Chapitre 1

LIMITES ET CONTINUITE

Pour commencer

Activité 1

Pour chacune des limites ci-dessous, une seule des réponses proposées est exacte. On demande de cocher cette réponse.

QUESTIONS	REPONSES	QUESTIONS	REPONSES
1) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 =$	☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$	6) $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x^3} =$	☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ 0
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} =$	☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ 0	7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} =$	☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ $\frac{3}{2}$
3) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 =$	☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$	8) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^5}{x^3} =$	☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ $\frac{5}{3}$
4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} =$	☐ $+\infty$ ☐ 0 ☐ 1	9) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{-x} =$	☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$
5) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x^2} =$	☐ $+\infty$ ☐ 0	10) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} =$	☐ 0 ☐ $+\infty$

Activité 2

On considère la fonction f définie par: $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^3-2x^2}$

a) Vérifier que : $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$.

b) Déduire $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Activité 3

Soient g,h et k les fonctions définies par:

$g(x) = 2x - \frac{1}{x}$; $h(x) = 2x - |x|$ et $k(x) = \frac{2x - x^3}{\sqrt{2} - x}$.

Calculer:

a) $\lim_{x \to 0^+} g(x)$; $\lim_{x \to 1} g(x)$; $\lim_{x \to +\infty} g(x)$; $\lim_{x \to -\infty} g(x)$

b) $\lim_{x \to 0} h(x)$; $\lim_{x \to 1} h(x)$; $\lim_{x \to +\infty} h(x)$; $\lim_{x \to -\infty} h(x)$

c) $\lim_{x \to 0} k(x)$; $\lim_{x \to 1} k(x)$; $\lim_{x \to -\infty} k(x)$; $\lim_{x \to +\infty} k(x)$; $\lim_{x \to \sqrt{2}} k(x)$

Activité 4

Le coût moyen C_M de fabrication en dinars de *x* centaines d'objets est modélisé par la fonction :

$$C_M(x) = 5x + 31 + \frac{1500x + 100}{x^2} \quad \text{pour } x > 0.$$

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1- Déterminer la limite de C_M à droite en 0 et donner une interprétation économique de cette limite.

2- a- Déterminer la limite de C_M en $+\infty$. Interpréter économiquement le résultat.

b- Montrer que pour des valeurs de x assez grandes (x tend vers $+\infty$), la différence $C_M(x)$-(5x+31) prend des valeurs très proche de zéro (tend vers 0).

c- Donner une estimation du coût moyen de fabrication de 100000 objets.

Activité 5

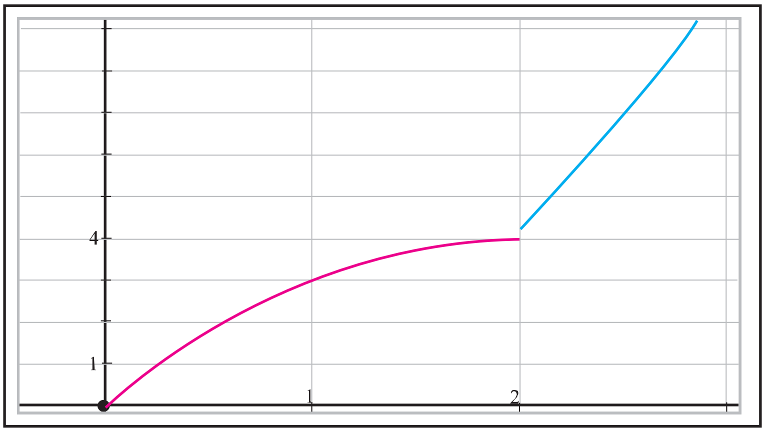
Une petite entreprise qui fabrique des jouets pour enfants estime que le coût total en milliers de dinars, de production de x milliers d'objets s'exprime en fonction de x, par :

$C(x) = -x^2 + 4x$ si $x \le 2000$ et $C(x) = x^2 + x - 1.8$ si $x > 2000$

La courbe de la fonction coût total C est donnée par le graphique ci- dessous (l'unité des abscisses étant 1000 jouets).

1- Calculer les limites de C(x) à droite et à gauche en 2000. Interpréter le résultat

2- L'entreprise veut fabriquer 3000 jouets, est-il plus rentable de les fabriquer en un lot de 3000 ou bien en deux lots de 1500.



LIMITES

I- Revoir:

Activité 1

On considère la fonction f dont la représentation est donnée par la figure ci-contre.

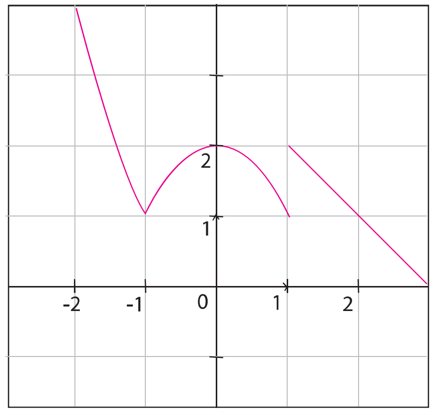
1) Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

2) La fonction f admet-elle une limite au point 1 ?

3) f admet-elle une limite au point -1 ?



Théorème(admis)

Soit I un intervalle ouvert contenant x_0 et f une fonction définie sur I, sauf peut être en x_0.

On a $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell\right)$ si et seulement si $\left(\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \ell \text{ et } \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \ell\right)$

(ℓ est fini ou infini)

Activité 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in]-\infty, 1[\\ -x+3 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

Opérations sur les limites:

Les tableaux suivants donnent les règles de calcul de la limite d'une somme, d'un produit et du quotient de deux fonctions.

a) Somme:

Limite de f	Limite de g	Limite de f+g
L	L'	L+L'
L	$+\infty$	$+\infty$
L	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Pas de conclusion

b) Produit :

Limite de f	Limite de g	Limite de $f\times g$
L	L'	$L\times L'$
$L\neq 0$	∞	(règle des signes) ∞
∞	∞	(règle des signes) ∞
0	∞	Pas de conclusion

c) Quotient:

Limite de f	Limite de g	Limite de f/g
L	L'	L/L'
L	∞	0
∞	L'	(règle des signes) ∞
∞	∞	Pas de conclusion
$L\neq 0$	0	(règle des signes) ∞
∞	0	(règle des signes) ∞
0	0	Pas de conclusion

Activité 3

1- Soit la fonction $f: x \mapsto (x-2)-\frac{1}{x}$

Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

2- Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\sqrt{x}-x}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(2x(1-\frac{1}{x^2})\right)$

Activité 4

Calculer les limites suivantes:

$\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x(|x|-1)+\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right)$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(2x+7+\frac{x^4+7x^3-31}{(2x-11)^3}\right)$

$\lim\limits_{x\to 1}\left((x-1)^3-\frac{2x}{x^3-5x+7}\right)$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\left((x-1)^3-\frac{2x}{x^3-5x+7}\right)$

Activité 5

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}(-2x^3+5x^2-1)$; b) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^3-x^2+1)^3$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{-x^2+x-1}{4x^4-3x+6}$; d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^3-27}{x^2-5x+6}$;

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[3x-\frac{2x^2+1}{x-1}\right]$; f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x-1+\frac{1}{x}}{x^2+x-2}\right)$.

-La limite en l'infini d'une fonction polynôme est égale à celle de son terme de plus haut degré.
-La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est égale à celle du quotient des termes de plus haut degré.

II- Limites et ordre :

Activité 1

1) Peut-on calculer la limite en $+\infty$ de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$?

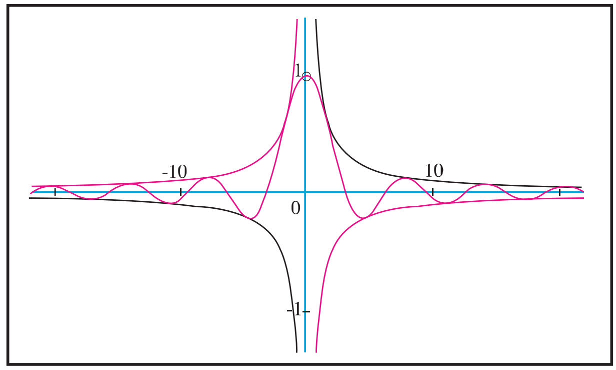
2) Soient f et g les fonctions définies par: $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $g : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$.

