Oscillations forcées d'un pendule élastique en régime sinusoïdal

6

Les marées sont des oscillations périodiques. À quoi sont-elles dues et en quoi diffèrent-elles des tsunamis?

Le violoniste fait vibrer les cordes de son instrument en les frottant avec l'archet pour produire un son avec des notes plus ou moins hautes.

Clarinettes "graves" offrant une musique très impressionnante

- **Pourquoi ces formes particulières des instruments de musique comme le violon, le violoncelle, le contre basse, la clarinette … ?**
- **Dans certaines voitures, on entend parfois des bruits inconfortables de la carrosserie. A quoi sont-ils dus et pourquoi à des vitesses bien déterminées et non pas à d'autres ?**
- **Pourquoi a-t-on interdit à un régiment de soldats de traverser un pont (même non suspendu) au pas cadencé ?**

OSCILLATIONS FORCÉES D'UN PENDULE ÉLASTIQUE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

Comme dans la nature, nombreux sont les domaines où les oscillations mécaniques sont importantes. Lorsqu'elles sont recherchées, il faut penser à les entretenir. En fait, pour éviter la diminution de leur amplitude due aux frottements inéluctables, on doit leur apporter de l'énergie. Comme dans le cas des oscillations électriques, lorsque l'apport de l'énergie se produit périodiquement avec un dispositif approprié appelé excitateur, les oscillations mécaniques entretenues sont dites forcées.

1 PRODUCTION D'OSCILLATIONS FORCÉES

Manipulation

On utilise le dispositif expérimental schématisé sur la figure 1. Il est constitué essentiellement d'un pendule élastique horizontal (système solide-ressort), d'un moteur (M) et d'un dispositif d'entraînement du pendule par le moteur. Le solide est un palet (S) de masse m = 100 g, placé sur un banc à coussin d'air. Par un point A de l'un de ses bords latéraux, il est attaché à un ressort de raideur k = 6.5 $N.m^{-1}$. Par l'intermédiaire d'un dispositif de guidage, le ressort est relié par son autre extrémité à un excentrique solidaire du moteur (M) de fréquence de rotation N réglable. De cette manière, lorsque le moteur est en marche, l'extrémité B du ressort est assujettie à se déplacer parallèlement au bord supérieur du banc à coussin d'air. Un stylet fixé sur le solide (S) permet d'enregistrer l'évolution de l'élongation de son centre d'inertie G en fonction du temps, sur une feuille de papier enroulée sur un cylindre tournant à vitesse constante.

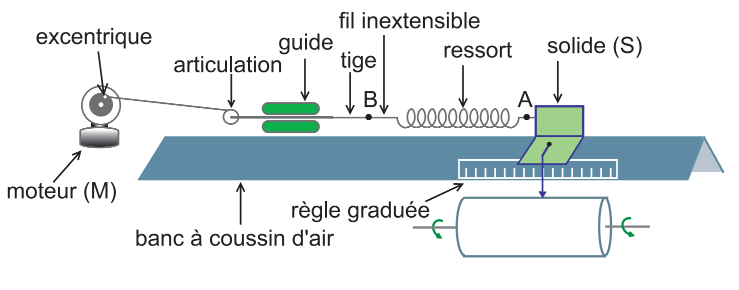


Fig.1 : Dispositif d'étude des oscillations forcées d'un pendule élastique horizontal

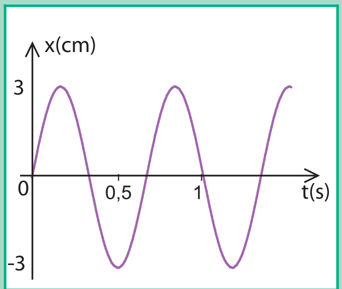


Fig.2 : Enregistrement graphique des oscillations

En faisant tourner le moteur à la fréquence N = 1.5 $tr.s^{-1}$, le palet (S) se met à osciller sur le banc de part et d'autre de sa position de repos. Une fois le régime permanant est établi, on réalise un enregistrement graphique qui donne la courbe de la figure 2.

