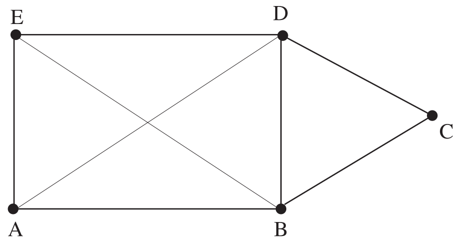
Chapitre 10

LES GRAPHES

Activité 1 **QCM.**

Soit le graphe G ci-dessous



G

Une seule des réponses proposées est exacte.

	a	b	c
Q_1. L'ordre de G est….	6	5	8
Q_2. Le sommet C est…	isolé	de degré 2	Adjacent au sommet A
Q_3. La somme des degrés des sommets de G est égale à…	10	12	16
Q_4. Le graphe G est ….	Complet.	Connexe.	Non connexe.
Q_5. A-B-C-D-B	n'est pas une chaîne de G.	est une chaîne de G.	Est un cycle de G.
Q_6. E-D-C-D-E est ….	une chaîne de longueur 5.	N'est pas une chaîne	une chaîne fermée.

Activité 2

Dire, en justifiant, si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

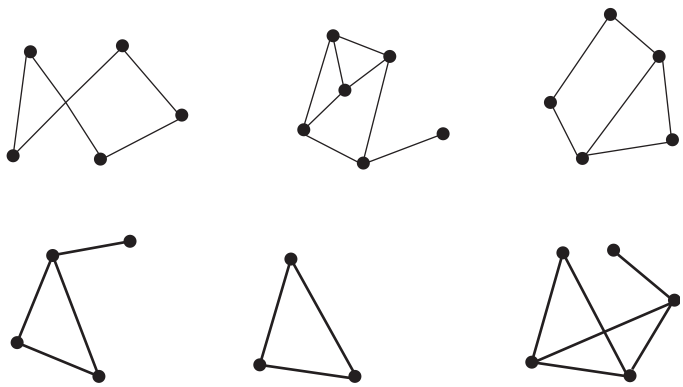
A_1 : Un sous graphe d'un graphe complet est complet.
A_2 : Un graphe non complet admet un sous graphe complet.
A_3 : Un sous graphe d'un graphe connexe est connexe.
A_4 : Le nombre de sommets d'un graphe est égal au nombre de ses arêtes.
A_5 : La somme des degrés des sommets d'un graphe est paire.
A_6 : Un graphe peut avoir un seul sommet de degré impair.

I- Revoir:

1) Chaîne eulérienne – Cycle eulérien:

Activité 1

Dire, en justifiant, si chacun des graphes suivants admet une chaîne eulérienne ou un cycle eulérien et donner, dans l'affirmative, un exemple de telle chaîne ou de tel cycle.



Théorème d'Euler (admis).

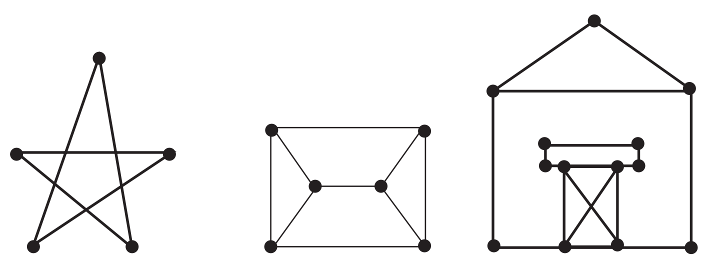
❖ Un graphe connexe G admet une chaîne eulérienne si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair ou deux uniquement de ses sommets sont de degré impair (ce sont les extrémités de la chaîne).

❖ Un graphe connexe G admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

Un graphe ayant plus de deux sommets de degré impair ne possède pas de chaîne eulérienne.

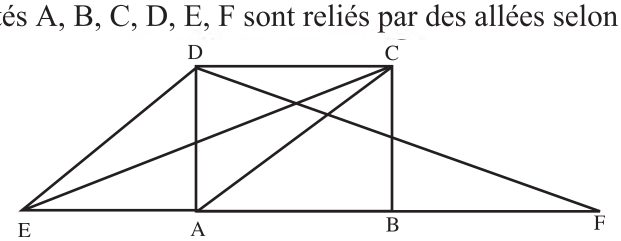
Activité 2

Peut – on dessiner les graphes ci-contre, sans lever le crayon et en ne passant qu'une seule fois sur chaque arête ?



Activité 3

Une grande surface est conçue de telle façon que six secteurs (alimentation, hi-fi, etc…) notés A, B, C, D, E, F sont reliés par des allées selon le graphe ci-dessous.



1 . a) Le graphe est-il connexe ?

b) Compléter le tableau suivant :

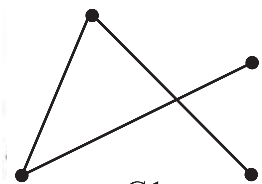
Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré						

2. Un visiteur désire parcourir l'ensemble des allées en ne passant par chacune d'elle qu'une seule fois .
   a). Montrer que son souhait est réalisable.
   b). Donner un exemple d'un tel parcours.

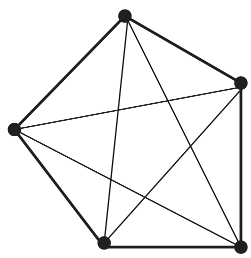
2) Coloriage d'un graphe

Activité 1

Colorier les graphes suivants en utilisant le minimum de couleurs. :



G1

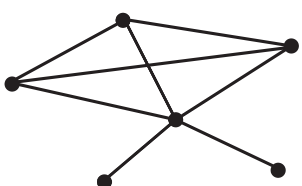


G2

Colorier un graphe consiste à affecter une couleur à chacun de ses sommets de sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.

Activité 2

On donne le graphe G ci-dessous.



G

Le nombre chromatique d'un graphe G, noté γ(G), est le nombre minimal de couleurs nécessaires pour sa coloration

❖ Le nombre chromatique d'un graphe est supérieur ou égal à l'ordre de tous ses sous graphes complets.
❖ Le nombre chromatique d'un graphe est inférieur ou égal à $(\Delta + 1)$ où Δ est le plus grand degré de ses sommets.

1- Quel est le plus grand degré des sommets de G ?
2- Déterminer un sous graphe complet de G d'ordre 4.
3- Déterminer le nombre chromatique de G, noté γ(G).

Activité 3

Dans le service administratif d'une entreprise, on observe des incompatibilités d'humeur entre certains employés recensés dans le tableau suivant.

La présence d'une croix à l'intersection de la ligne i et la colonne j signifie que les employés ne peuvent pas travailler dans le même bureau.

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
E_1		x			x	x
E_2	x		x	x	x	x
E_3		x		x	x	x
E_4		x	x		x	
E_5	x	x	x	x		x
E_6	x	x	x		x	

1- Représenter cette situation par un graphe.
2- Montrer que le nombre minimum de bureaux nécessaires à la répartition des employés qui peuvent travailler ensemble est égal à 4.

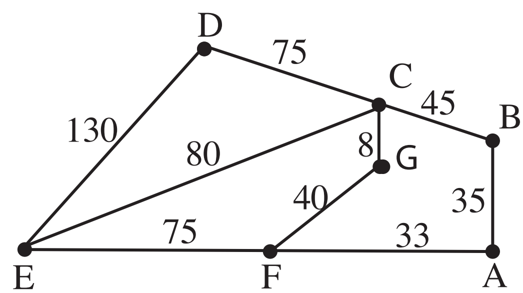
Activité 4

Six compagnies de voyage proposent des visites de monuments et lieux touristiques : A, B,C et D .Un même lieu ne peut être visité par plusieurs groupes de compagnies différentes le même jour .La première compagnie fait visiter uniquement le lieu A ; la seconde les lieux A et C;la troisième le lieu D ; la quatrième les lieux C et D; la cinquième les lieux A et B; la sixième le lieu B.
Comment organiser les visites d'une journée pour que chaque compagnie visite au moins un site ?

3) Recherche d'une plus courte chaîne

Activité1

Le graphe pondéré ci-contre représente un réseau routier. Sur chacune de ses arêtes on a marqué la distance séparant les deux villes reliées par cette arête.
1-Déterminer le poids de la chaîne : F-G-C-D
2- En appliquant l'algorithme de Dijkstra, vérifier que les plus courtes chaînes reliant le sommet A à n'importe quel autre sommet du graphe sont données par le tableau suivant :



A	B	C	D	E	F	G	Sommet sélectionné
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	0+35 35(A)	∞	∞	∞	0+33 33(A)	∞	F
	35(A)	∞	∞	33+75 108(F)		33+40 73(F)	B
		35+45 80(B)	∞	108(F)		73(F)	G
		73+8 80(B)	∞	108(F)			C
			80+75 155(C)	80+80 108(F)			E
			108+130 155(C)				D

3- Donner les plus courtes chaînes et les poids de chacune de ces chaînes, reliant :
a) A à C
b) A à D
c) A à G

Activité 2

Un fournisseur se prépare à livrer un produit à ses clients d'une ville A à une ville F .
Le tableau ci- contre indique les livraisons de ville à ville ainsi que la longueur du trajet, en kilomètres, entre deux villes.