Les courbes ci- contre sont celles des fonctions f, g et h.

a- Associer chacune des fonctions à sa représentation graphique.

b- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x}$

c- Que peut-on conjecturer pour la limite de $\dfrac{\sin x}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$



Théorèmes (admis)

Soit x_0 un réel et I un intervalle ouvert contenant x_0 .

f, g et h trois fonctions définies sur l'intervalle I sauf peut être en x_0.

1) Si pour tout $x \in I$ et $x \neq x_0$ on a $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell'$

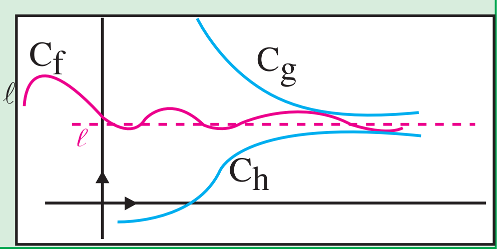
Alors $\ell \leq \ell'$.

2) Si pour tout $x \in I$ et $x \neq x_0$ on a :

$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$

Alors

f admet une limite en x_0 et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$.



Activité 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 2 - \dfrac{\cos x}{|x|}$.

1) Montrer que pour tout réel $x \neq 0$ on a : $2 - \dfrac{1}{|x|} \leq f(x) \leq 2 + \dfrac{1}{|x|}$.

2) Calculer: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2 - \dfrac{1}{|x|}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2 + \dfrac{1}{|x|}\right)$.

3) Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto -x + \sin x$.

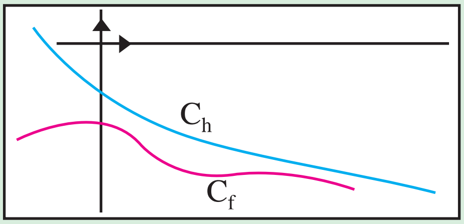
1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) \leq -x + 1$.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x + 1)$.

3) En supposant que f admet une limite en $+\infty$, prévoir la valeur de cette limite?

Théorème (admis)

Soit x_0 un réel et I un intervalle ouvert contenant x_0.
f et h deux fonctions définies sur l'intervalle I sauf peut être en x_0.
Si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \leq h(x)$
et si $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = -\infty$ Alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

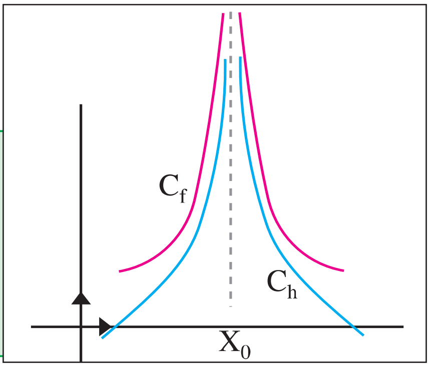


Activité 4

Démontrer le théorème suivant :

Théorème

Soit x_0 un réel et I un intervalle ouvert contenant x_0.
f et h deux fonctions définies sur l'intervalle I sauf peut être en x_0.
Si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \geq h(x)$
et si $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = +\infty$ Alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$



Remarque

Les théorèmes précédents restent valables lorsqu x_0, ℓ et ℓ' sont finis ou infinis.

Activité 5

Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse en donnant une brève justification.

1) Si une fonction f vérifie : pour tout x strictement positif, $3 \leq f(x) \leq 3 + \dfrac{5}{x+2}$
alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

2) Si une fonction f vérifie :pour tout x de $[5 ; +\infty[$, $f(x) \leq \dfrac{9}{x}$ alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

3) Si une fonction g vérifie : pour tout x non nul, $-\dfrac{3}{x^2} \leq g(x) - 7 \leq \dfrac{3}{x^2}$
alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 7$.

Activité 6

Soit f la fonction définie sur IR_+^* par $f : x \mapsto 1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

1) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $-\frac{1}{\sqrt{x}} \le f(x)-1 \le \frac{1}{\sqrt{x}}$.

En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-1]$.

3) Calculer: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)$

III- Limite d'une fonction composée :

Activité 1

On considère les fonctions f et g définies respectivement sur $IR \setminus \{1\}$ et $IR \setminus \{-1\}$ par

$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ et $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

1- Vérifier que pour tout $x \in IR^* \setminus \{1\}$ $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x}$.

2- a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(g \circ f)(x)$.

b- Comparer $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(g \circ f)(x)$.

3-a- Calculer $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+}(g \circ f)(x)$.

b- Comparer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+}(g \circ f)(x)$.

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$
La fonction notée $g \circ f$ définie sur I par : $g \circ f(x) = g[f(x)]$ est une fonction composée des deux fonctions g et f .

Remarque qu'en général on a:
$g \circ f \ne f \circ g$

Théorème (admis)

Soient f et g deux fonctions.

Si $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x\to b} g(x) = L\right)$ alors $\left(\lim\limits_{x\to a}(g \circ f)(x) = L\right)$

(a,b et L sont finis ou non)

Activité 2

En appliquant le théorème précédent, calculer les limites suivantes :

a- $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)^3$; b – $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+3}{9-x^2}\right)^2$; c – $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\frac{2x-5}{x-2}\right)^3$.

Conséquence

Soient f une fonction définie sur intervalle ouvert I contenant x_0 et L un réel.

- Si f est positive sur I et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ alors $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.
- Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)} = +\infty$.

Activité 3

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{2x-1}{x}}$; b) $\lim\limits_{x\to-3^+}\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2-5}{x-2}}$

Activité 4

Soient f et g les fonctions définies respectivement sur IR et IR^* par $f(x)=ax$ et $g(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$ où a est un réel non nul .

Rappelons qu'on a: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

1- Donner l'expression de $g\circ f$ et prouver que:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(ax)}{x}=a$$

2- En adoptant une démarche analogue, montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$.

Activité 5

Soient f, g, u, v et h les fonctions définies par:

$f:x\mapsto\dfrac{1-\cos x}{x}$, $g:x\mapsto\dfrac{1-\cos x}{x^2}$, $u:x\mapsto 2x$, $v:x\mapsto\sqrt{x}$ et $h:x\mapsto x^2$

a) Vérifier que $\dfrac{1-\cos(x^2)}{x}=x.(f\circ h)(x)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x^2}{x}$

b) Donner l'expression de $(g\circ u)(x)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(2x)}{x^2}$

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos(\sqrt{x})}{x}=\dfrac{1}{2}$.

CONTINUITE

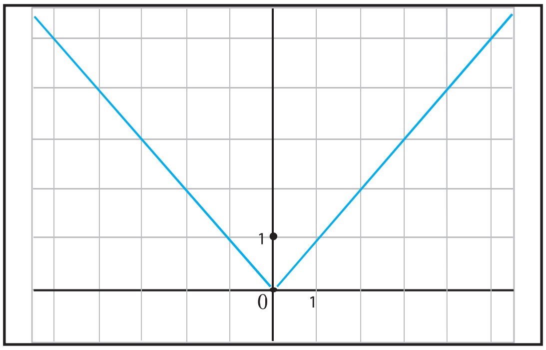
I- Revoir:

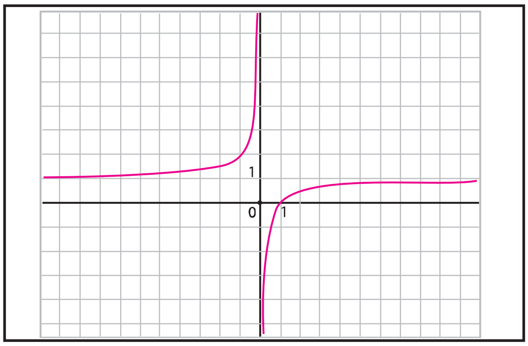
Activité 1

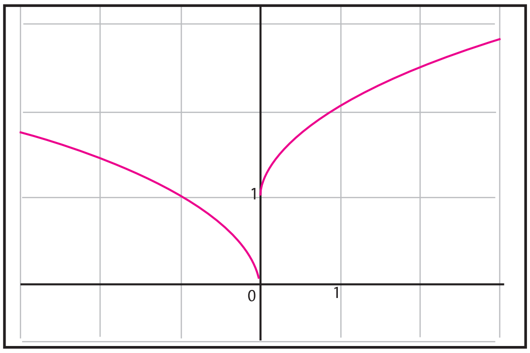
On considère les trois fonctions f, g, h et k dont les représentions graphiques sont données par les figures ci- dessous et qui sont définies par leurs expressions suivantes:

