pour tout $x > 0$ $\sqrt{x} > \ln x$ et en déduire que :

pour tout $x > 1$ on a : $0 \le \frac{\ln x}{x} \le \frac{1}{\sqrt{x}}$

4- En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ (n entier supérieur ou égal à 2).

5- a- Montrer que pour tout réel strictement positif x on a : $x\ln(x) = -\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

b- En déduire que $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x^n \ln x = 0$ (n entier supérieur ou égal à 2)

Théorème

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$; $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x^n \ln x = 0$

Activité 3 *(Autres limites)*

a) En considérant le nombre dérivé de la fonction ln en 1, montrer que $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$

b) En déduire que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

Théorème

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

Activité 4

On désigne par Γ la courbe représentative de la fonction ln dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1- a) Etudier le sens de variation de la fonction ln.
   b) Dresser le tableau de variation de la fonction ln.

2- Montrer que la fonction ln réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur IR

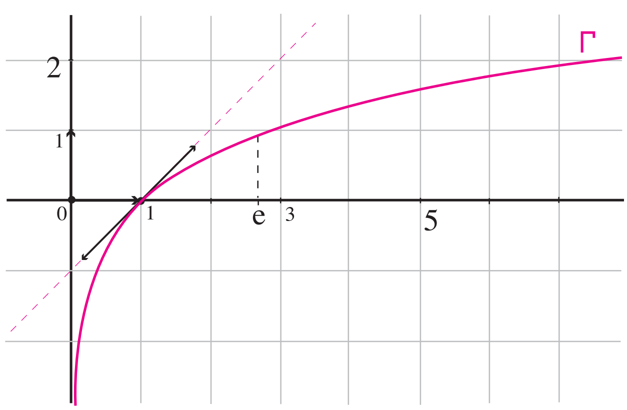
3- Montrer que l'équation $\ln x = 1$ admet dans $]0,+\infty[$ une solution unique qu'on notera e
   Vérifier que $e \in]2,7\ ;\ 2,8[$.

4- Donner une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 1.

5- Vérifier que Γ admet une asymptote verticale dont-on donnera une équation et qu'elle présente une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

6- Tracer la droite T et la courbe Γ.

Représentation graphique



$e \simeq 2,71828...$

Activité 5

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x-2-\ln x$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

2) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x)=\dfrac{x-1}{x}$
3) Dresser le tableau de variations de f.
4) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.
5) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions α et β telles que $\alpha\in]0,1\,;\,0,2[$ et $\beta\in]3,1\,;\,3,2[$
6) Tracer la courbe C.

Activité 6

1) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x)=x^2-8x+17$
a) Dresser le tableau de variation de g.
b) En déduire le signe de g(x).
2) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\ln(x^2-8x+17)$.
a) Montrer que f est dérivable sur IR et que $f'(x)=\dfrac{2(x-4)}{g(x)}$.
b) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
c) Dresser le tableau de variation de f.

On désigne par C_g et C_f les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

3) Montrer que la droite D d'équation x = 4 est un axe de symétrie pour la courbe C.
4) Tracer les courbes C_g et C_f.
5) Résoudre dans IR, graphiquement puis par le calcul : $f(x)=\ln 5$ et $f(x)\geq\ln 5$.

Activité 7

Soient f la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(x)=\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1- Montrer que la fonction f est impaire.
2- a) Calculer $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$
b) Interpréter graphiquement les résultats.
3- a) Montrer que f est dérivable sur $]-1,1[$ et que $f'(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$
b) Déterminer le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
c) Montrer que le point O est un point d'inflexion pour la courbe C. Donner une équation de la tangente D à la courbe C en ce point.
4- Tracer D et C.

Activité 8

Une étude a permis de modéliser les quantités d'un produit (en milliers d'unités) mis sur le marché par la fonction d'offre g définie sur [1,22] par : $g(x)=0,3x+1$ où x désigne le prix unitaire en dinars.

La fonction de demande des consommateurs est modélisée pour $x \in [1,22]$ par $q(x) = -0,4x + 5 + \ln(2x+6)$ ($q(x)$ *représente les quantités du produit (en milliers) que les consommateurs sont prêts à acheter pour un prix unitaire* x).

1) Montrer que la fonction $g - q$ est strictement croissante sur [1,22].
2) En déduire qu'il existe sur [1,22] un unique prix d'équilibre x_0 (*l'équilibre est établi lorsque l'offre est égale à la demande*)

   Quelle est alors la quantité d'équilibre q_0 ?
3) Tracer dans un même repère orthogonal les courbes représentatives de f et de g (On prendra : 0,5cm pour 1dinar en abscisses et 1cm pour un millier d'unités en ordonnées).
4) Retrouver graphiquement p_0 et q_0 .

B - FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE e

1) Définition

Activité 1

1°) Vérifier que pour tout entier relatif n on a: $\ln(e^n) = n$.

2°) Résoudre dans IR les équations suivantes:

a) $\ln x = 2$; b) $\ln(x+2) = -1$; c) $\ln(x^2+1) = 4$; d) $\ln x = n$ où $n \in \mathbb{Z}$

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \ln x$.

1- a) Vérifier que f admet une fonction réciproque définie sur IR, que l'on note exp

b) Montrer que : $\begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) = y \end{cases}$ si et seulement si $\begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ \exp(y) = x \end{cases}$

c) Calculer exp(0), exp(1) et exp(n) pour n entier relatif.

d) Montrer que pour tout réel x on a : $\exp(x) > 0$

e) Montrer que pour tout réel x on a : $\ln(\exp(x)) = x$

et que pour tout réel x strictement positif on a : $\exp(\ln x) = x$.

2- a) Montrer que g est continue et strictement croissante sur IR.

b) En déduire que pour tous réels x et y on a :

- $\exp(x) = \exp(y)$ si et seulement si $x = y$.
- $\exp(x) > \exp(y)$ si et seulement si $x > y$.

Définition:

On appelle fonction exponentielle de base e et on note **exp** la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

Notation:

Du fait que pour tout entier relatif n on a: $\ln(x) = n$ équivaut à $x = e^n$ on en déduit que : pour tout entier relatif n on a : $\exp(n) = e^n$. On convient d'étendre cette écriture à tout réel x et on écrit $\exp(x) = e^x$.

$$\text{Ainsi} \quad \begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\to]0;+\infty[\\ x &\mapsto e^x \end{aligned}$$

Conséquences:

1) $e^0 = 1$ et pour tout réel x , $e^x > 0$.