1- Représenter les liaisons possibles par un graphe pondéré .
2- Déterminer la chaîne donnant la durée minimale du trajet de A à F.

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		20		60	80			
B	20		10					
C		10		20			90	80
D	60		20		20			40
E	80			20		70		30
F					70		20	
G			90			20		20
H			80	40	30		20	

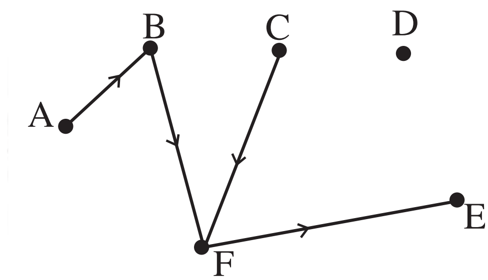
II- *Graphes orientés - Matrice associée à un graphe*

1) Graphe orienté:

Activité 1

Le tableau suivant indique les rues à sens unique d'une partie d'une ville.

	A	B	C	D	E	F
A		x				
B			x			x
C				x		x
D						x
E				x		
F	x				x	



1- Recopier le graphe G ci-dessus et le compléter en utilisant le tableau.
Le graphe obtenu est appelé ***graphe orienté.***
2- Déterminer un parcours, en voiture, de A à D en 4 étapes.
3- a) Peut–on déterminer un parcours de A à E, en voiture, en 2 étapes?
b) Peut–on déterminer un parcours de A à E, à pieds, en 2 étapes?

Définition :

On appelle **graphe orienté** un graphe où chaque arête est orientée, c'est-à-dire qu'elle ne peut être parcourue que dans un seul sens.

Vocabulaire :

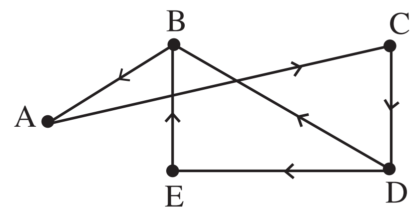
Dans un graphe orienté,

- Une arête orientée A⟶B est appelée **arc** d'origine A et d'extrémité B.
- Une **boucle** est un arc dont l'extrémité et l'origine sont les mêmes.
- **Une chaîne orientée** ou **un chemin** est une suite d'arcs tel que l'extrémité de chacun soit l'origine du suivant.
- **Un cycle orienté** ou **un circuit** est une chaîne orientée fermée composée d'arcs tous distincts.

Activité 2

Soit le graphe G ci – contre.

1) Donner une chaîne orientée reliant D à C.
2) Donner une chaîne orientée reliant B à E.
3) Peut-on déterminer un cycle orienté d'origine et d'extrémité A ?
4) Combien a-t-on d'arêtes orientées sortant de D?
5) Combien a-t-on d'arêtes orientées arrivant à B?



G

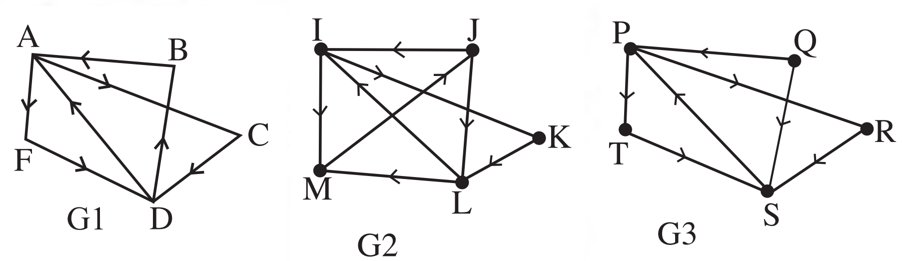
2) Chaîne orientée eulérienne - Cycle orienté eulérien

Définitions :

- Une chaîne orientée est dite **eulérienne** si elle passe une fois et une seule par chaque arête.
- **Un cycle orienté eulérien** est une chaîne orientée eulérienne fermée.
- Un graphe orienté est dit **eulérien** s'il admet un cycle orienté eulérien.

Activité 3

On donne les graphes G_1, G_2 et G_3 suivants :



Le tableau 1 (Respectivement 2 et 3) indique le nombre d'arêtes orientées rentrant, noté d^-, et le nombre d'arêtes orientées sortant, noté d^+, de chaque sommet du graphe G_1 (respectivement G_2 et G_3).

1

	A	B	C	D	E
d^+		1			
d^-				2	
$d^+ - d^-$					

2

	I	J	K	L	M
d^-					
d^+					
$d^+ - d^-$					

3

	P	Q	R	S	T
d^-					
d^+					
$d^+ - d^-$					

1- Recopier et compléter les tableaux 1,2 et 3.
2- Vérifier que G_1 est un graphe orienté eulérien et que G_2 admet une chaîne orientée eulérienne.
3- G_3 admet-il un cycle orienté eulérien ? une chaîne orientée eulérienne ?
4- Conjecturer.

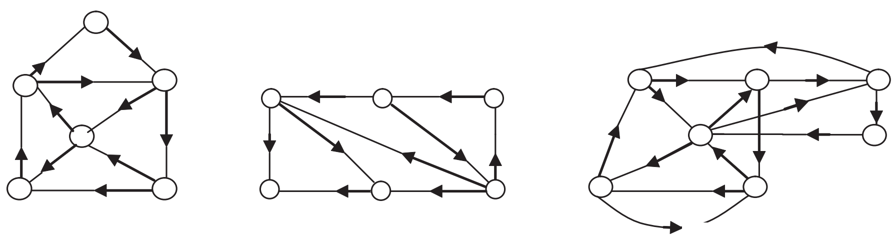
Théorème(admis) :

Soit G un graphe connexe orienté.
Pour tout sommet X de G, On note $\mathbf{d^+(X)}$ (respectivement $\mathbf{d^-(X)}$) le nombre d'arêtes orientés **sortant** de x(respectivement **rentrant** à X).

- ❖ G admet un cycle orienté eulérien si et seulement si pour tout sommet X du G on a : $\mathbf{d^+(X) = d^-(X)}$
- ❖ G admet une chaîne orientée eulérienne qui n'est pas un cycle orienté si et seulement si pour tout sommet X de G $\mathbf{d^+(X) = d^-(X)}$ sauf pour deux sommets exactement (A et B), on a : $\mathbf{d^+(A) = d^-(A) + 1}$ **et** $\mathbf{d^+(B) = d^-(B) - 1}$.

Activité 4

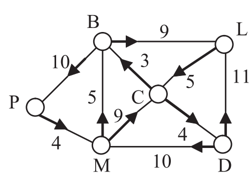
Dire, en justifiant, si chacun des graphes suivants admet un cycle orienté eulérien ou une chaîne orientée eulérienne.



Activité 5

Le graphe ci-dessous donne le plan d'un quartier avec le sens de circulation sur chaque arc, ainsi que le temps de parcours en voiture, en minutes, entre les différents lieux.

1- Ines affirme qu'elle peut parcourir, en voiture, toutes les rues du quartier une fois et une seule. A-t- elle raison? Justifier la réponse.
2- Elle désire se rendre de son domicile D à la piscine P, toujours en voiture, en un temps minimal .Quel chemin doit – elle suivre?

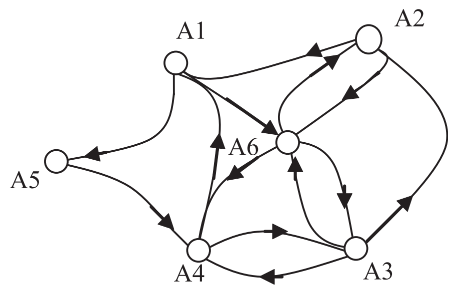


3) Matrice associée à un graphe

Activité 1

Un livreur d'une société de vente à domicile doit, dans son après – midi, charger son camion à l'entrepôt noté A_1, livrer cinq clients qu'on note A_2, A_3 A_4, A_5, et A_6, puis retourner à l'entrepôt.
Le réseau routier, tenant compte des sens de circulation, est représenté par le graphe G ci-après :

1- Recopier et compléter le tableau suivant en indiquant, dans la case correspondante, le nombre d'arêtes orientées reliant deux sommets.



G

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	0					1
A_2						
A_3				1		
A_4			1			
A_5						
A_6	0					

La matrice carrée A d'ordre 6 ainsi obtenue est appelée **matrice associée** au graphe G.
2- Que signifie le terme qui se trouve à l'intersection de la 3-ième ligne et la 2-ième colonne de la matrice A? à l'intersection de la i-ième ligne et la j-ième colonne ($1 \leq i,j \leq 6$) ?
3- a) Comparer $d^+(A_2)$ et la somme des termes de la deuxième ligne de la matrice A.
b) Comparer $d^-(A_6)$ et la somme des termes de la sixième colonne de la matrice A.
4- Comment obtient – on $d^+(A_i)$ et $d^-(A_i)$?
5- Montrer, à partir de A, que le graphe G admet une chaîne orientée eulérienne.