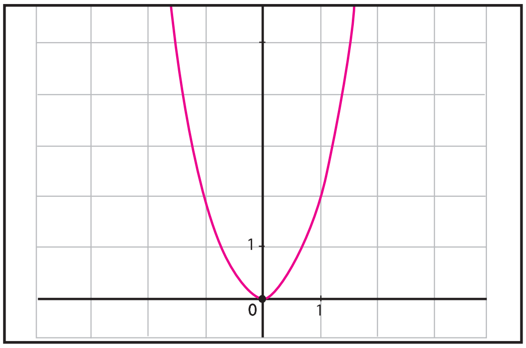
$f : x \mapsto |x^3 + x|$;$g : x \mapsto \begin{cases} |x| & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$; $h : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} + 1 & \text{si } x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ et $k : x \mapsto \dfrac{x-1}{x}$

1- Associer à chaque fonction sa courbe.
2- Etudier la continuité éventuelle de chacune de ces fonctions au point 0.









Théorèmes

- f est continue en x_0 si et seulement si : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- f est continue à droite en x_0 si et seulement si : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
- f est continue à gauche en x_0 si et seulement si : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
- f est continue en x_0 **si et seulement si** f est continue à droite et à gauche x_0.

f est continue sur l'intervalle I si elle est continue en tout point de I. (pour les bornes de I appartenant à I on considère la continuité à droite ou bien à gauche en ces bornes)

Activité 2

Dans chacun des cas suivants, justifier la continuité de la fonction f en x_0 :

a) $f(x)=2x-\frac{1}{x}$ en $x_0=1$; b) $f(x)=|x|+1$ en $x_0=-1$

c) $f(x)=\frac{x^2-1}{|x|+1}$ en $x_0=-1$; d) $f(x)=(x-1)(1-\cos x)$ en $x_0=\frac{\pi}{2}$

Opérations sur les fonctions continues :

Théorèmes

Soient f et g deux fonctions continues en x_0 et $\lambda \in IR$.
Les fonctions λf , $|f|$, $f+g$ et $f\,g$ sont continues en x_0.

Si de plus $g(x_0)\neq 0$, alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues en x_0.

Remarques

1 - L'application des opérations précédentes nous permet de justifier la continuité d'une grande gamme de fonctions en utilisant la continuité de fonctions simples.

2 - Du fait que la fonction $x \mapsto x^n, n\in \mathbb{N}^*$ est continue sur IR on déduit que :

Toute fonction polynôme est continue sur IR.
Toute fonction rationnelle est continue sur chaque intervalle contenu dans son domaine de définition.

Activité 3

1) Soit f la fonction définie sur IR par $\begin{cases} f(x)=2x^2-3 & \text{si } x\in \left]-\infty,1\right[\\ f(x)=1-2\sqrt{x} & \text{si } x\in \left[1,+\infty\right[\end{cases}$

a- Montrer que f est continue en 1.

b- En déduire que f est continue sur tout $\mathbb{R}$.

2) Soit g la fonction définie sur IR par $\begin{cases} g(x)=x^2-1 & \text{si } x\in \left]-\infty,2\right] \\ g(x)=x+\alpha & \text{si } x\in \left]2,+\infty\right[\quad (\alpha\in IR) \end{cases}$

a) Justifier que g est continue sur $\left]-\infty,2\right]$ et $\left]2,+\infty\right[$?

b) Comment choisir α pour que g soit continue sur tout IR?

Activité 4

Reprendre les fonctions définies dans l'activité 2 ci-dessus.
1) Déterminer leurs ensembles de définitions.
2) En utilisant le théorème précédent, étudier la continuité de chacune d'elles sur chaque intervalle contenu dans son ensemble de définition.

II- Continuité d'une fonction composée :

Activité 1

Soient u et f les fonctions définies sur IR par: $u(x)=x^2-\frac{\pi}{4}$ et $f(x)=\cos(u(x))$

a- Prouver que u est continue en 0 et que f est continue en u (0).
b- Déterminer la limite de f en 0 et en déduire que f est continue en 0.

Théorème (admis)

Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors la fonction gof est continue en x_0.

Conséquence 1

Si f est continue en x_0 et positive sur un intervalle contenant x_0 alors $\sqrt{f}$ est une fonction continue en x_0.

Activité 2

En appliquant le théorème précédent étudier la continuité de f au point x_0 dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \mapsto \sqrt{x^2-4}$, $x_0=\sqrt{5}$

2) $f : x \mapsto \sin(1-\frac{1}{x})$, $x_0=1$

3) $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$, $x_0=5$

Conséquence 2

Soient f et g deux fonctions:

$$\text{Si } \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a \\ \text{et} \\ \text{g est continue en a} \end{cases} \text{alors } \begin{cases} \text{la fonction } (g\circ f) \text{ admet une limite finie en } x_0 \\ \text{et cette limite est égale à } g(a) \end{cases}$$

x_0 étant fini ou infini et a est un réel.

Activité 3

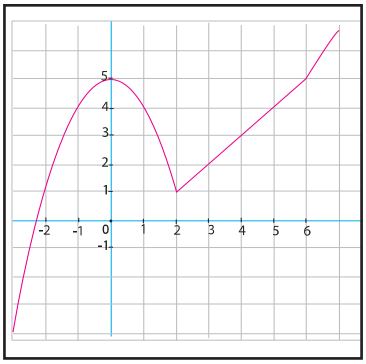
Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{2-x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^2-x+1}$; c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{\frac{2x^3+1}{x^3-1}}$; d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sin\left(\frac{\pi x+2}{6x}\right)$

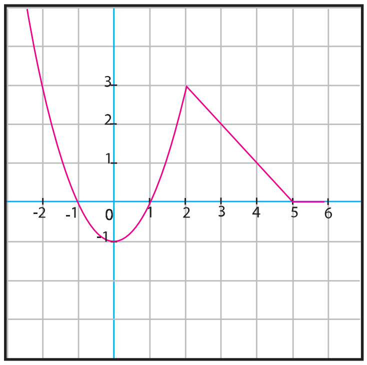
III- Théorème des valeurs intermédiaires :

Activité 1

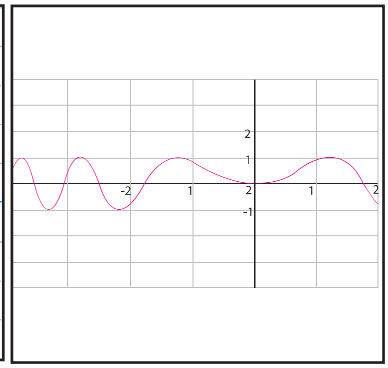
Déterminer à partir de chacun des graphiques suivants, l'image de l'intervalle I :



$I=[0,4]$



$I=]-1,6[$



$I=[-4,1[$

Activité 2

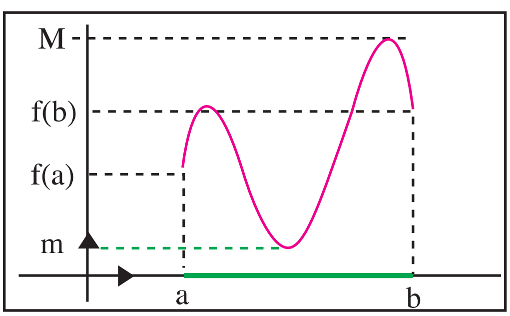
Soit la fonction $f : x \mapsto x^2-1$

a- Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

b- Déterminer graphiquement l'image de l'intervalle $[-1,1]$ par f

Théorèmes (admis)

* L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
* L'image d'un intervalle fermé [a,b] par une fonction continue est un intervalle fermé [m,M].