Remarque :
On peut réaliser une acquisition et un traitement informatique des mesures. A cette fin, on relie le solide (S) à un montage potentiométrique qui permet de mesurer la différence de potentiel entre le point M qui correspond à la position de (S) à un instant t et le point O qui correspond à la position de (S) au repos et qui sera prise comme origine des abscisses. La tension U_{OM} est proportionnelle à l'abscisse x du point M (Fig.3)

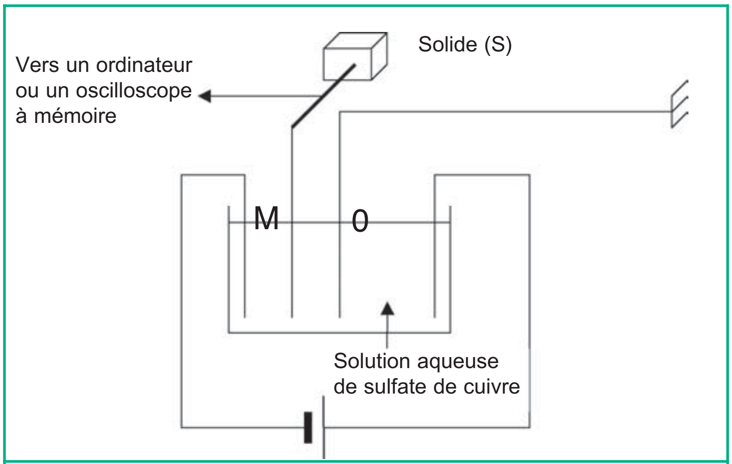


Fig.3 : Schéma du montage potentiométrique

Questions

1°) Déterminer graphiquement la fréquence des oscillations du pendule élastique, la comparer à sa fréquence propre et à la fréquence de rotation du moteur. En déduire qu'il s'agit d'oscillations forcées.

2°) Déterminer l'expression de l'élongation x en fonction du temps.

Interprétation

Au cours de son mouvement de rotation uniforme à la fréquence N, le moteur (M) entraîne l'extrémité B du ressort dans un mouvement rectiligne sinusoïdal suivant la direction horizontale du ressort, à la fréquence N.

Ainsi, l'élongation du centre d'inertie G s'écrit : $x = X_m \sin(2\pi Nt + \varphi)$.

On dit alors que le pendule élastique effectue des oscillations forcées imposées par le moteur qui joue le rôle d'excitateur.

Conclusion

Etant soumis à des excitations périodiques, le pendule élastique effectue des oscillations forcées sinusoïdales de période égale à celle de l'excitateur. L'oscillateur qu'est le pendule élastique est appelé résonateur.

Remarque :
La dénomination résonateur sera justifiée plus loin.

2 INFLUENCE DE LA FRÉQUENCE DE L'EXCITATEUR SUR L'AMPLITUDE DES OSCILLATIONS

Manipulation

Pour étudier expérimentalement l'influence de la fréquence N de l'excitateur sur l'amplitude X_m des oscillations du pendule, on reprend le dispositif de la figure 1, sans le système d'enregistrement (Fig.4) et on met le moteur en marche à la plus petite valeur possible de la fréquence N. Le pendule se met à osciller de part et d'autre de sa position d'équilibre, comme précédemment, à la même fréquence N, mais avec une amplitude très faible. En faisant augmenter progressivement la valeur de la fréquence N du moteur, l'amplitude des oscillations devient de plus en plus grande. Puis, lorsque N s'approche d'une certaine valeur légèrement inférieure à la fréquence propre N_o du pendule élastique, X_m augmente beaucoup plus qu'auparavant. Mais, dès qu'elle dépasse cette valeur à laquelle elle est la plus élevée, X_m rechute pour continuer par la suite à décroître en tendant de manière modérée vers des valeurs de plus en plus faibles.