2) Les fonctions ln et exp étant des fonctions réciproques, on a :

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) = y \end{cases} \text{ si et seulement si } \begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ e^y = x \end{cases}$$

3) Pour tout réel x , $\ln(e^x) = x$.

4) Pour tout réel x strictement positif, $e^{\ln(x)} = x$.

5) La fonction exp est comme la fonction ln, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

6) Pour tous réels x et y on a : * $e^x = e^y$ si et seulement si $x = y$

* $e^x > e^y$ si et seulement si $x > y$

Activité 3

1- Calculer :

a) $e^{\ln 1} - e^{\ln 2}$; b) $\ln e^{-2} + 2\ln e$; c) $\dfrac{e^{\ln 2}}{e^{-\ln 3}}$; d) $\dfrac{e^{2\ln 3}}{e^{\ln 8}}$; e) $e^{3\ln 3} - 3\ln(e^7)$

2- Résoudre dans IR chacune des équations suivantes :

a) $e^{2x+1} = e^2$; b) $e^{-4x+1} = 3$; c) $\ln(x-2) = -\dfrac{1}{2}$; d) $e^{2x} = e^{-x}$

2) Propriétés

Activité 1

Soient a et b deux nombres réels

1- Vérifier que $\ln(e^a \times e^b) = a + b$.

2- En déduire que : $e^{a+b} = e^a \times e^b$, $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$ et $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$,

3- Montrer que pour tout entier relatif n on a: $e^{na} = \left(e^a\right)^n$

Propriétés

Pour tous réels a et b :

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $e^{na} = \left(e^a\right)^n$ $(n \in \mathbb{Z})$

Activité

1- a) Calculer : $A = e^{1+\ln 2}$; $B = e^{1-2\ln 3}$.

b) Simplifier les expressions suivantes :

$A = (e^x + e^{-x})^2$; $B = (e^{-x} - e^x)(e^{-x} + e^x)$; $C = \dfrac{e^{2x}}{e^{3x-2} \times e^{1-x}}$; $D = \ln\left(\dfrac{e^{2x}}{e^{x-1}} \times e^{-x}\right)$

2- Résoudre dans IR :

a) $2e^{2x} - 3e^x + 1 = 0$; b) $2e^{2x} \le 3e^x - 1$

3- Résoudre dans IR :

a) $e^{(x-4)(2x-1)} = e$; b) $e^x + e^{-x} = 2$; c) $2e^x(e^x - 6e^{-x}) = 5e^x$

4- Démontrer les égalités suivantes :

a) $e^x(1+e^x)=1+e^{2x}$; b) $\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{1}{1+e^{-x}}$; c) $\frac{1}{1+e^{-x}}=e^x-\frac{e^x}{1+e^{-x}}$

3) Etude de la fonction exp

Activité 1

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=e^x$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1- A partir du tableau de variation de la fonction ln vérifier que :
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$.

2- Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3- a) Montrer que f est dérivable en 0 et que f '(0) = 1.

En déduire que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

b) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à la courbe C au point d'abscisse nulle.

4- a) A partir de la courbe de la fonction ln, que peut-on conjecturer pour la branche infinie de C au voisinage de $+\infty$?

b) Soit u la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $u(x)=\frac{x}{\ln x}$

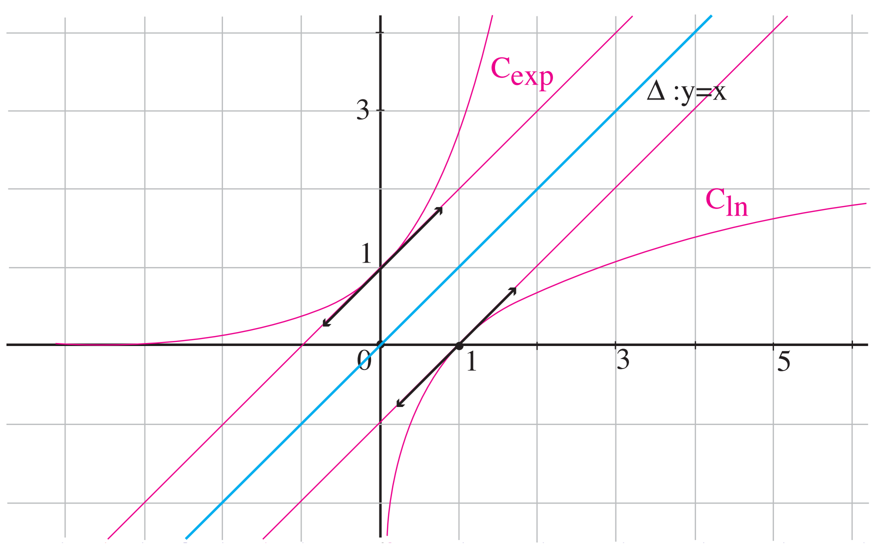
Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} u(e^x)$

c) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

.Théorème

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

Représentation graphique :



Activité 2

1- Soit u la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $u(x) = x\ln x$

a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} u(e^x)$

b) En déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$.

2- Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que pour tout réel strictement positif x on a : $\ln\left(\dfrac{e^x}{x^n}\right) = x - n\ln x$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - n\dfrac{\ln x}{x}\right)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - n\ln x)$.

c) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$.

d) Vérifier que $(-x)^n e^{-x} = (-1)^n\dfrac{x^n}{e^x}$

En déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.

Théorème

- $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$
- Pour tout entier naturel n non nul on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

Activité 3

1- Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{2x} + e^x - 1)$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{2x}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-x})$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3e^x$

2- Calculer:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{xe^x}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x} + e^{-x}\right)$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-3x}$; f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{e^x-1}$; g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+3}{e^x}$; h) $\lim\limits_{x\to0^+} xe^{\frac{1}{x}}$

Activité 4

1- Soit h la fonction définie sur IR par $h(x) = (\ln\circ\exp)(x)$

Calculer de deux manières différentes h'(x) et en déduire que

Pour tout x de IR, $(\exp)'(x) = \exp(x)$

2- Soit g la fonction définie sur IR par $g : x \mapsto e^{-x^2+3x+1}$

Montrer que la fonction g est dérivable sur IR et que $g'(x) = (-2x+3)e^{-x^2+3x+1}$.

3- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de IR

Montrer que la fonction $(\exp\circ u)$ est dérivable sur I et que $(\exp\circ u)'(x) = u'(x).e^{u(x)}$

Théorème

- La fonction exponentielle est dérivable sur IR et est égale à sa fonction dérivée.
  $(\exp)' = \exp$
- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de IR

La fonction $(\exp \circ u)$ est dérivable sur I et pour tout x de I on a : $(\exp \circ u)'(x) = u'(x).e^{u(x)}$

Remarque

Lorsque u est une fonction dérivable sur un intervalle I, une primitive sur I de la fonction : $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ est la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$.