$f([a,b])=[m,M]$

m est la plus petite valeur de f sur $[a,b]$

M est la plus grande valeur de f sur $[a,b]$

Activité 3

Soit f la fonction définie par $f(x)=3x^2-2$.

1- Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan .

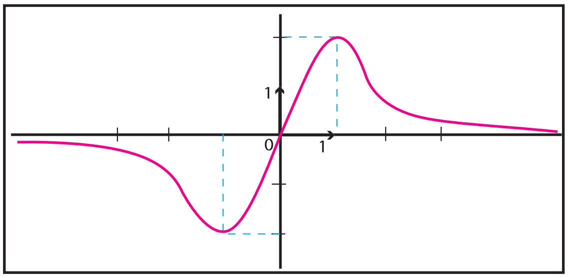
2- Déterminer les images par f de chacun des intervalles suivants:

$[0,2]$, $[-1,3]$,$]-\infty,1]$, $[3,5[$, $]0,+\infty[$, $\mathbb{R}$.

Cas d'une fonction continue et strictement monotone:

Activité 3

Soit f la fonction représentée graphiquement par la courbe ci-contre.



1- Déterminer

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $f(-1)$; $f(1)$; et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2- Déterminer le sens de variation de f sur chacun des intervalles

$]-\infty,-1]$, $[-1,1]$ et $[1,+\infty[$

3- Préciser les images des intervalles $]-\infty,-1]$, $[-1,1]$ et $[1,+\infty[$ par f et les comparer respectivement aux intervalles : $\left[f(-1), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right[$, $[f(-1),f(1)]$ et $\left]\lim_{x\to+\infty} f(x), f(1)\right]$

Ainsi si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I on a :

Intervalle I	L'image de l'intervalle I par f	
	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$
$[a,b[$	$\left[f(a), \lim_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim_{x\to b^-} f(x), f(a)\right]$
$]a,b]$	$\left]\lim_{x\to a^+} f(x), f(b)\right]$	$\left[f(b), \lim_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]a,b[$	$\left]\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim_{x\to b^-} f(x), \lim_{x\to a^+} f(x)\right[$

(a et b sont finis ou infinis).

Activité 4

Soit f la fonction définie sur $[-2,5]$ par $f(x)=|1-2x|-|x+2|$.

1- Vérifier que $f(x)=\begin{cases} -3x-1 & \text{si } -2 \le x \le \frac{1}{2} \\ x-3 & \text{si } \frac{1}{2} < x \le 5 \end{cases}$

2- Tracer la courbe représentative de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

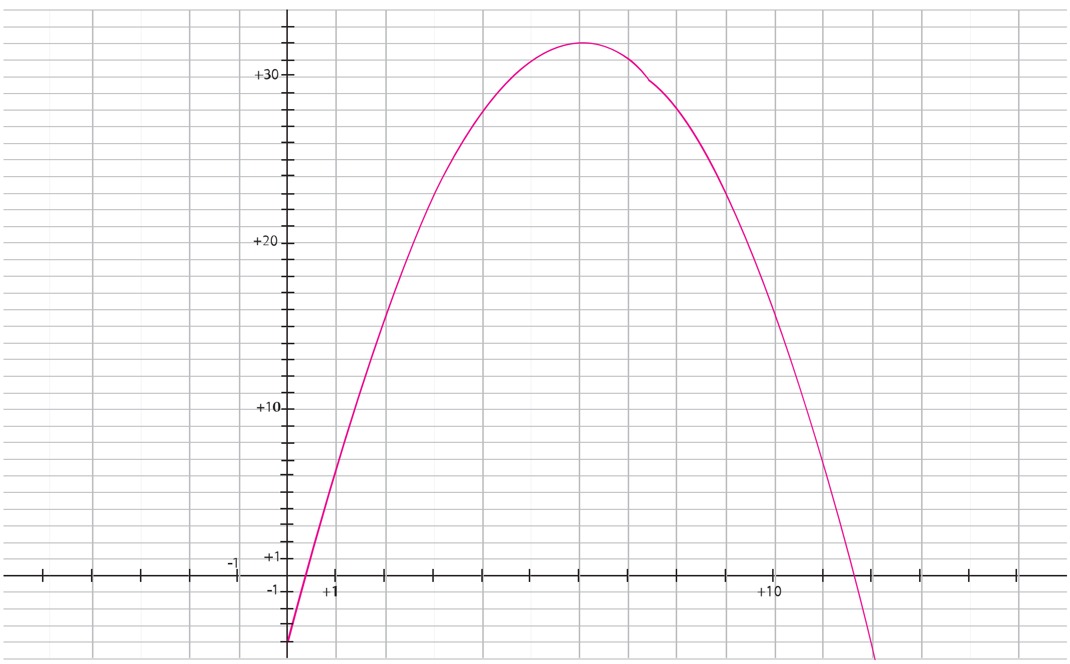
3- Dresser le tableau de variations de f.

4- Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=1$ dans l'intervalle $[-2,5]$.

5- Déterminer de même le nombre de solutions de l'équation $f(x)=3$ dans l'intervalle $[-2,5]$.

Activité 5

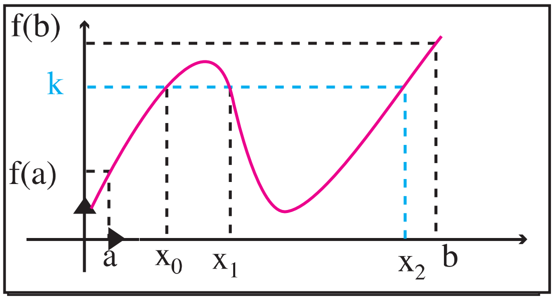
Une entreprise de fabrication de produits cosmétiques estime que le coût total de fabrication en milliers de dinars, de p lots de 1000 pièces est donné par la fonction $C(p) = p^2 + 3p + 4$
Le lot de 1000 pièces est vendu à un prix de 15000 dinars .
1- La courbe ci-dessous représente le bénéfice en milliers de dinars en fonction du nombre p de lots vendus. Déterminer graphiquement le nombre de pièces à fabriquer pour avoir un bénéfice maximal.
2- Déterminer une approximation du nombre minimal et du nombre maximal de pièces que l'entreprise doit fabriquer pour être rentable(avoir un bénéfice positif) .
3- Déterminer graphiquement le nombre de lots que l'entreprise doit fabriquer pour avoir un bénéfice égal à 23000 dinars.



Théorème (admis)

Si une fonction f est **continue** sur un **intervalle** fermé [a ; b] et si k est un réel quelconque compris entre f(a) et f(b) (ces deux valeurs comprises),
alors il **existe au moins** un réel x_0 dans [a ; b] tel que $f(x_0) = k$

*Notons que f prend toutes les valeurs intermédiaires entre f(a) et f(b), c'est pour cela que ce théorème est connu sous le nom " **Théorème des valeurs intermédiaires** " .*



Activité 6

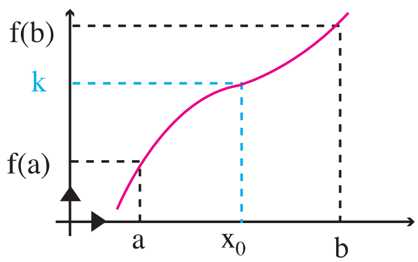
On considère l'équation : $x\sqrt{x}-x-1=0$ (E).

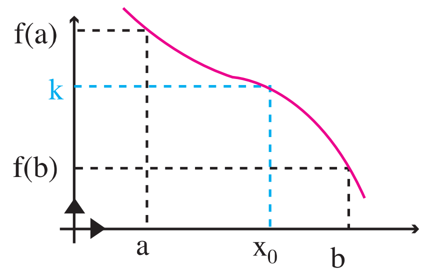
a) Montrer que la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{x}-x-1$ est continue sur IR_+.

b) Montrer que (E) admet au moins une solution dans $[1,4]$.