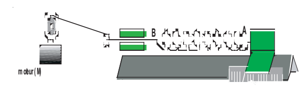


Fig.4 : Palet (S) sans le système d'enregistrement

Questions

1°) Est-ce que les observations et les constatations faites ne sont pas semblables à des constatations faites dans une étude antérieure ? Dans l'affirmative, rappeler cette étude ainsi que les constatations qui lui sont spécifiques.

2°) Justifier la qualification du pendule comme étant un résonateur.

3°) Comparer la valeur de la fréquence à laquelle se produit le phénomène de résonance d'élongation avec la valeur de la fréquence propre du résonateur.

Conclusion

En régime sinusoïdal forcé, l'amplitude X_m des oscillations d'un pendule élastique dépend de la fréquence N des excitations. Elle atteint sa valeur la plus élevée à une fréquence N_r légèrement inférieure à la fréquence propre N_o du pendule : on dit qu'il y a résonance d'élongation.
N_r est appelée fréquence de résonance.

3 INFLUENCE DE L'AMORTISSEMENT SUR L'AMPLITUDE DES OSCILLATIONS

Manipulation

Expérience 1

On reprend de nouveau le dispositif expérimental de la figure 1, sans le système d'enregistrement. On augmente l'amortissement dû à la résistance de l'air en fixant sur le palet (S) une voile sous forme d'une plaque rectangulaire perpendiculaire à l'axe du banc à coussin d'air (Fig.5) et on suit comme précédemment l'évolution de l'amplitude X_m des

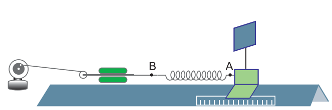


Fig.5 : Palet (S) avec voile

oscillations du résonateur en fonction de la fréquence N de l'excitateur. En procédant de la même manière, on relève les mêmes constatations. Toutefois, l'amplitude des oscillations à la résonance est atteinte plus régulièrement et reste inférieure à celle du premier cas (palet (S) sans voile). De plus, bien qu'elle reste légèrement inférieure à la fréquence propre N_o du pendule, la fréquence de résonance N_r est encore plus petite que celle du premier cas

Expérience 2

En faisant de même avec une plaque un peu plus grande, on réussit à faire entrer le pendule élastique en résonance, mais avec une amplitude beaucoup moins remarquable et à une fréquence N_r plus petite que celle du deuxième cas, tout en restant légèrement inférieure à sa fréquence propre N_o.

Expérience 3

En utilisant pour la voile une plaque de grandes dimensions, les oscillations deviennent à peine remarquables à cause de leur petite amplitude qui reste pratiquement telle quelle si elle ne diminue pas légèrement quand on augmente la fréquence des excitations.

Remarque

La manipulation précédente peut être réalisée avec un pendule élastique vertical, l'amortissement varie selon que le solide (S) oscille dans l'air ou dans un liquide avec ou sans rondelle (Fig.6).

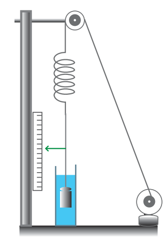


Fig.6 : Pendule élastique vertical

Questions

1°) En s'aidant des résultats de l'étude expérimentale faite, comparer l'influence de l'amortissement sur les oscillations sinusoïdales forcées d'un pendule élastique avec l'influence du facteur de même type sur le circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé (chapitre 4).

2°) Dans le cas de l'expérience 3, le régime forcé du pendule élastique est dit linéaire. Justifier cette qualification.

Interprétation

En fixant sur le palet une voile de dimensions de plus en plus grandes, on augmente l'amortissement, ce qui explique la diminution de l'amplitude X_m des oscillations à la résonance. Lorsque l'amortissement est très faible (absence de voile sur le palet), l'amplitude X_{mo} à la résonance est très grande et diminue considérablement dès que la fréquence des excitations est légèrement différente de la fréquence de résonance. Une telle résonance est dite **aiguë**.

Avec un amortissement moyen (avec une plaque de petites dimensions), l'amplitude X_{m1} à la résonance est plus petite que X_{mo} et sa diminution constatée avec l'écart de la fréquence N des excitations par rapport à la fréquence N_{r1} de résonance est plutôt modérée.