Activité 5

1- Pour chacun des cas suivants, justifier que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I puis définir sa fonction dérivée f '.

a) $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$; $I = IR$ b) $f(x) = e^{\frac{1}{x+2}}$; $I =]-\infty, -2[$

c) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$; $I =]0, +\infty[$ d) $f(x) = e^{\sqrt{x^3}}$; $I =]0, +\infty[$

2- Déterminer une primitive de f sur l'intervalle I

a) $f(x) = 2x\,e^{x^2-1}$; $I = \mathbb{R}$ b) $f(x) = \left(4x^3 + 2x\right)e^{x^4+x^2}$; $I = IR$

c) $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}}$; $I =]1, +\infty[$ d) $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x+1}}}{(x+1)^2}$; $I =]-1, +\infty[$

Activité 6

On considère la fonction g définie sur IR par $g(x) = x^2 - 2x$

1- a) Dresser le tableau de variation de g .

b) Tracer la parabole (P) représentant la fonction g .

2- Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = e^{x^2-2x}$

a) Montrer que f est continue et dérivable sur IR.

b) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3- a) Montrer que pour $x \in IR \setminus \{0, 2\}$ on a $\dfrac{f(x)}{x} = (x-2)\dfrac{e^{x^2-2x}}{x^2-2x}$

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ interpréter graphiquement les résultats.

c) Tracer la courbe (C) de f dans le même repère (P).

Activité 7

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x^2 e^x$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1- Calculer la limite de f en $-\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

2- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.
3- Etudier les variations de f.
4- Tracer la courbe C.

Activité 8

Soit f la fonction définie sur IR par

$$\begin{cases} f(x) = e^{\frac{x-1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1- Etudier la continuité de f à droite et à gauche en 0.

2- a) Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a : $\frac{e^{\frac{x-1}{x}}}{x} = \frac{(1-\frac{1}{x})e^{1-\frac{1}{x}}}{x-1}$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-\frac{1}{x})$. En déduire que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0) = 0$.

3- Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.
4- Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1.
5- a) Montrer que f est dérivable et strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $[0,+\infty[$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

6- Tracer la tangente T et la courbe C.

Activité 9

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$ .On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit g la fonction définie sur IR par g (x) = $e^x - x - 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g sur R. En déduire le signe de g.
2. Justifier que pour tout x, ($e^x - x$) est strictement positif.

Partie B

1. a. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b. Interpréter graphiquement tes résultats précédents.
2. a. Calculer $f'(x)$.
   b. Étudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variations.
3. a. Déterminer une équation de la tangente (T) la courbe (C) au point d'abscisse 0
   b. À l'aide de la partie A, étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).
4. Tracer la droite (T) les asymptotes et la courbe (C).

Fonction $x \mapsto a^x$ (avec $a > 0$)

Activité 1

Un capital de 8000 DT placé durant n années, a une valeur acquise modélisée par la fonction C définie par $C(n) = 8000.(1{,}055)^n$.

a- Déterminer la valeur acquise après 5 ans.

b- Montrer que pour tout entier naturel n on a $C(n) = 8000.e^{n\ln(1{,}055)}$

Définition

Soit a un réel strictement positif.
On appelle fonction exponentielle de base a, la fonction $x \mapsto e^{x\ln a}$ définie sur IR et qu'on note $x \mapsto a^x$

Remarques

- Si a = 1, alors pour tout x de IR $1^x = 1$
- Lorsque a = e, on retrouve la fonction exp.
- Pour tout réel strictement positif a et pour tout réel x, le réel a^x est strictement positif.
- Pour tout réel strictement positif a et pour tout réel x, $\ln(a^x) = x\ln a$

Activité 2

Résoudre dans IR:

a) $2^x = e^{x-1}$; b) $e^{-x} = 5^{2x}$; c) $3^{x^2+4x} = \dfrac{1}{27}$; d) $3^x = 2^{x-1}$

e) $5^{x+2} = 4^{1-x}$; f) $\left|2^{x^2} - 8\right| = 8$; g) $3^x - e^{x+1} > 0$

Activité 3

Soit $a \in IR_+^*$ et x et y deux nombres réels quelconques.

1- Montrer que $a^x \times a^y = a^{x+y}$

2- En déduire que: $a^{-y} = \dfrac{1}{a^y}$ et $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

3- Vérifier que pour tout entier relatif n on a $a^{nx} = \left(a^x\right)^n$.

Propriétés

Soit $a > 0$, pour tous réels x et y on a :

$$a^{x+y} = a^x \times a^y \quad ; \quad a^{-y} = \frac{1}{a^y} \quad ; \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \quad ; \quad a^{nx} = \left(a^x\right)^n \ (n \in \mathbb{Z})$$

Activité 4

1- a) Résoudre dans IR l'équation $2x^2 - 5x + 3 = 0$

b) En déduire les solutions de l'équation $2e^{2x} - 5e^x + 3 = 0$.

2- Résoudre dans IR les équations : a) $5^{2x} + 5^x - 4 = 0$; b) $4^x - 2^x + 6 = 0$

3- Simplifier les écritures suivantes :

$\dfrac{3^{n+2} \times 3^{2n}}{3^{n+3}}$; b) $\dfrac{(2\times 3)^n}{\left(2^{n-1}\right)^2}$; c) $\dfrac{4^n \times 2^{n+1}}{3^n \times 2^{3n+1}}$

Etude des fonctions du type $x \mapsto a^x$

Activité 1

Soient a un nombre réel strictement positif différent de 1 et f la fonction définie sur IR par $f(x) = a^x$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1- Montrer que la fonction f est continue et dérivable sur IR et que $f'(x) = \ln a.(a^x)$

2- On suppose que $a \in \left]0,1\right[$

a- Vérifier que f est strictement décroissante sur IR.

b- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x$ puis dresser le tableau de variations de f.

c- Donner une équation de la tangente à C au point d'abscisse nulle.

d- Tracer une allure de la courbe C

3- On suppose que $a \in \left]1,+\infty\right[$

a- Vérifier que f est strictement croissante sur IR.

b- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x$ puis dresser le tableau de variations de f.

c- Donner une équation de la tangente à C au point d'abscisse nulle.

d- Tracer une allure de la courbe C.