Remarque

Si de plus f est **strictement monotone** sur l'intervalle [a , b], alors l'équation f(x) = k admet une solution unique dans [a , b].





Activité 7

Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ -1.

1- Déterminer le domaine de définition de f.

2- Prouver que f est continue sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

3-Montrer que f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

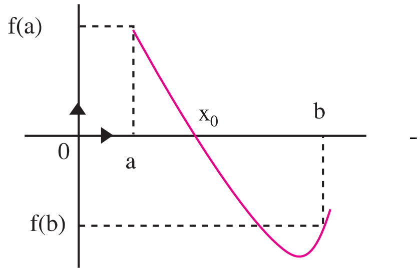
4- Calculer $f(2)$ et $f(3)$ puis montrer que l'équation f(x)= 1 admet dans $[1,+\infty[$ une solution unique c.

5- Calculer $f(1).f(2)$ et montrer que l'équation f(x)= 0 admet dans $]1,2[$ une solution unique c'. Calculer la valeur de c'.

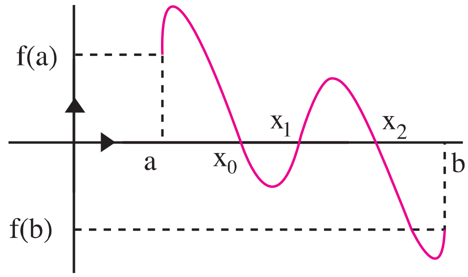
Corollaire

Si f est une fonction **continue** sur un **intervalle** fermé [a ; b] et Si f(a).f(b)< 0 **alors** l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution dans l'intervalle $]a,b[$.

Illustration:



Cas d'une solution unique



Cas de solutions multiples

Activité 8

Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 + x - 1$.
1- Justifier la continuité de f sur [0, 1].
2- Montrer que l'équation : f(x) = 0 admet une solution unique α comprise entre 0 et 1.
3- Calculer $f(\frac{1}{2})$ et vérifier que : $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
4- Calculer $f(\frac{3}{4})$ et vérifier que : $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$.
5- Calculer $f(\frac{5}{8})$ et vérifier que : $\alpha \in \left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right]$.
6- Calculer $f(\frac{11}{16})$ et en déduire un encadrement de α.
7- Calculer $f(0,682)$ et $f(0,683)$ et donner un encadrement de α à 10^{-3} près.

Résolution d'équations par dichotomie :

f étant une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$, on sait que si f(a).f(b)<0 alors l'équation f(x)= 0 possède une unique solution x_0 dans $[a, b]$.

Pour encadrer la valeur de x_0 on peut utiliser le ***principe de la dichotomie*** qui consiste à partager l'intervalle $[a, b]$ en deux intervalles de même amplitude : $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ et $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ et à reconnaître celui qui contient x_0, puis on recommence le même travail avec cet intervalle jusqu'à ce qu'on obtienne un encadrement satisfaisant de x_0.

Algorithme **:**

Soit x_0 la solution de l'équation $f(x) = 0$.

On veut trouver un encadrement de x_0 à 10^{-n} près $(n \in \mathbb{N}^*)$.

- Si $f(a) = 0$ ou $f(b) = 0$, le problème est résolu.
- Si $f(a).f(b) < 0$, on détermine le réel $c = \frac{a+b}{2}$ milieu de $[a, b]$ et on calcule f(c)
  - Si $f(c) = 0$ alors $x_0 = c$ et le problème est résolu.
  - Si $f(c) \neq 0$, la solution x_0 est soit dans $[a, c]$ soit dans $[c, b]$.

On reprend les mêmes étapes sur l'intervalle qui contient x_0 jusqu'à avoir un encadrement d'amplitude 10^{-n} de la solution.

Activité 9

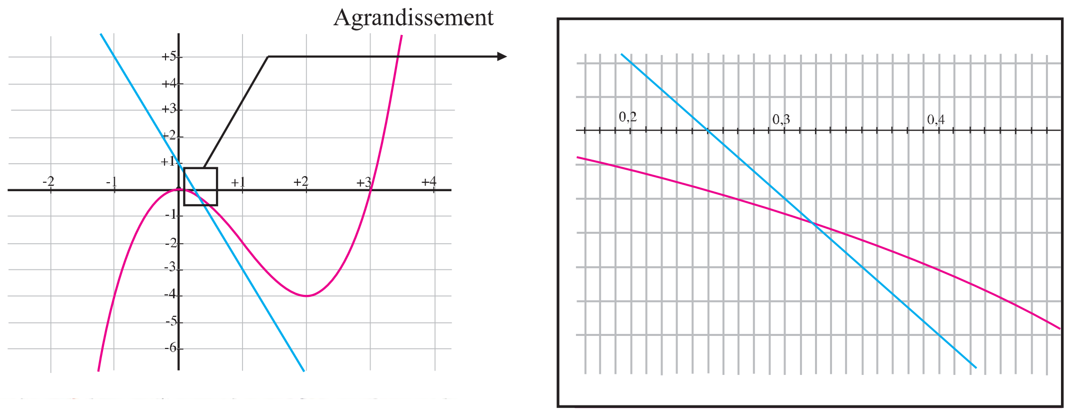
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, 4]$ par $f(x) = x + \sqrt{x} - 3$
1. Montrer que f est continue et strictement croissante.
2. Expliquer pourquoi il existe un unique réel a de [0,4] tel que f(a) = 0.
3. A l'aide de votre calculatrice, donner une valeur approchée de a à 10^{-2} près.
4. Donner le signe de f(x) sur [0,4].

Activité 10

On considère l'équation (E) : $\left(x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0\right)$ et on donne les courbes représentatives ci-dessous des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2$ et $g(x) = -4x + 1$.

1- Vérifier que l'équation (E)est équivalente à l'équation : $f(x) - g(x) = 0$

2- En déduire graphiquement que (E) admet une unique solution α dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.



IV- Théorème de la bijection :

Activité 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par $f(x) = 4x^2 - 1$

Montrer que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

1- Vérifier que $f\left([0,+\infty[\right) \subset [-1,+\infty[$.

2- Montrer que tout élément y de $[-1,+\infty[$ admet un unique antécédent x par f dans $[0,+\infty[$ et que $x = \frac{1}{2}\sqrt{y+1}$.

Commentaire:

Notons alors que tout élément de $[0,+\infty[$ a une image par f dans $[-1,+\infty[$ et que tout élément de $[-1,+\infty[$ a un seul antécédent par f dans $[0,+\infty[$.

On dit que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ dans $[-1,+\infty[$ et il existe une fonction notée f^{-1} appelée **fonction réciproque** ou **bijection réciproque** de f.

f^{-1} est définie sur $[-1,+\infty[$ par $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+1}$.

Théorème (admis)

Si une fonction f est **strictement monotone** sur un intervalle I alors :

- f est une bijection de l'intervalle I sur f(I)
- La fonction réciproque f^{-1} de f a le même sens de variation que f .

Si de plus, la fonction f est **continue** sur I, alors
La fonction réciproque f^{-1} de f, est une bijection continue de l'**intervalle** J = f(I) sur I

Remarque

Pour tout $x \in I$ et $y \in J$, $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur IR_+ par $f(x)=x^2$

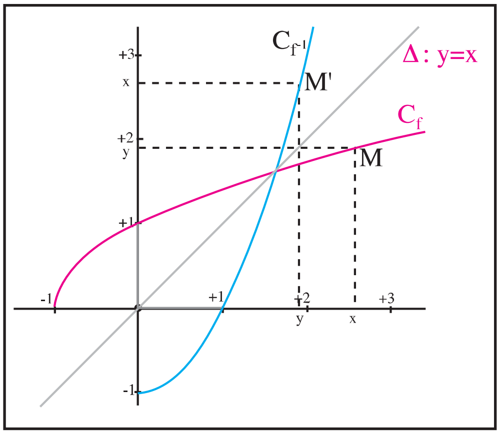
1) Montrer que f est une bijection de IR_+ sur IR_+.
2) Définir la fonction réciproque f^{-1} de f.
3) Construire dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ du plan la droite Δ d'équation : $y = x$ et les courbes représentatives de f et f^{-1}.Que remarquez-vous pour ces deux courbes?