1-Définition :

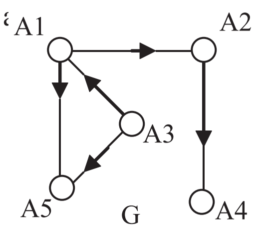
Soit G un graphe dont les sommets sont $S_1, S_2, ..., S_n$ .On appelle **matrice associée** au graphe G, la matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ d'ordre n où le terme a_{ij} est le nombre d'arêtes d'origine S_i et d'extrémité S_j .

2-Conséquences :

- $d^+(S_i)$ est égal à la somme des termes de la i-ième ligne de la matrice associée à ce graphe.
- $d^-(S_i)$ est égal à la somme des termes de la i-ième colonne de la matrice associée à ce graphe.

Activité 2

Reconnaître, parmi les matrices M_1, M_2 et M_3 suivantes, celle qui est a

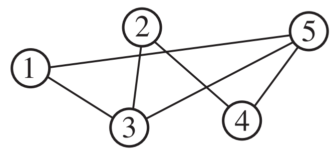


$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Activité 3

1- Vérifier que la matrice A suivante est la matrice associée au graphe G ci – contre

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



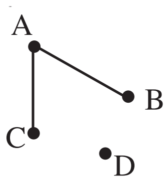
2- Justifier la symétrie de la matrice A par rapport à sa diagonale.
3- Comparer la somme de tous les termes de la matrice avec la somme des degrés des sommets de G. Justifier le résultat obtenu.

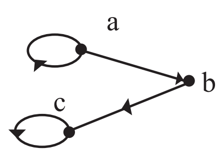
3-Remarque :

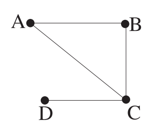
- ❖ La somme de tous les termes de la matrice associée à un graphe non orienté est égale à la somme des degrés des sommets de ce graphe.
- ❖ La matrice associée à un graphe non orienté est symétrique par rapport à sa diagonale.

Activité 4

1- Donner la matrice associée à chacun des graphes suivants :







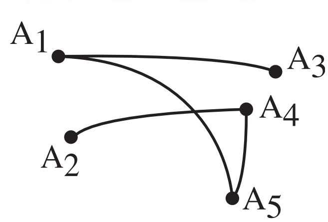
2- Représenter un graphe dont la matrice associée est :

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) Distance de deux sommets - Diamètre d’un graphe :

Activité 5

Le graphe G ci-dessous représente les liaisons ferroviaires existant entre différentes villes nommées A_1 , A_2, A_3, A_4et A_5.
1) Ecrire toutes les chaînes :
   a) de longueur 2 reliant A_1à A_4 ;
   b) de longueur 3 reliant A_1 à A_5 ;
   c) de longueur 3 reliant A_1 à A_2.



La longueur d’une chaîne est le nombre d’arêtes qui la composent

2) Donner la matrice A associée au graphe G.
 a) On a calculé les matrices A^2 et A^3 suivantes :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier que les termes a_{14} ; a_{15} et a_{34} de la matrice A^2 correspondent bien aux nombres de chaînes de longueur 2 reliant : A_1 à A_4 ; A_1 à A_5 et A_3 à A_4 .
 c) Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 reliant A_1 à A_5.

Théorème(admis) :

Soit G un graphe de matrice associée A.
Le nombre de chaînes de longueur n joignant le sommet i au sommet j est égal au terme a_{ij} de la matrice A^n.

*Une justification de ce théorème se trouve dans la partie « **maths culture** » de ce chapitre.*

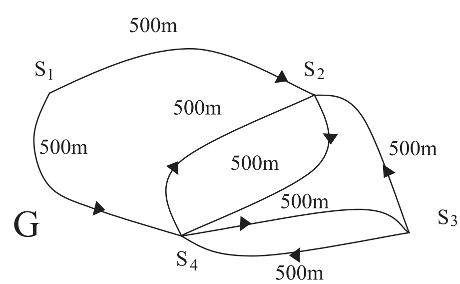
Activité 6

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice associée à un graphe G.

1- Dénombrer les chaînes de G de longueur 2.
2- Dénombrer les chaînes de G de longueur 4.

Activité 7

Un parcours de santé est aménagé pour les sportifs dans le parc de la ville.
Le graphe G ci- contre représente ce parcours .

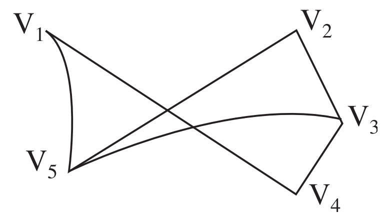


1) Donner la matrice A associée au graphe **G** .
2) Après calcul, on obtient les matrices A^2 , A^3, A^4 et A^5 suivantes :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; \; A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; \; A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Combien y a-t-il de trajets différents :
De 1 km reliant S_1 à S_4 ? De 1,5 km reliant S_3 à S_2 ? De 2 km reliant S_2 à S_3 ? De 2 km reliant S_4 à S_4 ? De 2,5 km reliant S_3 à S_4 ?

Activité 8



Le graphe ci-contre représente les liaisons routières entre cinq villes, V_1 ; V_2 ; V_3 ; V_4 et V_5

1- a) Donner tous les itinéraires possibles à suivre pour aller de V_1 à V_2.
   b) Quel est celui qui a le minimum d'étapes ?

2- Vérifier que la longueur d'une plus courte chaîne reliant V_1 à V_2 est égale à 2.
Le nombre 2 ainsi trouvé s'appelle **distance** des deux sommets V_1 et V_4.

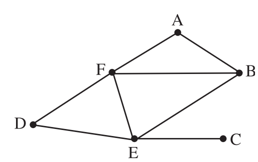
Définitions :

❖ **La distance de deux sommets** distincts est la longueur de la plus courte chaîne joignant ces deux sommets.
La distance est infinie, s'il n'existe pas de chaîne joignant ces deux sommets.
La distance d'un sommet à lui-même est, par convention, nulle.

❖ Le **diamètre d'un graphe** est la plus grande des distances entre deux sommets du graphe.

Activité 9

Un port est constitué de plusieurs bassins reliés les uns aux autres par des passerelles. Dans le graphe G ci-contre, les sommets représentent les bassins et les arêtes les passerelles qui les relient.



G

1- Quel est le nombre minimal de passerelles à franchir pour relier les deux bassins A et C ?
2- Recopier le tableau ci-contre et compléter chaque case par la distance entre les sommets correspondants.
3- En déduire le diamètre du graphe G.
4- Modifier le graphe G de façon à en faire un graphe de diamètre 2.

Distance	A	B	C	D	E	F
A	0					
B						
C						
D			2			
E						
F						

Quand l'ordre d'un graphe est assez grand, la recherche « à la main » de la distance entre deux de ses sommets et, par conséquent, la détermination du diamètre de ce graphe deviennent très difficiles.

Le théorème suivant donne une méthode permettant de trouver ces deux quantités facilement, à l'aide des matrices.

Théorème(admis) :

Soit G un graphe de matrice associée A .

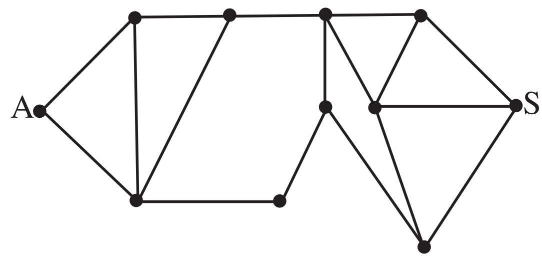
❖ La distance entre deux sommets distincts i et j est le plus petit entier naturel n ($n \geq 1$) tel que le terme d'indice i,j de A^n est non nul.

❖ Le diamètre du graphe G est le plus petit entier naturel n tel que la matrice $(A + Id)^n$ ait tous ses termes strictement positifs.