4- Le plan étant muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, vérifier que les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto a^x$ et $x \mapsto \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Théorèmes

- Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1.
  La fonction f définie sur IR par $f(x) = a^x$ est dérivable sur IR et $f'(x) = \ln a.(a^x)$
- Si $a \in \left]0,1\right[$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$

  Si $a \in \left]1,+\infty\right[$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$

Activité 2

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=2^x$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1- a) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

b) Vérifier que la courbe C admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote dont-on donnera une équation cartésienne.

c) Montrer que la courbe C admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

2- Vérifier que $f'(0)=\ln 2$

Donner une équation de la tangente T à C au point d'abscisse nulle.

4- Tracer la droite T et la courbe C.

Activité 3

Soit g la fonction définie sur IR par $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1- a) Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

b) Montrer que $\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=-\infty$, interpréter graphiquement le résultat

2- a) Montrer que g réalise une bijection de IR sur $]0,+\infty[$; soit g^{-1} sa fonction réciproque.

b) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $g^{-1}(x)=-\frac{\ln x}{\ln 3}$,

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $\left(g^{-1}\right)'(x)$

3- Tracer les courbes représentatives de g et g^{-1} dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Activité 4

De 2000 à 2007 on a suivi l'évolution de deux populations A et B de deux espèces animales. Ces populations sont données respectivement par : $f(t)=10\times1,2^t$ et $g(t)=40\times0,9^t$

f(t) et g(t) sont exprimées en milliers d'individus et t = 0 à la fin de l'an 2000.

1- Etudier le sens de variation de chacune des fonctions f et g sur $[0,7]$.

2- Dresser les tableaux de variation de f et de g.

3- Représenter graphiquement dans le même repère orthonormé les courbes des fonctions f et g.

4- a- Vérifier graphiquement que la population A dépasse la population B vers la fin de l'an 2004.

b- Montrer que f(t) = g(t) pour $t=\frac{\ln 4}{\ln 4-\ln 3}$. En déduire que la population A dépasse la population B en septembre 2004.

I- On se propose d'élaborer sous un tableur (tel que Excel), une feuille de calcul qui nous permet ce calculer la valeur acquise d'un capital placé Cp durant n années sur un taux de t% cette valeur acquise est obtenue par : $Cp(1+\frac{t}{100})^{n}$.

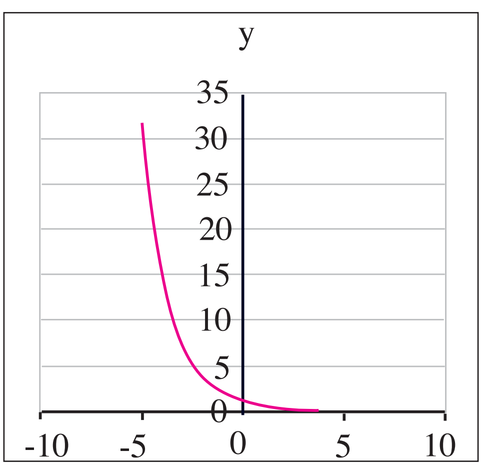
Etape 1 : Donner un nom à chaque cellule de données.
Définir les variables *i* et *aire*
* Sélectionner la cellule B1
Dans le menu : 'Insertion' sélectionner la commande 'nom' puis 'définir'.
Taper la lettre : Cp ; puis valider
* Sélectionner la cellule B2
Dans le menu : 'Insertion' sélectionner la commande 'nom' puis 'définir'.
Taper : t ; puis valider
* Sélectionner la cellule B3
Dans le menu : 'Insertion' sélectionner la commande 'nom' puis 'définir'.
Taper : n ; puis valider

Etape 2 : Recopier le tableau suivant

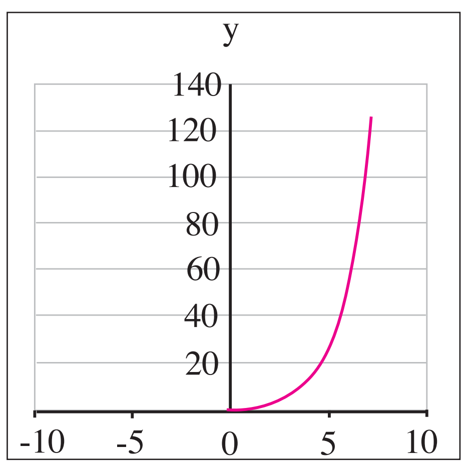
Capital placé (Dt)	100
Taux (%)	4
Nombre d'années	2
Valeur acquise (Dt)	=(Cp*(1+t/100)^n)

Etape 3 : Saisir de différentes valeurs du capital, du taux ou du nombre d'années.

II- En revenant à la rubrique *avec l'ordinateur du chapitre étude de fonctions*, représenter des exemples de fonctions du type $x \mapsto a^{x}$ où a est un réel strictement positif différent de 1.
On obtient les courbes suivantes pour a = 0,5 et pour a = 2



f = Exp(x * Log(0,5))



f = Exp(x * Log(2))

Reprendre le même travail avec d'autres valeurs de a.

Exercices et problèmes

Logarithme népérien

1- Indiquer les bonnes réponses parmi les réponses a, b, c et d.

	a	b	c	d
$\ln 2 + \ln 3 =$	$\ln 5$	$\ln 6$	$\ln 12 - \ln 2$	$\dfrac{\ln 12}{\ln 2}$
$3.\ln 2 =$	$\ln 6$	$2.\ln 3$	$\ln 8$	$2 \ln 4$
$\ln 4 + 3.\ln 2 - \ln 16 =$	$\ln 2$	$6.\ln 2 - \ln 32$	$\ln 32 - \ln 16$	$\dfrac{\ln 32}{\ln 16}$

2- Ecrire en somme de logarithmes :

a) $\ln\left(\dfrac{3\times 7^2}{24}\right)$; b) $\ln\left(\dfrac{10\,000}{81}\right)$; c) $\ln\left(\dfrac{2a^3\times b^2}{25}\right)$ où a et b dans $]0,+\infty[$

d) $\ln\left(3(x-2)^2\right)$ où $x\in\,]2,+\infty[$; e) $\ln\left(x^2(x-3)\right)$ où $x\in\,]3,+\infty[$

3- Ecrire à l'aide d'un seul logarithme :

a) $\ln\dfrac{2}{3}+\ln\dfrac{3}{2}+\ln 2$; b) $2\ln 2+\ln 3-\ln 5$; c) $3\ln 10-\ln 0{,}02+5\ln 2$