On admet que :

Les courbes représentatives de f et de f^{-1} dans un repère orthonormé du plan, sont symétriques par rapport à la droite $\Delta : y = x$

Pour tout $x \in I$ et $y \in J$

$M(x, y) \in C_f \Leftrightarrow M'(y, x) \in C_{f^{-1}}$



Activité 3

Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x}$.

a- Montrer que f est strictement décroissante sur $]-\infty,1]$.

b- En déduire que f est une bijection de $]-\infty,1]$ sur $[0,+\infty[$.

c- Représenter graphiquement f et f^{-1} dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

Activité 4

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4}{x^2}$

1- Montrer que f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

2- Déterminer les images des intervalles $]0,1]$, $[1,2]$ et $[1,+\infty[$ par f.

Activité 5

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$.

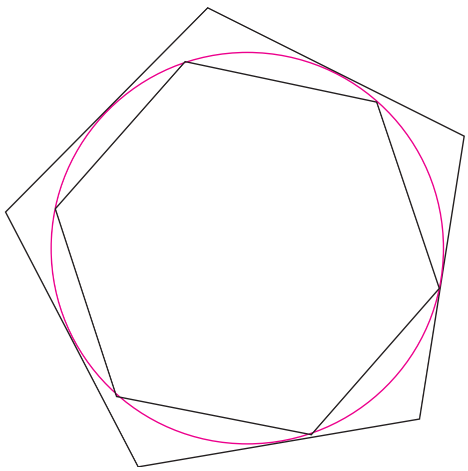
1- Etudier le sens de variation de f.

2- Déterminer les images des intervalles $]-1,1[$ et $[1,+\infty[$ par f.

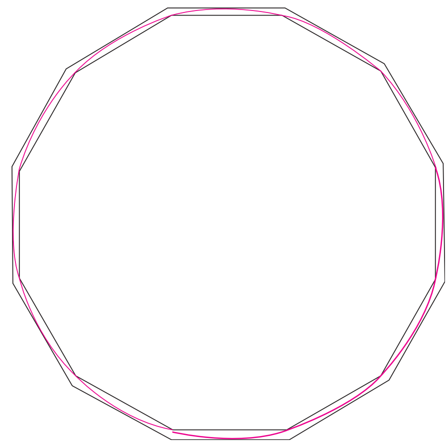
Recherche d'une valeur approchée de π :

On peut considérer l'aire du cercle unitaire comme étant la limite de l'aire d'un polygone régulier à n côtés (polygone à n cotés isométriques) inscrit dans le cercle ou circonscrit au cercle, lorsque n tend vers l'infini.

D'autre part, l'aire du cercle de rayon 1, est égale à π et on remarque que : lorsque le nombre n de côtés augmente l'aire du polygone devient de plus en plus proche de la valeur de π.



n = 12



n = 5

A l'aide d'un tableur (exemple : Excel), remplir le tableau contenant les mesures des aires en fonction du nombre n de cotés pour des valeurs de n de plus en plus grandes.

Pour calculer l'aire du polygone inscrit dans le cercle unitaire, on utilisera la formule suivante : $A_i = \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$

Pour calculer l'aire du polygone circonscrit au cercle unitaire, on utilisera la formule suivante: $A_c = n\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}$

Etape1 : Remplir la colonne « nombre d'arêtes »

Les cellules A3 jusqu'à A15 contiennent le nombre d'arêtes du polygone inscrit

B3 fx =(A3/2*SIN(2*PI()/A3))

A	B	C
Nombre d'arêtes	Aire du polygone inscrit	Aire du polygone circonscri
4	2	
10		
50		
60		
70		
80		
90		
100		
110		
120		
130		
140		
150		

Etape 2 : Dans la cellule B3, écrire la formule : =(A3/2*SIN(PI()/A3)) permettant de calculer l'aire d'un polygone inscrit en fonction du nombre d'arêtes

Etape 3 : Recopier la formule B3 dans les cellules B4 jusqu'à B15

Etape 4 : Dans la cellule C3, écrire la formule =(A3*SIN(PI()/A3)/COS(PI()/A3)) permettant de calculer l'aire d'un polygone circonscrit en fonction du nombre d'arêtes

C3 =(A3*SIN(PI()/A3)/COS(PI()/A3))

A	B	C
Nombre d'arêtes	Aire du polygone inscrit	Aire du polygone circonscri
4	2	4
10	2,938926261	
50	3,133330839	
60	3,135853898	
70	3,137375812	
80	3,138363829	
90	3,139041318	
100	3,139525976	
110	3,139884597	
120	3,140157375	
130	3,140369669	
140	3,140538125	
150	3,14067403	

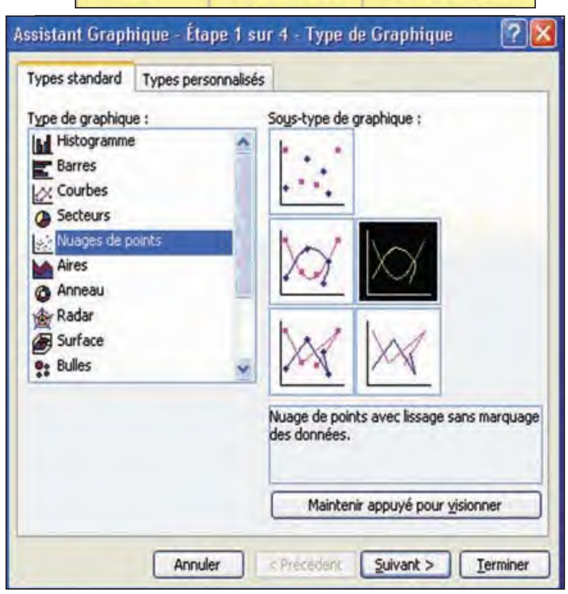
Etape 5 : Recopier la formule C3 dans les cellules C4 jusqu'à C15 ,on obtient le tableau suivant :

Nombre d'arêtes	Aire du polygone inscrit	Aire du polygone circonscrit
4	2	4
10	2,938926261	3,249196962
50	3,133330839	3,145733363
60	3,135853898	3,144466757
70	3,137375812	3,143703625
80	3,138363829	3,143208561
90	3,139041318	3,142869254
100	3,139525976	3,142626604
110	3,139884597	3,1424471
120	3,140157375	3,142310588
130	3,140369669	3,14220436
140	3,140538125	3,142120077
150	3,14067403	3,142052086

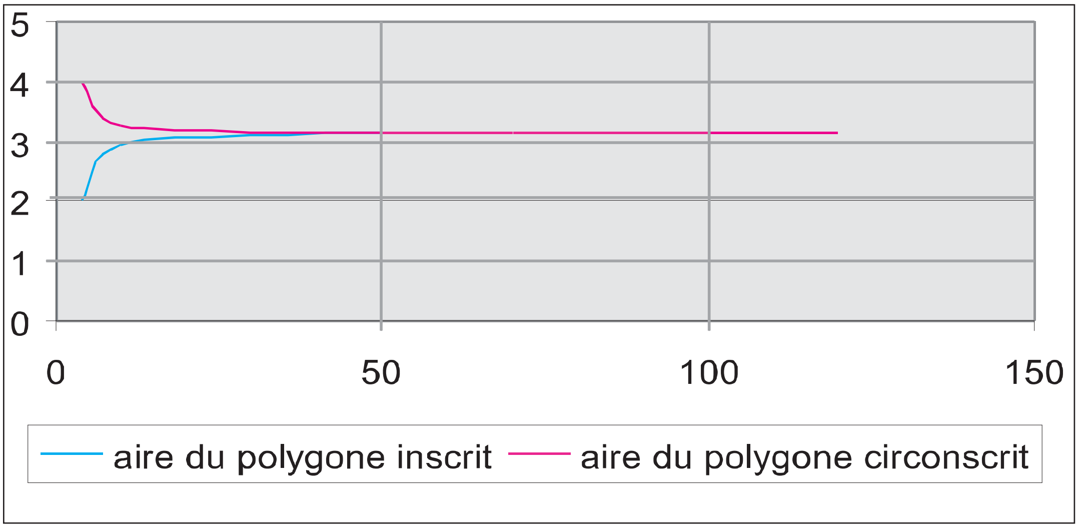
<u>Etape 6</u> :
Sélectionner les trois colonnes A, B et C

<u>Etape 7</u> :
Cliquer sur le bouton « Assistant graphique ».