Activité 10

On donne le graphe G ci-dessous, sa matrice associée M, et les matrices M^4 et M^5.
Dire pourquoi la distance entre les sommets A et S est égale à 5.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$M^4 = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 10 & 13 & 7 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 10 & 17 & 17 & 11 & 8 & 3 & 10 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 10 & 17 & 24 & 12 & 5 & 8 & 10 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 13 & 11 & 12 & 19 & 8 & 10 & 5 & 9 & 11 & 4 & 4 \\ 7 & 8 & 5 & 8 & 9 & 1 & 9 & 4 & 3 & 7 & 3 \\ 3 & 3 & 8 & 10 & 1 & 17 & 6 & 12 & 19 & 5 & 11 \\ 3 & 10 & 10 & 5 & 9 & 6 & 29 & 15 & 16 & 20 & 19 \\ 2 & 2 & 3 & 9 & 4 & 12 & 15 & 21 & 22 & 17 & 15 \\ 2 & 2 & 4 & 11 & 3 & 19 & 16 & 22 & 31 & 15 & 21 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 7 & 5 & 20 & 17 & 15 & 20 & 14 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 3 & 11 & 19 & 15 & 21 & 14 & 20 \end{pmatrix}$$

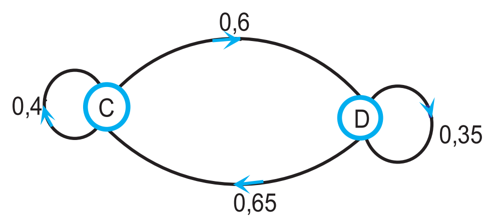
$$M^5 = \begin{pmatrix} 20 & 34 & 41 & 23 & 13 & 11 & 20 & 5 & 6 & 5 & 5 \\ 34 & 38 & 46 & 44 & 20 & 21 & 18 & 14 & 17 & 7 & 7 \\ 41 & 46 & 44 & 51 & 32 & 17 & 27 & 17 & 18 & 15 & 9 \\ 23 & 44 & 51 & 28 & 22 & 17 & 49 & 20 & 22 & 25 & 24 \\ 13 & 20 & 32 & 22 & 6 & 25 & 16 & 15 & 23 & 7 & 14 \\ 11 & 21 & 17 & 17 & 25 & 12 & 58 & 36 & 34 & 47 & 36 \\ 20 & 18 & 27 & 49 & 16 & 58 & 42 & 64 & 83 & 41 & 51 \\ 5 & 14 & 17 & 20 & 15 & 36 & 64 & 52 & 68 & 49 & 60 \\ 6 & 17 & 18 & 22 & 23 & 34 & 83 & 68 & 74 & 71 & 68 \\ 5 & 7 & 15 & 25 & 7 & 47 & 41 & 49 & 71 & 34 & 52 \\ 5 & 7 & 9 & 24 & 14 & 36 & 51 & 60 & 68 & 52 & 50 \end{pmatrix}$$

III- Graphes probabilistes

Activité 1

Un compte bancaire peut être créditeur ou débiteur.
L'évolution mensuelle du compte bancaire d'un certain client est telle que
- Lorsque son compte est créditeur à la fin d'un mois, la probabilité qu'il le soit encore à la fin du mois suivant est 0,4.
- Lorsque son compte est débiteur à la fin d'un mois, la probabilité qu'il le soit encore à la fin du mois suivant est 0,35.

1) La situation peut être représentée par le graphe orienté G ci-dessous



G

où :
- les sommets sont les deux états : C « le compte est créditeur » et D « le compte est débiteur ».
- les arêtes sont orientées et pondérées par les probabilités conditionnelles de passer d'un état à un autre, d'un mois au suivant.

Calculer la somme des poids des arêtes orientés issues de C puis la somme des poids des arêtes orientés issues de D

On dit qu'il s'agit d'un **graphe probabiliste**.
2) Recopier le tableau ci-contre et compléter chaque case par le poids de l'arête orientée correspondant.
La matrice carrée M d'ordre 2 ainsi obtenue est appelée **la matrice de transition** du graphe G qui est à 2 sommets.

	C	D
C		0,6
D		

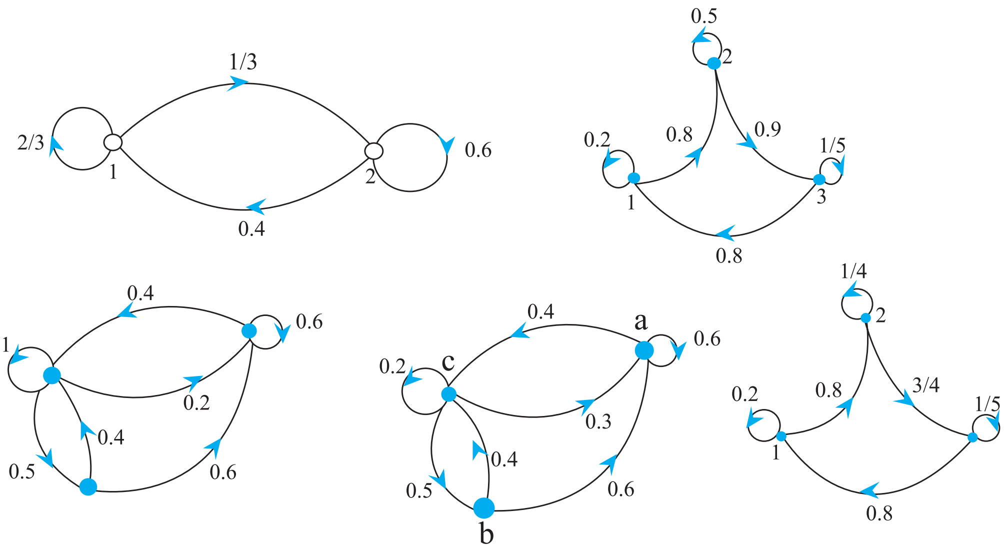
Définitions :

- ❖ On appelle **graphe probabiliste** un graphe orienté et pondéré dont la somme des poids des arêtes orientées sortant de chaque sommet vaut 1.
- ❖ On appelle **matrice de transition** d'un graphe probabiliste à n sommets, la matrice carrée d'ordre n dont le terme figurant à la i-ième ligne et la j-ième colonne est égal au poids de l'arête allant du sommet i au sommet j, si elle existe,et à 0 sinon.

Les graphes probabilistes sont utilisés pour modéliser une évolution d'un état vers un autre. Les sommets du graphe sont les états possibles et le poids d'une arête orientée issue du sommet i et d'extrémité j est la probabilité de transition de l'état i à l'état j.

Activité 2

Parmi les graphes suivants indiquer ceux qui sont des graphes probabilistes et donner leur matrice de transition.



Activité 3

Représenter un graphe probabiliste dont la matrice de transition est :

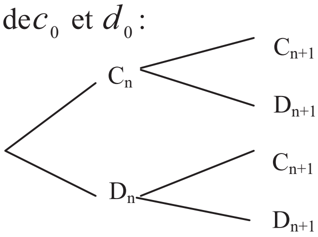
a) $M_1 = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 0,75 & 0,25 \end{pmatrix}$ b) $M_2 = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,2 & 0,65 \\ 0,7 & 0 & 0,3 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \end{pmatrix}$ c) $M_3 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0,9 \\ 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$

Activité 4

Reprenons l'activité 1.
A l'état initial, on note C_0 l'événement : « le compte est créditeur » et D_0 l'événement : « le compte est débiteur ».
On pose c_0 la probabilité de C_0 , d_0 la probabilité de D_0, c_n la probabilité de l'événement C_n : « le compte est créditeur à la fin du n-ième mois » et d_n la probabilité de l'événement D_n : « le compte est débiteur à la fin du n-ième mois » .

1) a) A l'aide d'un arbre de probabilité, exprimer en fonction de c_0 et d_0 :

i) c_1 et d_1. ; ***ii)*** c_2 et d_2 .



b) Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-contre,et vérifier que pour tout entier n≥ 1 :

$c_{n+1} = 0,4.c_n + 0,65.d_n$

$d_{n+1} = 0,6.c_n + 0,35.d_n$.

2) Notons, pour tout entier n ≥ 1, $p_n = \begin{pmatrix} c_n & d_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste au n-ième mois et $p_0 = (c_0 \quad d_0)$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste à l'état initial.

a)Vérifier, en utilisant les résultats de la première question, que:
$p_1 = p_0 \times M$; $p_2 = p_1 \times M$ et $p_{n+1} = p_n \times M$ où M est la matrice de transition du graphe G (voir activité1)

b)En déduire alors que, pour tout n∈ IN , $p_n = p_0 \times M^n$

Théorème(admis) :

Soit M la matrice de transition d'un graphe probabiliste d'ordre supérieur ou égal à 2. Si p_n est la matrice ligne décrivant l'état probabiliste à l'étape n et p_0 est la matrice ligne décrivant l'état probabiliste à l'état initial, alors $p_n = p_0 \times M^n$

Remarque :

Si l'état initial est p_1 alors $p_n = p_1 \times M^{n-1}$

Activité 5

Une personne joue à la machine à sou. Elle estime à 0,15 ses chances de gagner au départ . Puis à chaque jeu, elle pense avoir :

- Une chance sur deux de gagner au jeu suivant si elle vient de gagner.
- Deux chances sur cinq de gagner au jeu suivant si elle vient de perdre.