4- Préciser l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes puis l'exprimer à l'aide d'un seul logarithme :

a) $f : x\mapsto \ln x+\ln(x-1)$; b) $g : x\mapsto \ln(3-x)+\ln(3+x)$

c) $h : x\mapsto 2\ln(x^2-1)-3\ln(x+1)$; d) $k : x\mapsto 2\ln(5-x)+\ln 7-\ln x$

5- Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+\ln x\right)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((1-x)\ln x\right)$; a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-(\ln x)^2\right)$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-\ln x}{x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(x-2+\ln x\right)$; f) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\ln x\right)$; g) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2\ln x+1}{x}\right)$; h) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}+\ln x\right)$

6- Calculer les limites de chacune des fonctions suivantes aux bornes de son ensemble de définition D :

a) $f : x\mapsto 2x^2-\ln x$ $D=\,]0,+\infty[$; b) $f : x\mapsto -(\ln x)^2+2\ln x-2$ $D=\,]0,+\infty[$

c) $f : x\mapsto 2x\ln x-x$ $D=\,]0,+\infty[$; d) $f : x\mapsto \dfrac{2x-\ln x}{x}$ $D=\,]0,+\infty[$

e) $f : x\mapsto \dfrac{2x+1}{\ln x}$ $D=\,]1,+\infty[$; g) $f : x\mapsto \dfrac{3x\ln x+2}{x^2}$ $D=\,]0,+\infty[$

7- Résoudre dans IR

a) $2\ln x=\ln 3$; b) $\ln(2x^2)=0$; c) $\ln(x+2)=2\ln x$; d) $\ln x=-4$

e) $\ln(x-4)=\ln(2x-1)$; f) $2\ln x-\ln(x+1)=2\ln 2$; g) $(\ln x)(1+\ln x)=0$

8- a) le plan P étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, tracer la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \ln x$.
b) En déduire la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto -\ln x + 2$ puis celle de la fonction $h : x \mapsto \ln(x-2)+1$.

9- On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = -x + 1 + \ln x$
C désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.
1- a) Calculer la limite de f à droite en 0 ; donner alors l'équation de l'asymptote verticale de la courbe C.
b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+x$ et interpréter graphiquement le résultat.
2- Dresser le tableau de variation de f
3- Tracer la courbe C.

10- Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x^2(2\ln x - 1) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$
Soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
1- a) Etudier la continuité de f à droite en 0.
b) Vérifier que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0) = 0$.
c) Calculer la limite de f en $+\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, interpréter graphiquement le résultat.
d) Dresser le tableau de variation de f.
2- Déterminer l'intersection de la courbe c avec l'axe des abscisses.
3- Tracer la courbe C.

11- On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{\ln x + 1}$; On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
a) Justifier que f est définie sur $]0,+\infty[\setminus \{e^{-1}\}$
b) Calculer les limites de f à droite et à gauche en $\frac{1}{e}$. Interpréter graphiquement le résultat.
c) Vérifier que la courbe C admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont-on déterminera la direction.
d) Dresser le tableau de variation de f.
e) Tracer la courbe C.

12- Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{2\ln x}{x}$
On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
1- Déterminer les limites de f à droite en 0 et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.
2- Dresser le tableau de variation de f.
3- Montrer que la courbe C et la droite D d'équation y = 1 ont un point commun A dont on donnera les coordonnées.
4- Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point A.
5- Tracer D et T et la courbe C.

13- Soit f la fonction définie sur $]0,15]$ par $f(x)=3+2\ln x-(\ln x)^2$

On désigne par c sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat.

b) Démontrer que f est dérivable sur $]0,15]$ et vérifier que f' a le même signe que $1-\ln x$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2- Déterminer les points d'intersection de la courbe C avec l'axe des abscisses.

3- Tracer la courbe C.

4- La fonction f est la fonction bénéfice d'une production de x milliers d'objets. (f(x) est exprimé en milliers de dinars).

5- a) Déterminer la plage de production qui permet de réaliser un profit.(On donnera les bornes de l'intervalle en valeur approchée à 0,01 près).

c) Donner une valeur arrondie entière de la quantitéx_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.

Fonctions exponentielles

14- Indiquer les bonnes réponses parmi les réponses a, b, c et d.

	a	b	c	d
$\dfrac{(e^2)^3}{e^{-1}}=$	e^6	e^7	e^8	e^9
$\dfrac{e^4\times e^{-2}}{e}=$	e^5	e	$\dfrac{1}{e^{-1}}$	e^{-1}
$\dfrac{(2e)^3\times e^3}{5}=$	$\dfrac{2^3e^9}{5}$	$\dfrac{2^3e^6}{5^3}$	$\dfrac{2^3e^6}{5}$	$\dfrac{1}{5(2e^2)^{-3}}$

15- Résoudre dans IR

a) $e^x(e^x-1)=0$; b) $(e^x-2)(2e^x+4)=0$; c) $e^{-2x+3}=1$

d) $\dfrac{2e^x+1}{e^x-1}=3$; e) $e^{-x}=e^{\frac{x}{2}}$; f) $2e^{-0,5+7}=1$; g) $e^{0,1x-2}=0$

16-

1- a) Résoudre dans IR l'équation $x^2-4x-5=0$

b) En déduire la résolution dans IR des équations :

- $(\ln x)^2-4\ln x-5=0$; • $e^x-4=5e^{-x}$

2- a) Résoudre dans IR l'équation $x^2-10x+9=0$ puis $(\ln x)^4-10(\ln x)^2+9=0$

b) En déduire les solutions de l'équation : $(\ln x)^4-10(\ln x)^2+9=0$

17- Résoudre dans IR

a) $e^{2x}-4e^x=0$; b) $e^{2x}-2e^x+1=0$; c) $2e^{2x}+e^x=\ln 0,1$

d) $1-e^x>0$; e) $3-2e^{-x}\geq 0$; f) $e^{-x+4}\leq 10^{-2}$.

18- Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3e^x$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$; c) $\lim\limits_{x\to0^+} x^4 \ln x$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^4}$

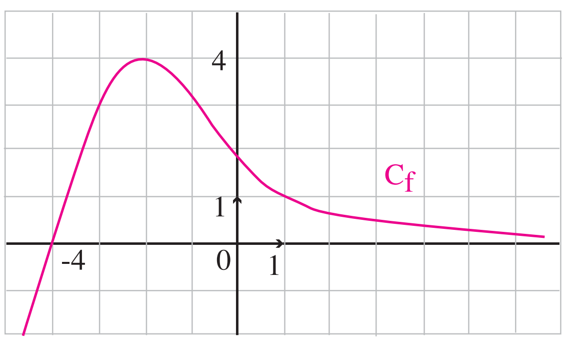
e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{e^x}$; f) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln x}{e^x}$; g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2^x}$; h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{(0,1)^x}$

19- Déterminer dans chacun des cas suivants les limites de f aux bornes de son ensemble de définition puis dresser son tableau de variations et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

a) $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$ $D = IR^*$; b) $f : x \mapsto xe^x$ $D = IR$

c) $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x + x}$ $D = [0,+\infty[$; d) $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{1+x}$ $D =]-\infty,,-1[\cup]-1,+\infty[$

20- Soit la fonction définie sur IR dont une représentation graphique est la suivante :



1- a) Déterminer graphiquement les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) En déduire les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction $g : x \mapsto \exp(f(x))$

2- a) Résoudre graphiquement $f(x) = 0$; puis $f(x) \geq 0$.

b) En déduire les solutions de $\exp(f(x)) = 1$, puis $\exp(f(x)) \geq 1$

3- Dresser le tableau de variation de f puis celui de g.

21- Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1}$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; interpréter graphiquement les résultats.

2- Justifier que f est dérivable sur IR et calculer f '(x).

3- Dresser le tableau de variation de f.

4- Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse nulle.

5- Tracer la droite T et la courbe C.

6- Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on déterminera
On notera g sa fonction réciproque.

7- Tracer dans le même repère, la courbe représentative de la fonction g.

8- Expliciter g(x) pour x appartenant à J.

22- f est la fonction définie sur IR par : $f(x) = 2e^x - 2 - xe^x$

On désigne par c sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

a- Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b- Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
c- Donner une équation de la droite D asymptote à la courbe C en $-\infty$
d- Etudier la position relative de C et D.
e- Montrer que l'équation f(x) = 0 admet dans IR deux solutions dont l'une appartient à l'intervalle $[1,5\ ;\ 1,6]$.
f- Tracer C et D.

23- Résoudre dans $]0,+\infty[$ chacune des équations suivantes :

a) $\left(1+\frac{t}{10}\right)^3 = 125$; b) $12 = 17(1-x)^6$; c) $48(1+x)^{12} = 187$

24- Déterminer le plus petit entier n vérifiant :

a) $0,6^n \leq 10^{-3}$; b) $2,02^n \geq 500$; c) $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0.01$

25- a) x étant un taux annuel, vérifier que son taux mensuel équivalent x'est tel que

$(1+x')^{12} = 1+x$ c'est à dire $1+x' = (1+x)^{\frac{1}{12}}$

b) Calculer la valeur acquise par un capital de 2000 DT placé à 7% annuel durant
- six ans
- six ans et demi
- six ans et huit mois

c) Déterminer le temps de placement, au mois près pour un capital de 2500 DT, placé au taux annuel de 4,5%, ayant acquis la valeur de 3161,5 DT
d) Calculer le taux mensuel équivalent à un taux annuel de 8,5%
e) calculer le taux journalier équivalent à un taux annuel de 21% (une année étant de 365 jours).

26- Le bureau d'étude d'une société de grande distribution a établi une relation donnant la superficie y (en m^2) de ses magasins en fonction du nombre x de clients (en milliers par jour) :
$\ln y = 0,09x + 7,1$

1- a- Déterminer y en fonction de x sous la forme $y = k.a^x$, où k est un réel dont-on donnera une valeur arrondie à la centaine.
b- calculer la superficie d'un magasin pour une clientèle de 7 milliers.
2- Déterminer à partir de quel nombre de clients la superficie est supérieure à $2000m^2$.(on donnera une valeur approchée par défaut à 0,1 millier près.

27- a- La population d'un ville est passée en 5 ans de 20000 habitants à 29000 habitants . calculer le taux annuel de croissance de la population
b- Déterminer à 0,1 millier près la population de cette ville après 10 ans en supposant qu'elle garde le même taux de croissance.

28- a- Un arbre, planté alors que sa taille mesurait 20cm, atteint 2m de hauteur au bout de 5 ans. Calculer le pourcentage moyen annuel d'augmentation de la hauteur de l'arbre.

Problèmes

29 - La fonction f est définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x+1)$$

1- a- Calculer la limite de f en -1. Interpréter graphiquement le résultat.

b- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\dfrac{(x+1)}{x} = 0$; calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2- a- Calculer f'(x) et étudier le sens de variation de f.

b- Dresser le tableau des variations de f. Préciser la valeur exacte du maximum de f.

3- Nommer sur la figure précédente les points O,I et J du repère et ajouter les asymptotes éventuelles à la courbe.

4- a- Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $\alpha < 0 < \beta$ et $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

b- Donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de α et de β.

c- En déduire le signe de f(x) sur $]-1,+\infty[$

5- Soit g la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$$

a- Calculer g'(x)

b- En déduire l'expression de la primitive de f s'annulant pour x=0.

30- Une entreprise fabrique un produit en quantité x exprimée en milliers de tonnes.

Le coût total de fabrication est donné par $C_t(x) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{9}{2}\ln(x+1)$ pour $x \in [0,5]$

Les coûts sont exprimés en millions de dinars.

A- On considère la fonction f définie sur [0,5] par $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{9x}{x+1} - 9\ln(x+1)$.

1- Vérifier que : $f'(x) = \dfrac{x(x-2)(x+4)}{(x+1)^2}$ pour tout x de [0,5].

2- Dresser le tableau de variation de f sur [0,5].

3- Montrer que l'équation f(x) = 0 admet dans]0,5] une seule solution c .

4- Déterminer un encadrement à 10^{-3} près de c.

5- Dresser le tableau de signe de la fonction f sur [0,5].

B- La fonction coût moyen C_m est définie sur]0,5] par $C_m(x) = \dfrac{C_t(x)}{x} = \dfrac{x}{4} + \dfrac{9}{2}.\dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

1- Calculer $C'_m(x)$ et vérifier que l'on peut écrire $C'_m(x) = \dfrac{f(x)}{2x^2}$.

2- Etudier alors le sens de variation de C_m puis dresser son tableau de variation sur]0,5].

3- Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimal, exprimé en dinars par tonnes ? Déterminer ce coût.

31- **Partie A**

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par g (x) = x – 5 + 5lnx.

1- Etudier le sens de variation de g (ne pas étudier les limites).

2- a) Montrer que l'équation g(x) = 0 a une solution unique dans l'intervalle [1 ; 7]. On note α cette solution.
b) Déterminer la valeur décimale arrondie au centième de α.
3- Etudier le signe de g(x), pour x appartenant à $\left]0,+\infty\right[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{(x-5)\ln x}{x}$.