<u>Etape 8</u> :
Sélectionner la commande « Nuage de points ». Poursuivre la démarche en cliquant à chaque fois sur le bouton « Suivant ».



On obtient le graphique suivant :



Observation des valeurs proches de π pour un grand nombre d'arêtes

Nombre d'arêtes	Aire du polygone inscrit	Aire du polygone circonscrit
4	2	4
10	2,938926261	3,249196962
50	3,133330839	3,145733363
200	3,141075908	3,141851065
500	3,141509971	3,141633996
1000	3,141571983	3,141602989
5000	3,141591827	3,141593067
10000	3,141592447	3,141592757
100000	3,141592652	3,141592655

1- Pour chacune des questions ci-dessous, une seule des réponses proposées est exacte.

QUESTIONS	REPONSES	QUESTIONS	REPONSES
1) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-5x^2-3x+4)=$	☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ 4	7) $\lim\limits_{x\to0}\left\lvert\dfrac{x^3-6}{x^2+1}\right\rvert=$	☐ $+\infty$ ☐ 6 ☐ 0
2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{1}{x^3}+x^2-1)=$	☐ 0 ☐ $+\infty$ ☐ -1	8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left\lvert\dfrac{x+1}{x^2+3x-2}\right\rvert=$	☐ $+\infty$ ☐ $-\dfrac{1}{2}$ ☐ 0
3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^3}-x^2-1\right)^3=$	☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$	9) $\lim\limits_{x\to2^+}(\dfrac{2-x}{4-4x+x^2})=$	☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$
4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x-1}{x+8}\right)=$	☐ $+\infty$ ☐ $-\dfrac{1}{8}$ ☐ 2	10) $\lim\limits_{x\to1}(3x^2-x-2)=$	☐ 1 ☐ 0 ☐ -2
5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^3-6x}{x^2+1}\right)=$	☐ $+\infty$ ☐ 4 ☐ 6	11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=$	☐ 1 ☐ 0
6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+5}{x^2+3x+2}\right)=$	☐ $-\infty$ ☐ $\dfrac{5}{2}$ ☐ 0	12) $\lim\limits_{x\to-1}\sqrt{2x^2+1}=$	☐ $+\infty$ ☐ 1 ☐ $\sqrt{3}$

2- Pour chacune des questions ci-dessous cocher la ou les réponse(s) correcte(s)

QUESTIONS	REPONSES
La fonction $f: x \mapsto \begin{cases} \lvert x-1\rvert & \text{si } x>1 \\ 2x-1 & \text{si } x\le1 \end{cases}$	☐ f est continue en 1 ☐ f n’est pas continue en 1 ☐ f est continue en 2
La fonction $f: x \mapsto \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x>0 \\ \dfrac{1}{x^2+1} & \text{si } x\le0 \end{cases}$	☐ f est continue en 0 ☐ f n’est pas continue en 0 ☐ f est continue sur $\mathbb{R}$
La fonction $f: x \mapsto \begin{cases} \sqrt{2-x} & \text{si } x<2 \\ \dfrac{x}{x-1} & \text{si } x\ge2 \end{cases}$	☐ f n’est pas continue en 2 ☐ f est continue en 2 ☐ f est continue sur $]-\infty,2]$

3 - Calculer les limites suivantes si elles existent:

1) a- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2-x+3\right)$; b- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-5x^2+x+3\right)$

2) a- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^3+5x-2\right)$; b- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5x^3+2x-2\right)$

3) a- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3x^4+x-1\right)$; b- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-5x^4+2x-1\right)$

4 - Calculer les limites suivantes si elles existent:

1) a- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)$; b- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{x^2}\right)$

2) a- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)$; b- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{3x-2}\right)$

3) a- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{5x+1}{x}\right)$; b- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x-\frac{3x^2+1}{4x}\right)$

4) a- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{3x^2-x+2}\right)$; b- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3-5x^2-3}{3x^2-x-1}\right)$

5) a- $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{3x^2-x-2}{x-1}\right)$; b- $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{x^3-8}{x-2}\right)$; c- $\lim\limits_{x\to2^+}\left(\frac{x^2-5x+6}{(x-2)^2}\right)$

6) a- $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}\right)$; b- $\lim\limits_{x\to1^-}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}\right)$

7) a- $\lim\limits_{x\to2^-}\left(\frac{x^2-5x+6}{(x-2)^2}\right)$; b- $\lim\limits_{x\to2^+}\left(\frac{x^2-5x+6}{(x-2)^2}\right)$

5 - Calculer les limites suivantes si elles existent:

1) a- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x-2}$; b- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+2x\right)$; c- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-2x\right)$

2) a- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2-x}\right)$; b- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+2x\right)$

3) a- $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{2-x}{x^2+1}}$; b- $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{\frac{2+x}{x^2-1}}$; c- $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$; d- $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{\sqrt{x}-x}{x}\right)$

6- a- Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ et $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$

b- En déduire : $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}-6}{x}$

7 - Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de définition de la fonction f et calculer les limites de f(x) aux bornes de ce domaine :

a- $f: x\mapsto\frac{x-2}{-x^2+x+2}$; b- $f: x\mapsto\frac{2x-4}{x^2-x+1}$

c- $f: x\mapsto\frac{x^2+2x-1}{x+2}$; d- $f: x\mapsto\frac{x+3}{x^2-5x+6}$

8- Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I=]0\,;3[$ par : $f(x)=\frac{3x-1}{x^2-3x}$

1- Etudier le signe de f sur l'intervalle I.

2- Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle I.

9- Soit f la fonction définie par: $f(x)=\dfrac{2x-5}{x^2-6x+9}$

1- Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f puis étudier son signe.

2- Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.

10- Justifier la continuité de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I:

1) $f(x)=\left(x^2-5\right)^4$; $I=\mathrm{IR}$; 2) $f(x)=\left(\dfrac{3x-4}{x-1}\right)^2$; $I=\left]1,+\infty\right[$

3) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; $I=\left]-\infty,0\right]$; 4) $f(x)=\sqrt{3+\cos^2 x}$; $I=\mathrm{IR}$

5) $f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$; $I=\left[0,+\infty\right[$; 6) $f(x)=\sin\left(\sqrt{x}\right)$; $I=\left[0,+\infty\right[$

11- a) f est une fonction vérifiant: pour tout réel $x>1, 1-\dfrac{1}{x^2}\le f(x)\le\dfrac{x+1}{x}$.

Peut-on calculer la limite de f en $+\infty$? Si oui déterminer cette limite.

b) g est une fonction vérifiant : pour tout réel $x>10$, $-1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}<f(x)<-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

Peut-on calculer la limite de f en $+\infty$?

c) Calculer: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(2x)}{x^2}$

12- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par: $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\sin(\dfrac{1}{x})$

Calculer les limites de f en 0 , $+\infty$ et $-\infty$.

13- Soit u une fonction définie sur $\left[1,+\infty\right]$ et telle que: Pour tout $x\in[1\,;+\infty[$, $0\le u(x)\le x$ et soit f la fonction définie sur $\left[1,+\infty\right]$ par $f(x)=1+\dfrac{u(x)}{x^2}$.

1) Montrer que si $x\ge 1$ on a : $-\dfrac{1}{x}+1\le f(x)\le\dfrac{1}{x}+1$.

2) En déduire la limite de f en $+\infty$.

14- Soit dans IR l'équation : $x^3-3x^2+1=0$ (E).

1- Montrer que l'équation (E) admet une solution dans l'intervalle $\left]-1,0\right[$.