L'état probabiliste initial est donc $p_0 = (0.15 \quad 0.85)$

On désigne par a_n la probabilité de gagner le n-ième jeu et par b_n celle de le perdre

1) Représenter cette situation à l'aide d'un graphe probabiliste.
2) donner sa matrice de transition.
3) Montrer par récurrence que $M^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{9}+\frac{5}{9}\left(\frac{1}{10}\right)^n & \frac{5}{9}-\frac{5}{9}\left(\frac{1}{10}\right)^n \\ \frac{4}{9}-\frac{4}{9}\left(\frac{1}{10}\right)^n & \frac{5}{9}+\frac{4}{9}\left(\frac{1}{10}\right)^n \end{pmatrix}$
4) En déduire a_n et b_n en fonction de n.
5) Vérifier alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{4}{9}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{5}{9}$
6) Vérifier que (4/9 5/9) est l'unique solution de l'équation $(x \quad y) \times M = (x \quad y)$

Théorème(admis) :

Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2 dont la matrice de transition ne comporte pas de zéro, l'état p_n à l'étape n converge vers un état p, dit **stable,** indépendante de l'état initial p_0. De plus p est l'unique solution de l'équation $X \times M = X$ où $X = (x \quad y)$ avec $x + y = 1$

Activité 6

On considère une grande population d'acheteurs de yaourts. On suppose que l'effectif de cette population est stable .Une entreprise commercialise des yaourts sous la marque Y. 30 % des acheteurs de yaourts achètent la marque Y.
L'entreprise décide de faire une campagne publicitaire pour améliorer ses ventes.

Au bout d'une semaine, une enquête indique que :
· 20 % des acheteurs de yaourts qui achetaient la semaine précédente des yaourts des autres marques achètent maintenant des yaourts Y.
· 10 % des acheteurs de yaourts qui achetaient la semaine précédente des yaourts Y achètent maintenant des yaourts des autres marques.
L'entreprise continue sa campagne publicitaire. On fait l'hypothèse que l'évolution des résultats obtenus à l'issue de la première semaine de campagne publicitaire est la même les semaines suivantes.
1) Dessiner le graphe probabiliste correspondant à cette situation.
2) Soit $X_0 = (\,0{,}3 \quad 0{,}7\,)$ la matrice ligne décrivant l'état initial de la population.
a) Donner la matrice de transition (notée *A*) associée au graphe précédent.
b) Déterminer la probabilité qu'un acheteur de yaourts choisi au hasard après deux semaines de campagne publicitaire, achète des yaourts de la marque Y.
3) On admet que, pour tout entier naturel *n*, on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)0{,}7^n & \frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)0{,}7^n \\ \frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)0{,}7^n & \frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)0{,}7^n \end{pmatrix}$$

Avec l'hypothèse ci-dessus, l'entreprise peut-elle espérer atteindre une part de marché de 70 % ? Justifier.

Activité7

Un guide touristique classe chaque année les hôtels d'une certaine région en deux catégories selon la qualité de leurs prestations. Les plus confortables sont classés dans la catégorie A, les autres dans la catégorie B. On constate que, chaque année, 5% des hôtels de la catégorie A sont relégués dans la catégorie B, alors que 20% des hôtels de la catégorie B sont promus dans la catégorie A.
1) Réaliser un graphe décrivant cette situation.
2) Ecrire la matrice de transition de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique.
3) En 2006, le classement était tel que le quart des hôtels étaient dans la catégorie A.
Calculer l'état de l'année 2007, puis celui de l'année 2008.
4) L'état $(0{,}5 \quad 0{,}5)$ est-il stable ? Justifier la réponse.
5) Trouver vers quel état converge ce système.

Avec l'ordinateur

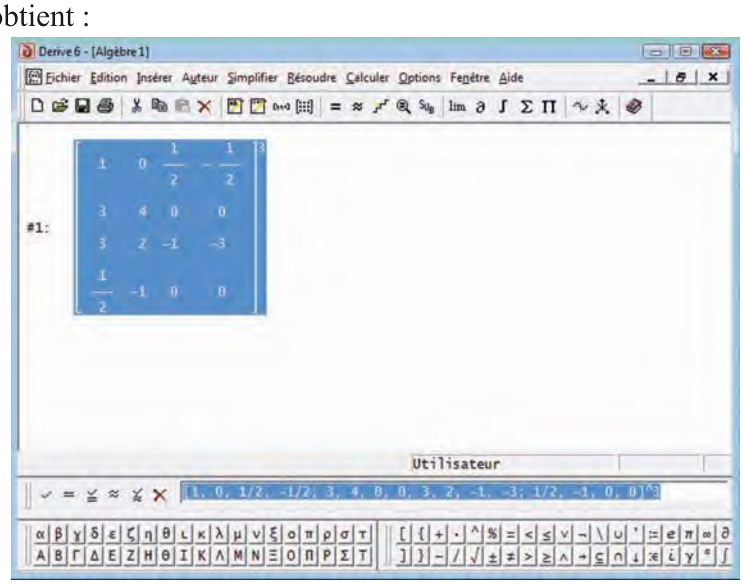
Utilisation d'un logiciel de calcul formel (Derive) pour calculer une puissance entière d'une matrice.

Activité 1

1°) Exécuter le logiciel Derive. On obtient :

4°) On veut calculer $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -3 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3$, Pour cela on introduit dans la barre de calcul de

Derive $\left[1,\ 0,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}; 3,\ 4,\ 0,\ 0;\ 3,\ 2,\ -1,\ -3; \frac{1}{2},\ -1,\ 0,\ 0\right]$^3 et en valide par la touche Entrer au clavier, on obtient :

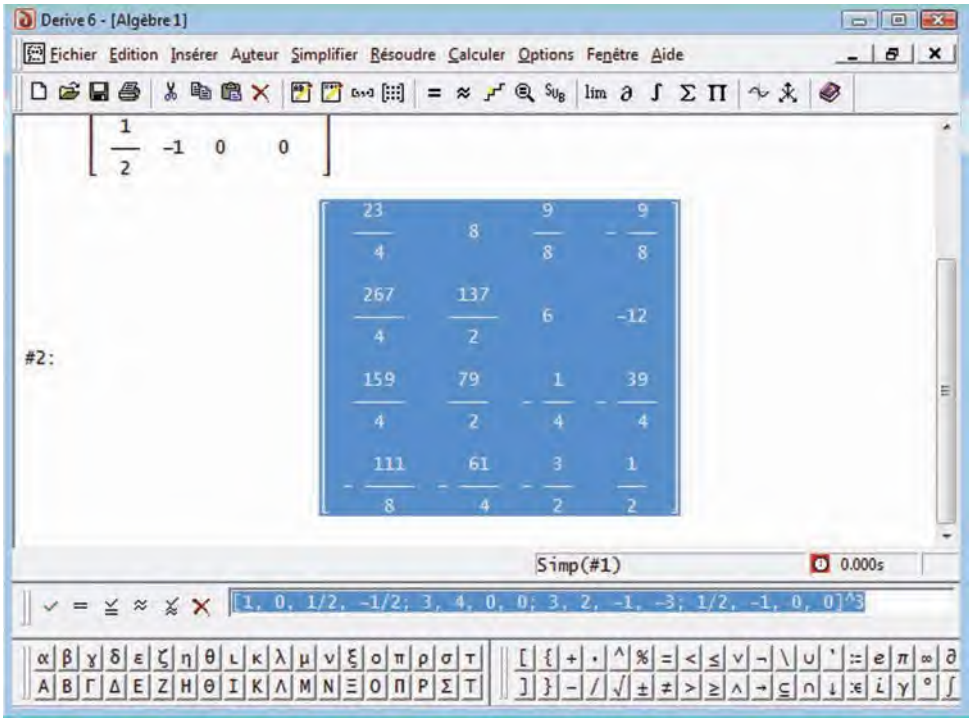


Pour obtenir le résultat : aller dans

Simplifier/ = Basique

Ou bien le raccourci $\boxed{=}$

On obtient :



Activité 2

En utilisant le procédé de l'activité 1, calculer :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}^{10} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & \frac{2}{5} \\ -2 & \frac{1}{2} & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & \frac{1}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & -3 & -4 \end{pmatrix}^{22}$$

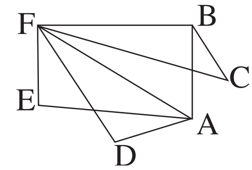
Exercices et problèmes

1-Répondre par vrai ou Faux à chacune des affirmations suivantes en justifiant les réponses.

a) Le graphe G ci-contre admet un cycle eulérien.

b) Le graphe G admet une chaîne eulérienne.

c) La chaîne D-A-B-C-F-E-F-A-E est une chaîne eulérienne de G.

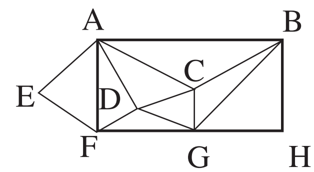


G

2- Soit le graphe G ci-contre.

a) G admet -il une chaîne eulérienne ? Pourquoi ?

b) G admet -il un cycle eulérien ? Si oui, lequel ? Si non, proposer une modification du graphe pour qu'il en admette un.