1- Vérifier que l'on peut écrire : $f(x)=\dfrac{1}{x}(x-5)\ln x=\ln x-\dfrac{5\ln x}{x}$

a- Déterminer la limite de f en 0. Interprétez graphiquement ce résultat.
b- Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2- a- Soit f' la fonction dérivée de f . Calculer f' (x).
b- Montrer que f'(x) et g(x) ont le même signe.
c- Dresser le tableau de variation de la fonction f.

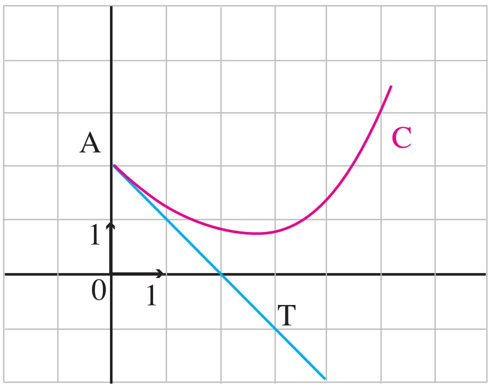
3- On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

a- Soit A le point de la courbe (C) d'abscisse 1.
Donner une équation de la droite D, tangente en A à la courbe (C).
Déterminer les coordonnées du point d'intersection de D et de l'axe des ordonnées.
b- Tracer D et (C) (Unités graphiques : 2cm).

32- Le but du problème est d'étudier le coût marginal et le coût total de production d'un produit dans une entreprise.

Partie A

La courbe (C), ci-contre, est la représentation graphique d'une fonction h définie sur [0 ; +∞[.



Le point A a pour coordonnées (0 ; 2).
La droite (T) est tangente à la courbe (C) au point A.

1. Préciser h(0).
Déterminer à l'aide d'une lecture graphique le nombre dérivé h'(0).
Justifier la réponse.

2. La fonction h, définie sur [0 ; +∞[est de la forme :
$h(x) = ax^2 + bx + c + 2\ln(x + 1)$ où a, b et c sont des nombres réels.
On note h' la dérivée de la fonction h, exprimer h'(x) en fonction de a et b.

3. On donne $h'(3)=\dfrac{1}{2}$. En utilisant ce résultat et les résultats de la question 1., déterminer chacune des valeurs a, b et c.

Partie B

Soit f la fonction définie sur I = [0 ; 5] par :

$f(x)=\frac{x^2}{2}-3x+2+2\ln(x+1)$.

1. a) Calculer la dérivée f ’ de la fonction f.

b) Montrer que pour tout x de l’intervalle I : $f'(x)=\frac{x^2-2x-1}{x+1}$

c) Etudier le signe de la fonction f ’ sur l’intervalle I.
d) En déduire les variations de f sur [0 ; 5].
2. Soit g la fonction définie sur I par : g(x) = (x + 1)ln(x + 1) – x.
a) Calculer la dérivée de la fonction g.
b) En déduire une primitive F de la fonction f sur I.
c) Calculer la valeur exacte, puis la valeur approchée à 10^{-3} près, de la différence F(5) – F(0).

Partie C

Sur l’intervalle [0 ; 5], la fonction f de la partie précédente représente le coût marginal de production d’un liquide conditionné en flacons d’un litre, en fonction de la quantité produite.
On rappelle que le coût marginal de production est assimilé à la dérivée du coût total.
x représente le volume en milliers de litres, x variant sur l’intervalle [0 ; 5].
f(x) représente le coût marginal en milliers de dinars.
1. Quel est le coût marginal, en dinars, du 3000^e litre produit ?
2. Pour quelle quantité produite le coût marginal est-il minimum ? (Donner la valeur au litre près.)
3. Les coûts fixes sont de 1000 dinars.
a) Montrer, en utilisant le résultat de la partie B, question 2. b), que le coût total est donné par l’expression définie sur [0 ; 5] par : $C(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{2}x^2+2(x+1)\ln(x+1)+1$.
b) Calculer C(5) – C(0) à un dinar près et interpréter en termes de coût cette différence.
Comparer ce résultat à celui trouvé à la partie B, 2. c) et expliquer cette réponse.

33- **<u>Partie I</u> :**

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x^2-3,2-8\ln x$

1- Déterminer la limite de la fonction f en 0.

On peut écrire $f(x)=x^2\left(1-\frac{3,2}{x^2}-\frac{8\ln x}{x^2}\right)$. Déterminer la limite de f en $+\infty$

2- a) Étudier les variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$

b) Montrer que l'équation f(x) =0 possède une solution unique α dans [3, 4], puis déterminer une valeur approchée par excès de α à 10^{-1} près.
Dans la suite du problème, on utilisera cette valeur dans les calculs.

c) En déduire le signe de f(x) sur [1, 6].

<u>Partie II</u> : Une application économique

Une entreprise fabrique un solvant pour peinture. x désigne le nombre de m^3 de solvant produit chaque jour ; x $\in$[1, 6]. Le coût total de production de ces x mètres cubes, en milliers de dinars est : $C_t(x)=\frac{x^2}{4}+2,8+2\ln x$.

On cherche à déterminer le prix de vente pour que l'entreprise fasse des bénéfices.

A. <u>Étude de la fonction coût total C_t :</u>

1- Étudier les variations de C_t sur [1, 6].

2- a) Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$C_t(x)$ à 10^{-1} près											

b) Tracer dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ la représentation graphique (C) de la fonction C_t (unités graphiques : 2cm pour 1 m^3 et 1cm pour 1 millier de dinars)

B. Étude de la fonction coût moyen C_m :

Pour une production journalière de x mètres cubes, le coût moyen de production en milliers de dinars de 1 m^3 est : $C_m(x) = \dfrac{C_t(x)}{x}$

1- Montrer que $C_m(x) = \dfrac{x^2 + 11,2 + 8\ln x}{4x}$.

2- Démontrer que, pour tout réel x de [1, 6], $C'_m(x) = \dfrac{f(x)}{4x^2}$. (f étant la fonction définie dans la partie I).

3- a. Étudier les variations de la fonction C_m sur [1, 6].
b. Quel est le coût minimum de production de $1m^3$ de solvant ? Pour quelle production ?
c. Comment faut-il choisir le prix de vente de $1m^3$ de solvant pour que l'entreprise puisse faire des bénéfices ?

34- Une entreprise fabrique des objets à l'aide d'une machine à emboutir. On désigne par x, en centaines, le nombre d'objets fabriqués et l'on sait que le coût, exprimé en milliers de dinars, d'utilisation de cette machine en fonction de x est exprimé par : $f(x) = \dfrac{3}{4}x + e^{-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}}$

1- Etudier le sens de variation de f sur $[0,+\infty[$ puis dresser son tableau de variation.