2- On pose $f(x)=x^3-3x^2+1$ pour $x\in\mathrm{IR}$

a- Calculer f(0) et f(3).

b- Peut-on appliquer le corollaire de la page 30 sur l'intervalle $[0,3]$?

c- Calculer f(2) et en déduire que l'équation (E) admet deux autres solutions.

3- Donner un encadrement d'amplitude 0,5 de chacune des trois solutions de (E).

15- Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\left|3x^2+x-4\right|-2$

1- Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2- montrer que f est continue sur IR.

3- Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.
4- A l'aide du graphique, déterminer le nombre de solutions de l'équation f(x) = 0.
5- Donner un encadrement de chacune des solutions à 10^{-2} près .
6- Déterminer les valeurs exactes des solutions.

16- Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x$

1- Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2- Etudier les variations de f .
3- a- calculer $f(-3)$ et $f(2)$.
   b- Montrer que l'équation $f(x)=5$ admet exactement trois solutions.
   c- Donner un encadrement à 10^{-1} près de la solution qui appartient à l'intervalle $[-3,2]$.

17- Soit f la fonction définie sur IR_+ par : $f(x)=\sqrt{x}+x^2-4$.
1) Montrer que f est continue et strictement croissante sur IR_+ .
2) En déduire que f réalise une bijection de IR_+ sur lui même.
3) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α dans $[0,+\infty[$ et que $1{,}6<\alpha<1{,}7$.

18- On considère l'équation : $x^4-4x^3+2=0$ (E)
a) En utilisant le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto x^4-4x^3+2$, montrer que (E) admet une solution unique α sur l'intervalle $[0,1]$.
b) Trouver un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
c) Montrer que (E) admet une solution unique β sur l'intervalle $[3,4]$ puis trouver un encadrement d'amplitude 10^{-1} de β.

19- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+4$.
1) Tracer la courbe C de f dans un repère orthonormé du plan.
2) Pour chaque point M de C d'abscisse x non nulle on considère la droite (OM) et on désigne par d(x) le coefficient directeur de (OM).

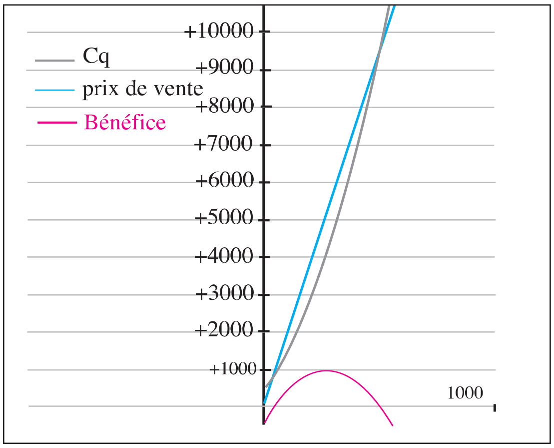
Vérifier que $d(x)=x+\frac{x}{4}$.

3) Etudier la limite de d en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$.
4) Pour quelle position de M a-t-on :
   a) d(x)=5 ?   b) d(x)=4 ?   c) d(x)=2 ?
5) Pour t non nul, soit $M(t,t^2+4)$ et D_t la droite (OM).
   Déterminer selon les valeurs de t, le nombre de points d'intersection de C et D_t.
6) Expliquer les résultats trouvés dans 4).
7) En économie, si f(x) représente le coût de production de x objets (pour x > 0), expliquer pourquoi d(x) représente le coût unitaire moyen pour une production de x objets.

20- Le coût total de fabrication d'une quantité x d'un produit, exprimée en centaines d'unités, est représenté graphiquement par la courbe ci-contre.

1- Déterminer la quantité d'objets, à la centaine près, à fabriquer pour avoir un coût minimum.

2- On suppose que le prix de vente d'une centaine d'objets est égal à 13 000 dinars. Déterminer graphiquement le nombre minimum et le nombre maximum d'objets que l'entreprise doit fabriquer pour réaliser un bénéfice.



21- A la suite d'une épidémie dans une région, on a constaté que le nombre de malades, n jours après l'apparition des premiers cas, est : $-n^3 + 75n^2$, pour n entier tel que $0 < n < 60$.

Soit f la fonction définie sur [0 ; 60] par :

$f(x) = -x^3 + 75x^2$

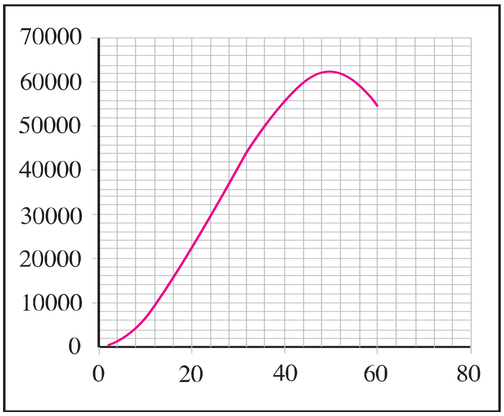
On donne sur le graphique ci-contre, la courbe représentative de f.

1-a- Déterminer graphiquement le jour où le nombre de malades est maximal durant cette période de 60 jours.

b- Préciser le nombre de malades ce jour là

2- a- Déterminer graphiquement le jour où le nombre de malades est égal à 22000

b- Déterminer graphiquement la période durant laquelle le nombre de malades est supérieur à 56000.



22- ***Partie A*** Soit g la fonction définie sur [0 ; +∞[par : $g(x) = x^3 - 1200x - 100$.

1- Déterminer la limite de g en +∞.
Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

2- Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α dans l'intervalle [20 ; 40].
Donner une valeur approchée de α à l'unité près.

3- En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

Partie B Soit f la fonction définie sur]0 ; +∞[par : $f(x) = x + 50 + \dfrac{1200x + 50}{x^2}$.

On appelle Csa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1- Déterminer la limite de f à droite en 0 et en +∞.

2- Etudier les variations de f.

3- Montrer que la droite D d'équation y = x + 50 est asymptote à la courbe C.

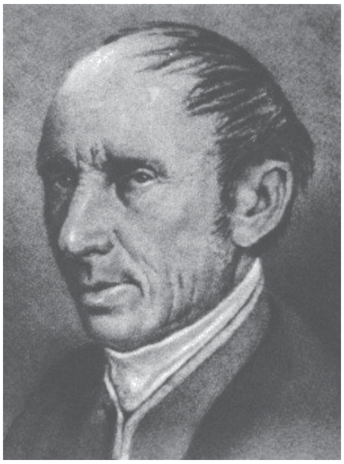
4- Construire C et D sur le même graphique.

5- Résoudre graphiquement l'équation f(x) = 130. On donnera les valeurs approchées des solutions à l'unité près.

Math culture

Au XIXe siècle le mathématicien français Augustin Louis Cauchy définit la continuité d'une fonction sur un intervalle $[a,b]$ de la manière suivante :

« Si en partant d'une valeur x, comprise entre a et b, on attribue à la variable x un accroissement infiniment petit α, la fonction elle- même recevra pour accroissement la différence $f(x+\alpha)-f(x)$...La fonction f est continue en x si la différence $f(x+\alpha)-f(x)$ décroît indéfiniment avec celle de α ».Ce ci est à comparer avec la définition moderne " f est continue en x si $\lim\limits_{\alpha\to 0} f(x+\alpha)=f(x)$ ". Mais pour arriver à cette définition, il a fallu d'abord définir d'une manière précise et opérationnelle une limite.



Augustin Louis Cauchy
1789 - 1857

Cauchy est devenu professeur à l'école polytechnique en 1814,après avoir

débuté une carrière d'ingénieur des ponts et chaussées qui ne lui convenait pas. Il rédigea un cours d'analyse , dans lequel il prit comme notions fondamentaux la limite et la continuité. L'analyse moderne était née.

- ***Vers 1760*** Publication de l'article " limites" par Jean Laurent d'Alembert (1717 – 1783)

D'ALEMBERT
(1717-1783)

- ***Vers 1821***
  Publication du premier volume du cours d'analyse de l'école royale polytechnique où Cauchy fonde l'Analyse sur la notion de limite et de fonction continue