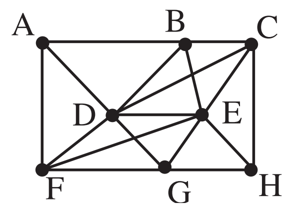
G

3-Le ramassage des ordures ménagères dans la ville dont un plan est représenté ci-contre, à l'aide d'un graphe, doit être effectué en minimisant le trajet à effectuer.

Les sommets sont les différents carrefours et les arêtes les voies de circulation.

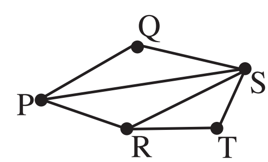
a) Est-il possible de partir d'un carrefour et d'y revenir en empruntant chaque voie une fois et seule ?

b) Le graphe ci-dessus admet-il une chaîne eulérienne ? Si oui, en déterminer une.



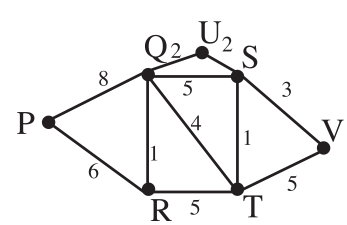
4-Pour chaque question, cocher une case sur chaque ligne, la case «Vrai»ou la case «Faux».

1.Dans le graphe ci-contre, il est possible de définir une chaîne eulérienne…

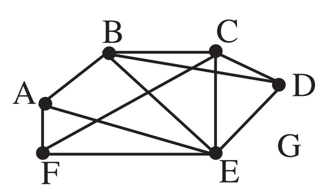


	Vrai	Faux
a) Partant de Q et finissent en T.	☐	☐
b) Partant de S et finissent en S.	☐	☐
c) Partant de P et finissent en R.	☐	☐

2. Dans le graphe pondéré ci-contre, la plus courte chaîne pour aller de P à V…



	Vrai	Faux
A pour poids 16.	☐	☐
A pour poids 14.	☐	☐



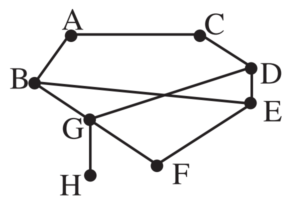
G

5- a) Citer deux chaînes de longueur 3 reliant les sommets A et D du graphe G ci-contre.

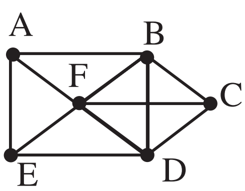
b) Pour chacune des chaînes ci-dessous Donner sa longueur, dire si elle est fermée et préciser s'il s'agit d'un cycle eulérien.

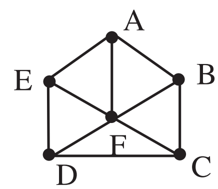
A-B-D-C-F-A ; A-E-C-F-E-A et B-D-C-F-E-A

6- Recopier le graphe ci-dessous et utiliser l'algorithme de Welch-Powell pour le colorier.



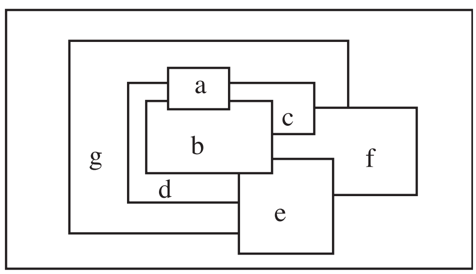
7- Encadrer le nombre chromatique de chacun des graphes ci-dessous par deux nombres entiers (il n'est pas demandé de chercher ce nombre chromatique).





8- Le plan ci-dessous représente différents échantillons de papier posés les uns sur les autres délimitant ainsi sept zones à colorier de telle façon que si deux d'entre elles ont une frontière commune alors elles seront de couleurs différentes.

a) Représenter la situation par un graphe G.
b) Colorier le graphe G avec l'algorithme de Welch-powell.
c) Reproduire le plan et colorier comme souhaité



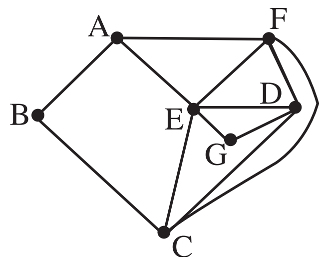
9- T est le graphe ci-contre .

1.On note γ(T)le nombre chromatique de T.

a) Dire pourquoi le sous graphe constitué des sommet C ;D ;E et F est complet.

b) Démontrer que $4 \leq \gamma(T) \leq 6$.

c) Déterminer la valeur de $\gamma(T)$.



T

2.On considère un groupe d'élèves notés A, B, C, D, E, F et G. Pour un exposé, les élèves se mettent en équipes, mais il faut respecter les incompatibilités entre les élèves.

Dans le tableau ci-après, chaque croix indique une incompatibilité entre les élèves correspondants.

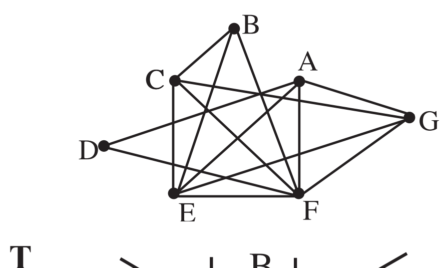
	A	B	C	D	E	F	G
A		X			X	X	
B	X		X				
C		X		X	X	X	
D			X		X	X	X
E	X		X	X		X	X
F	X		X	X	X		
G				X	X		

a) Si l'on décide de modéliser ce tableau d'incompatibilité par le graphe T, quel sens faut-il donner à l'existence d'un arrête entre deux sommets ?
b) Combien d'équipes faudra-t-il créer en minimum ?
Proposer une répartition des élèves en équipes (une équipe peut comporter un seul élève).

10- Un laboratoire de produits pharmaceutiques de première urgence doit livrer un médicament le plus rapidement possible à un certain nombre de pharmacie de la région.
Il ne dispose à ce moment que d'un seul véhicule. Le départ est de A et les différentes pharmacies sont nommées B, C, D, E, F et G.
Mettre au point un parcours qui soit le plus rapide possible, sachant que le temps de parcours sont indiqués dans le tableau ci-dessus.

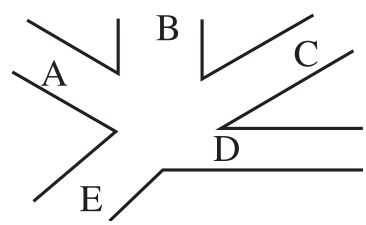
	A	B	C	D	E	F	G
A		8	5	6	3	5	2
B	8		7	9	6	2	9
C	9	7		3	6	5	5
D	6	9	3		9	8	4
E	3	6	6	9		4	6
F	5	2	5	8	4		7
G	2	9	5	4	6	7	

11- Un concert de solidarité est organisé dans une grande salle de spectacle. A ce concert sont conviés sept artistes de renommée internationale : A ;B ;C ; D ;E ;F et G.
Les différents musiciens invités refusant de jouer avec certains autres, l'organisateur du concert doit prévoir plusieurs parties de spectacle.
Les arêtes du graphe T ci-contre indiquent quels sont les musiciens qui refusent de jouer entre eux.



1. Colorier le graphe T.
2. Combien de parties l'organisateur du concert doit-il prévoir ?
3. Proposer une répartition des musiciens pour chacune de ces parties.

12- Ce schéma représente un carrefour.
Le tableau ci-dessous précise les« franchissements » possibles de ce carrefour. (la circulation de A vers E est considérée comme un « franchissement » même si on ne traverse pas le carrefour).



En arrivant par …	A	B	C	D	E
Il est possible d'aller en …	C, E	A, E, D	A, D	C, A	C, D

Les franchissements AC et BE ne peuvent naturellement pas être autorisés simultanément sous peine de collision.

On se propose de déterminer le nombre minimal de phases des feux de signalisation nécessaire au bon fonctionnement de ce carrefour.

a) Modéliser cette situation à l'aide d'un graphe dont :
- Les sommets représentent les franchissements possibles (AC, CA, AE, BA, BE,…)
- Les arêtes reliant les sommets représentant des franchissements ne peuvent pas être simultanés sous peine de collision.

b) Montrer que (EC ; AC ; DB ; CD ; DA) est un sous graphe complet d'ordre 5.

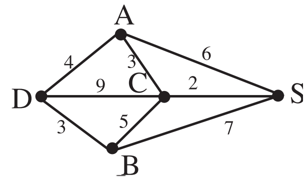
c) Que peut-on dire de sommet DA ? en déduire un encadrement du nombre chromatique du graphe.

d) Proposer une coloration de graphe. En déduire son nombre chromatique.