2- Donner une valeur arrondie entière du nombre d'objets qu'il faut produire pour que le coût soit minimal.

3- Un objet fabriqué par cette machine est vendu 8 Dt. Prouver que le bénéfice, en milliers de dinars, en fonction de x est donné par : $g(x) = \dfrac{1}{20}x - e^{-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}}$

4- Dresser le tableau de variation de g sur $[0,+\infty[$.

5- a) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α et que $3,13 < \alpha < 3,14$
b) En déduire le nombre minimal d'objets à fabriquer afin que l'entreprise réalise un bénéfice.

35- **A-** On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = x + 3 + e^{-x+2}$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (on prendra pour unité graphique 1cm).

1- Calculer la limite de f en $+\infty$

2- Montrer que la droite D : y = x + 3 est asymptote à C.

3- Dresser le tableau de variation de f sur $[0,+\infty[$.

4- a) Tracer la courbe C et la droite D.
b) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation (E) : f(x) = 8.

c) Justifier que dans l'intervalle $[2,6]$, l'équation (E) admet une solution unique α dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

B- Une entreprise industrielle produit chaque jour x centaines d'objets ($1 \le x \le 20$). Le coût de fabrication de x centaines d'objets est modélisé par f(x) exprimé en milliers de dinars.

1- Calculer le coût de fabrication de 600 objets, 1000 objets, 1200 objets arrondi au dinar.

2- Quelle quantité d'objets doit-on fabrique pour que le coût de fabrication soit le plus proche possible de 8000DT ?

3- Montrer que le coût de fabrication est minimal lorsque l'entreprise fabrique une quantité q_0 d'objets. Donner une valeur de q_0.

Quel est alors le coût, en dinars, de fabrication d'un objet ?

36- On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = x + 2\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ et on note c sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2cm).

1- Justifier que $f(x) = x + 2 - \dfrac{4}{e^x + 1}$ puis calculer la limite de f en $+\infty$.

2- Montrer que la droite d :y = x + 2 est asymptote à C en $+\infty$.
Etudier la position de C par rapport à D.

3- On désigne par M le point de C d'abscisse x et n le point de D de même abscisse x.
La distance entre les points M et N est alors le nombre $MN = \dfrac{4}{e^x + 1}$.
Résoudre l'inéquation $MN < 10^{-1}$.

4- Calculer f '(x) puis dresser le tableau de variation de f sur $[0,+\infty[$.

5- Démontrer que l'équation f(x) = 1 admet dans l'intervalle $[0,1]$ une solution unique x_0 dont on donnera un encadrement à 10^{-1} près.

6- Donner une équation cartésienne de la tangente T à C au point d'abscisse nulle.

7- Tracer D, T et la partie de la courbe C correspondant aux points dont l'abscisse appartient à l'intervalle $[0,4]$.

8- Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

a) déterminer une primitive de g sur $[0,+\infty[$.

b) Vérifier que pour tout x de $[0,+\infty[$ on a $\dfrac{1}{e^x + 1} = 1 - g(x)$.

c) en déduire une primitive de f sur $[0,+\infty[$

Math culture

John Napier (1550 ; 1617)

A la fin du XVIe et au début du XVIIe siècle, l'astronomie se développe considérablement. L'étude du mouvement des planètes conduit à de longs et pénibles calculs. Les banquiers sont aussi confrontés à des calculs fastidieux car ils calculent les intérêts dans une économie occidentale dopée par l'exploitation des terres découvertes. Il n'est pas étonnant que les mathématiciens cherchent alors les méthodes simplificatrices de calcul, L'idée est simple : remplacer des multiplications par des additions, mais la réalisation est difficile. C'est l'écossais John Napier qui inventa un algorithme par lequel une addition remplaçait une multiplication. Un fait est remarquable, du temps de Napier, On ne connaît ni les limites ni les dérivées, et Neper n'a donc pas inventé la *fonction logarithme.*

Le premier à s'intéresser de façon sérieuse au nombre e est le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707 ; 1783). C'est à lui que nous devons le nom de ce nombre. En 1748, Euler explique que :

e = 1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + ...

Par cette formule, il obtient une estimation de e avec 18 décimales exactes.

Les premières décimales du nombre e sont :e=2,718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627724076630353547594571382178525166427 4…

Les applications du nombre e sont variées. Nous retrouvons la fonction exponentielle en économie (calculs des intérêts versés de façon continue), en biologie (mesure de la multiplication des cellules vivant dans un organisme), en sciences physiques …

Voici un extrait du "Théorème du perroquet" de Denis Guedj qui donne une représentation concrète du nombre e :

« Suppose qu'il y a un an tu aies amassé une épargne qui nous permettra de payer notre voyage pour Manaus. Soit E, cette épargne. Tu l'as placé en attendant. Ton banquier t'a proposé un taux d'intérêt surprenant : 100 % ! Ne rigole pas, ça s'est vu. Rêve ! Calcule ! Au bout d'un an, tu aurais eu E + E = 2E. Tu aurais doublé ton épargne. Si au lieu de toucher les intérêts à la fin de l'année, tu les avais touchés tous les six mois et que tu les aies replacés, au bout d'un an ça t'aurait fait $E(1+\frac{1}{2})^2$.

Calcule Tu aurais plus que doublé ton épargne tu aurais 2,25E. Si au lieu de toucher les intérêts tous les six mois, tu les avais touchés tous les trimestres et que tu les aies replacés, au bout de l'année, ça t'aurait fait $E(1+\frac{1}{4})^4$. Calcule ! Tu aurais gagné encore plus : 2,441E. Si tu les avais touchés tous les mois et que tu les aies replacés, ça t'aurait fait $E(1+\frac{1}{12})^{12}$.

Calcule ! 2, 596E. Encore plus ! Puis, tous les jours : $E(1+\frac{1}{365})^{365}$. Encore plus toutes les secondes, encore plus. Et puis, tous les riens du tout, « en continu ». Tu n'en peux plus, tu t'envoles, tu planes, tu te dis que c'est Byzance, que ton épargne va doubler, qu'il va quadrupler, décupler, centupler, millionupler, milliardupler, [...] Tes intérêts composés, ils ont beau se décomposer, eh bien, à l'arrivée, tu n'a même pas le triple de ton épargne, ni même 2,9 fois plus, ni même 2,8 fois plus, ni même 2,75 fois plus, ni même 2,72 fois plus... Tu as seulement 2, 71 828 1828 !! ... fois plus. Mon pauvre, après toute cette richesse, te voilà seulement e fois moins pauvre qu'au départ ! ».