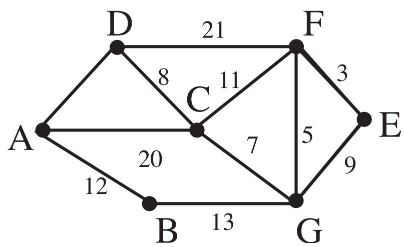
e) Que peut –on dire d'un ensemble de sommets ayant même couleur ? a quoi peut correspondre le nombre chromatique de ce graphe ?

13- Le graphe suivant représente les différents itinéraires pour aller de D à S.
Le poids des arêtes est le coût, en DT, du trajet effectué entre deux villes nommées par des sommets.

a) Quel est le poids de la chaîne D-A-C-S ?
b) Quelle est la chaîne de poids minimal ?
c) Quelle est la longueur de la chaîne D-A-C-S ?



14- Des touristes sont logés dans un hôtel noté A. Un guide fait visiter six cites touristiques noté B,C,D,E,F et G.
Les tronçons de route qu'il peut emprunter sont représentés sur le graphe ci-contre : (le long de chaque arête figure la distance en kilomètres de différents tronçons).



1.a) A partir de l'hôtel, le guide peut-il emprunter tous les tronçons de route en passant une fois et une seule sur chacun d'eux ? Justifier la réponse.

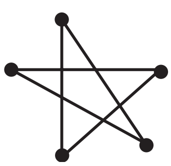
b) Même question s'il doit obligatoirement terminer son circuit à l'hôtel.

2. Déterminer le plus court chemin menant de l'hôtel A au site E. Justifier la réponse.

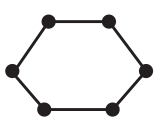
15- 1. Caractériser les graphes de diamètre 1.

2. Trouver le diamètre des graphes ci-dessous ?

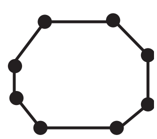
a)



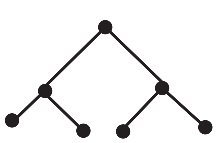
b)

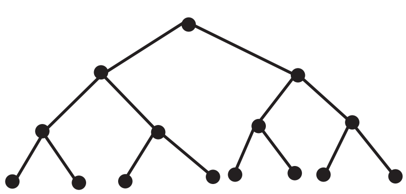


c)



3 Quel est le diamètre de chacun des deux graphes ci- dessous ?



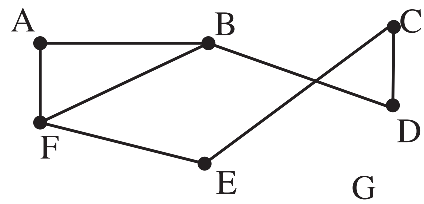


Exercices et problèmes

16- Soit G le graphe ci-contre.

1) Donner la matrice M associée à G en écrivant les sommets dans l'ordre alphabétique.

2)On a calculé les matrice M^2 et M^5 suivantes :



G

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad M^5 = \begin{pmatrix} 14 & 21 & 12 & 9 & 9 & 21 \\ 21 & 18 & 9 & 19 & 14 & 26 \\ 12 & 9 & 2 & 12 & 12 & 9 \\ 9 & 19 & 12 & 4 & 7 & 14 \\ 9 & 14 & 12 & 7 & 4 & 19 \\ 21 & 26 & 9 & 14 & 19 & 18 \end{pmatrix}$$

a) En déduire le nombre de chaînes de longueur 2 reliant A et D. Les écrire.

b) Entre quels sommets de ce graphe y a –t-il le plus de chaînes de longueur 2 ? Les écrire.

c) Entre quels sommets y a-t- il 4 chaînes de longueur 2 ?

d) Déterminer le nombre de chaînes de longueur 5 reliant B et F.

17- Représenter un graphe non orienté dont la matrice associée est la suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

18- M est la matrice d'un graphe non orienté G.

a) Quel est l'ordre de G ?

b) Calculer la somme des degrés des sommets de G.

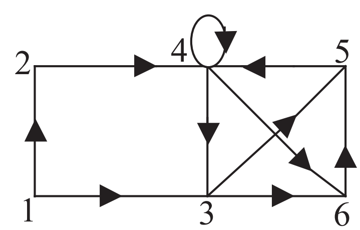
c) Quel est le nombre d'arêtes de G ?

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

19- On considère le graphe orienté ci-contre.

a) Ecrire la matrice A associée à ce graphe.

b) On a calculé les matrices A^5 et A^6 suivantes :



.

$$A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 10 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & 16 & 15 & 15 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

c) Donner le nombre de chaînes orientées de longueur 5 du sommet 1 au sommet 5. Les écrire.

d) Le graphe contient – il des chaînes orientées fermées ? Si oui combien ?

20- Dans un groupe de six personnes chacune d'elles doit choisir celles en qui elle a confiance pour partager ces activités de loisir. A, B, C, D, E et F ces personnes. On constate que :

- A n'a confiance qu'en lui-même, mais possède la confiance de B.
- E a confiance en B, C et D mais n'a la confiance que de B et C.
- B et D ont confiance en C.
- F est très méfiant et n'a même pas la confiance en soi.

a) Représenter cette situation à l'aide d'un graphe orienté dans lequel les sommets représentent ces six personnes et les arêtes orientées signifient « a confiance en ».

b) Quelle est la personne qui a la confiance du plus grand nombre d'entre elles ?

21- Cinq personnes notées A, B, C ; D et E et peuvent communiquer entre elles soit par téléphone, soit par courrier électronique.
A et B ; A et C ; B et C peuvent se téléphoner. C peut envoyer et recevoir du courrier électronique avec D et E.

a) Recopier et compléter le tableau suivant :

↗	A	B	C	D	E
A	0				
B		0			
C			0		
D				0	
E					0

Dans ce tableau, on inscrit 1 au croisement de la ligne X et la colonne Y si la personne de la ligne X peut communiquer avec la personne de colonne Y et 0 sinon.

b) Ecrire la matrice M associée à cette situation.

c) Construire le graphe associé à cette matrice M.

d) Quelle est la personne qui peut communiquer avec le plus grand nombre directement ?

e) On admet que deux personnes peuvent communiquer par l'intermédiaire d'un troisième.
Si X peut communiquer directement avec Y et Y directement avec Z.
On admet que la matrice M^2est

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer la matrice $S = M + M^2$.

f) Déduire le résultat que chacune des cinq personnes peut communiquer avec tout autre personne directement ou indirectement.

22- Dans un club de football ; lors de longues séances de tirs au but, le gardien se comporte de la manière suivante :

- S'il arrête un tir, il arrête le suivant avec la probabilité de 0,5 .
- S'il a encaissé un but, il arrête le tir suivant avec la probabilité de 0,2.

1.a) Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste.

b) Donner la matrice de la transition de ce graphe.

2. Le gardien n'a pas arrêté le premier tir. Quelle est la probabilité qu'il arrête le troisième tir ?

23- Un théâtre propose deux types d'abonnement pour une année : un abonnement A donnant droit à six spectacles ou un abonnement B donnant droit à trois spectacles.
On considère un groupe de 2500 personnes qui s'abonnent tous les ans. n étant un entier naturel, on note :
a_n la probabilité qu'une personne ait choisit l'abonnement A l'année n ;
b_n la probabilité qu'une personne choisit l'abonnement B l'année n ;
P_n la matrice $(a_n \quad b_n)$ traduisant l'état probabiliste l'année n.
Tous les ans, 85% des personnes qui ont choisi l'abonnement A et 55% des personnes qui ont choisi l'abonnement B conservent le même type d'abonnement l'année suivante. Les autres changent d'abonnement.
1.On suppose que, l'année zéro, 1500 personnes ont choisi l'abonnement A et 1000 personnes ont choisi l'abonnement B.
Déterminer l'état initiale $P_0 = (a_0 \quad b_0)$.
2.a) Tracer un graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.
b) Déterminer la matrice de transition M de ce graphe
c) En déduire le nombre d'abonnés l'année un.

24- On a divisé une population en deux catégories : « fumeurs » et « non-fumeurs ».
Une étude statistique a permis de constater que, d'une génération à l'autre,
- 60% des descendants de fumeurs sont des fumeurs,
- 10% des descendants de non-fumeurs sont des fumeurs.
On suppose que le taux de fécondité des fumeurs est le même que celui des non fumeurs.
On désigne par :
- f_n le pourcentage de fumeurs à la génération de rang n,
- $g_n = 1 - f_n$ le pourcentage de non-fumeurs à la génération de rang n, où n est un entier naturel.
On considère qu'à la génération 0, il y a autant de fumeurs que de non-fumeurs.
On a donc $f_0 = g_0 = 0{,}5$
1) Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.
2) Justifier l'égalité matricielle :
$(f_{n+1} \quad g_{n+1}) = (f_n \quad g_n).A$ où A désigne la matrice : $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$
3) Déterminer le pourcentage de fumeurs à la génération de rang 2.
4) Déterminer l'état probabiliste stable et l'interpréter.
5) Montrer que : pour tout entier naturel n, $f_{n+1} = 0{,}5.f_n + 0{,}1$
6) On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = f_n - 0{,}2$
a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
b) Donner l'expression de u_n en fonction de n.
c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $f_n = 0{,}3.0{,}5^n + 0{,}2$
d) Déterminer la limite de la suite(f_n) lorsque n tend vers $+\infty$ et l'interpréter.

25- Au cours de la première semaine de l'année scolaire, un professeur propose aux élèves de sa classe le choix entre deux sorties pédagogiques une sortie A et une sortie B.
20% des élèves de la classe sont favorables à la sortie A et tous les autres élèves sont favorables à la sortie B.
Les arguments des uns et des autres font évoluer cette répartition en cours d'année.
Ainsi 30 % des élèves favorables à la sortie A et 20 % des élèves favorables à la sortie B

changent d'avis la semaine suivante.
On note :
a_n la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie A la semaine n ;
b_n la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie B la semaine n ;
Pn la matrice $(a_n \quad b_n)$ n n a b traduisant l'état probabiliste la semaine n.
1) Déterminer l'état initial P_1 .
2) Représenter la situation par un graphe probabiliste.
3) En déduire que $P_{n+1} = P_n \times M$ où M est la matrice $\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$
4) Déterminer l'état probabiliste P_3 et en déduire la probabilité qu'un élève soit favorable à la
sortie A la troisième semaine.
5) Déterminer le réel x tel que $(x\ ;\ 1-x).M = (x\ ;\ 1-x)$.
On admet que la suite (a_n) est croissante. La sortie A finira-t-elle par être préférée à la sortie B ?

26- On s'intéresse aux performances réalisées par des étudiants courant le 200 mètres dans les compétitions universitaires. Lors d'une compétition, le score d'un(e) étudiant (e) est son meilleur temps en secondes obtenu aux 200 m. Une enquête a permis d'établir le comportement général suivant, qu'on supposera valable pour les filles et les garçons dans toute la suite :
· Lors de la première compétition, le score d'un(e) étudiant(e) est toujours supérieur ou égal à 25 secondes.
· Si, lors de la n-ième compétition, l'étudiant(e) a réalisé un score strictement inférieur à 25 secondes, la probabilité qu'il (elle) réalise encore un score strictement inférieur à 25 secondes lors de la $n+1$-ième compétition est de $\frac{2}{5}$
· Si, lors de la n-ième compétition, l'étudiant(e) a réalisé un score supérieur ou égal à 25 secondes, la probabilité qu'il (elle) réalise encore un score strictement inférieur à 25 secondes est $\frac{1}{5}$
On représente les données précédentes par un graphe probabiliste G à deux états.
On note A tout score strictement inférieur à 25 secondes et B tout score supérieur ou égal à 25 secondes.
On note a_n la probabilité d'obtenir un score A lors de la compétition n et b_n la probabilité d'obtenir un score B lors de la compétition n.
L'état probabiliste lors de la compétition n est donc représenté par la matrice ligne $(a_n \quad b_n)$.
1) Représenter G et donner sa matrice de transition.
2) Mouna, jeune étudiante, se présente à sa première compétition universitaire.
a) Calculer la probabilité qu'elle réalise un score strictement inférieur à 25 secondes aux 200 mètres lors de cette compétition.
b) Calculer la probabilité qu'elle réalise un score strictement inférieur à 25 secondes aux 200 mètres lors de sa troisième compétition.
3) Déterminer l'état stable du graphe G.
4) Riadh a déjà de nombreuses compétitions universitaires.
Montrer que, pour sa prochaine compétition, il a environ une chance sur quatre de réaliser un score strictement inférieur à 25 secondes aux 200 mètres.

27- *Étude de l'évolution météorologique d'un jour à l'autre dans une localité.*
Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions rationnelles.

Partie A

· S'il fait sec aujourd'hui, alors il fera encore sec demain avec la probabilité $\frac{5}{6}$, donc il fera humide demain avec la probabilité $\frac{1}{6}$

· S'il fait humide aujourd'hui, alors il fera encore humide demain avec la probabilité $\frac{2}{3}$,

Nous sommes dimanche et il fait sec. On s'intéresse à l'évolution météorologique des jours suivants.

1) Construire un arbre de probabilité représentant la situation de dimanche à mercredi.

2) En déduire la probabilité des évènements suivants :

J : « il fera sec lundi, mardi et mercredi » ;

K : « il fera sec mardi » ;

L : « il fera humide mercredi ».

Partie B

1) Soit n un entier naturel, on note :

s_n la probabilité pour que le jour n, il fasse sec ;

h_n la probabilité pour que le jour n, il fasse humide ;

Pn la matrice $(s_n \quad h_n)$ traduisant l'état probabiliste du temps le jour n. Déterminer une relation entre s_n et h_n.

2) a) Si le premier dimanche est le jour correspondant à $n = 0$, donner la matrice associée à l'état initial du temps.

b) Décrire l'évolution de cet état à l'aide d'un graphe probabiliste.

3) La matrice M de ce graphe est $\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

a) Déterminer M^2.

b) Expliquer comment retrouver à l'aide de la matrice M, la situation du mardi étudiée dans la partie A.

4) a) Déterminer l'état stable associé à l'évolution météorologique.

b) En déduire, qu'à long terme, la probabilité qu'il pleuve un certain jour est $\frac{1}{3}$.

I -Une justification du théorème suivant :

Soit G un graphe de matrice associée A. Le nombre de chaînes de longueur n joignant le sommet i au sommet j est égal au terme a_{ij} de la matrice A^n.

Soient i et j deux sommets distincts de G. La solution, comme souvent, vient en cherchant un problème plus facile : chercher le nombre de chemins de longueur 1, puis 2, puis 3 reliant i à j.
Les chaînes de longueur 1 qui joignent i à j sont les arêtes qui joignent i à j. On notera $a_{i;j}$ le nombre de ces chaînes de longueur 1 : il vaut 0 si i n'est pas relié à j par une arête, 1 s'il y a une arête qui joint i à j.
Comment compter les chaînes de longueur 2 joignant i à j? Une telle chaîne est forcément formée d'une chaîne de longueur 1 allant de i à un certain sommet k, puis d'une chaîne de longueur 1 du même sommet k à j; il faut bien sûr envisager toutes les possibilités pour k. Si b_{ij} désigne le nombre de chaînes de longueur 2, on a donc :

$$b_{ij} = \sum_k a_{ik}.a_{kj}$$ la somme étant

prise sur tous les sommets du graphe.
On reconnaît la formule usuelle du produit de matrices ! Les sommets sont numérotés de 1 à n, on peut donc regrouper les nombres a_{ij} définis ci-dessus en une matrice $A = (a_{ij})$. Si l'on note $B = (b_{ij})$ la matrice des chaînes de longueur 2, on vient de voir que $B = A^2$, le produit étant le produit matriciel usuel.
De même, si l'on note c_{ij} le nombre de chaînes de longueur 3 de i à j, on voit que, puisqu'une telle chaîne se décompose en une chaîne de longueur 1 de i à k, suivie d'une chaîne de longueur 2 de k à i, on a :

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik}.b_{ki}$$

d'où l'on déduit que la matrice $C = (c_{ij})$ vérifie $C = A\times B = A^3$.
Il est alors immédiat de généraliser : le nombre de chaînes de longueur n qui joignent le sommet i au sommet j est le terme d'indice i,j de la matrice A^n.

II -Introduction aux chaînes de Markov

Généralement, un processus stochastique est une suite d'expériences dont le résultat dépend du hasard. Ici, nous admettrons qu'en certains temps 0, 1, 2, ..., t, nous observons un système. Celui-ci peut se trouver dans l'un des états d'une collection finie d'états possibles. L'observation du système est ainsi considérée comme une expérience dont le résultat (aléatoire) est l'état dans lequel se trouve le système.

Nous supposons que nous connaissons pour chaque paire d'états i et j, et pour chaque instant t, la probabilité $p_{ij}(t)$ que le processus soit dans l'état j à l'instant t +1 étant donné qu'il se trouve dans l'état i à l'instant t. De plus, la probabilité $p_{ij}(t)$ sera supposée ne pas dépendre de t.
Un tel processus est appelé chaîne de Markov (à temps discret et avec un ensemble fini d'états), du nom de son inventeur ***Andrei Andreyevich Markov*** (1856-1922), dont vous voyez le visage ci-contre.
Avec ces hypothèses, nous pouvons décrire le système en donnant l'ensemble $\{u_1, ..., u_m\}$ des états u_i possibles et une matrice P de dimensions $m\times m$ dont le terme p_{ij} est la probabilité que le processus soit dans l'état j à l'instant t +1 étant donné qu'il se trouve dans l'état i à l'instant t, pour tout t. P est appelée matrice de transition du système.
On représente généralement P par un graphe orienté G dont les sommets correspondent aux m états et les arcs aux couples ordonnés d'états (i,j) tels que $p_{ij}>0$.