Pour un amortissement important (avec une plaque de dimensions moyennes comme celle de l'expérience 2), l'amplitude des oscillations devient moins sensible à la variation de la fréquence des excitations. La résonance est dite alors **floue**.
Pour un amortissement très important, le pendule répond toujours mais difficilement avec des oscillations de très petite amplitude pratiquement indépendante de la fréquence N des excitations, ce qui explique l'impossibilité d'obtenir dans ces conditions une résonance. C'est pour cette raison qu'un tel régime forcé est qualifié de régime **linéaire**.

Conclusion

Pour une fréquence d'excitation donnée, l'amplitude des oscillations forcées d'un pendule élastique est d'autant plus petite que l'amortissement est plus important. Avec un faible amortissement, la résonance est aiguë. Avec un amortissement important, la résonance est floue.
La fréquence de résonance est inférieure à la fréquence propre du pendule élastique. Cependant, l'écart entre ces fréquences est d'autant plus remarquable que l'amortissement est plus important.

4 ÉTUDE THÉORIQUE

Pour l'étude théorique des oscillations forcées du pendule élastique, on choisit comme repère galiléen, le repère $(O,\vec{i})$ lié au laboratoire (Fig.7), $\vec{i}$ étant le vecteur unitaire de l'axe du ressort, la position de repos O du centre d'inertie G de (S) étant son origine et x étant son élongation comprise entre $+X_m$ et $-X_m$.
Cependant, pour développer cette étude, on ne va pas procéder par l'application de la RFD. On va plutôt mettre à profit l'analogie formelle mécanique-électrique, dégagée à la fin de l'étude des oscillations libres (page 149).

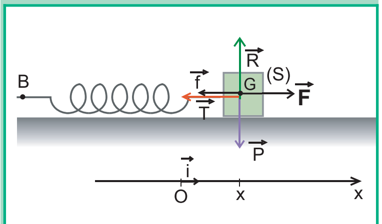


Fig.7 : Choix du repère d'étude

4.1- Nature et vitesse des oscillations

Afin de pouvoir exploiter l'analogie formelle mécanique électrique sus-sindiquée, Il faut associer à la valeur $F = F_m \sin 2\pi Nt$ de la force excitatrice une grandeur électrique analogue. Ça ne peut être que la tension excitatrice $u = U_m \sin 2\pi Nt$. Ainsi, l'analogie à utiliser pour déterminer la nature des oscillations du pendule élastique peut être résumée comme suit :

Oscillateur électrique	Oscillateur mécanique
q	x
i = dq/dt	v = dx/dt
l	m
r	h
1/C	k
$u = U_m \sin 2\pi Nt$	$F = F_m \sin 2\pi Nt$

Par conséquent, le dispositif analogue au dispositif mécanique de la figure 7 est le circuit RLC série schématisé à la figure 8. On a vu au chapitre 4 que pour un tel circuit RLC série, en régime sinusoïdal forcé, l'équation différentielle s'écrit :

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U_m \sin \omega t, \text{ avec } \omega = 2\pi N,$$

ce qui donne par analogie, comme équation différentielle en x :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + kx = F_m \sin \omega t.$$

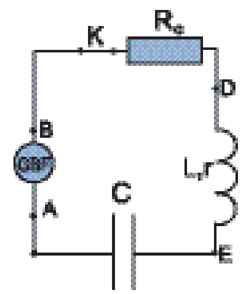


Fig.8 : Circuit RLC série soumis à la tension excitatrice $u = U_m \sin\omega t$

Une telle équation différentielle admet comme solution particulière : $\mathbf{x = x_m \sin(\omega t + \varphi_x)}$, ce qui explique les oscillations sinusoïdales de (S) à la fréquence N de l'excitateur, en régime permanent.

Pour la vitesse ($v = \frac{dx}{dt}$) du palet, il s'en suit :

$v = \omega X_m \sin(\omega t + \varphi_x + \frac{\pi}{2})$

Donc, on a :

$v = V_m \sin(\omega t + \varphi_v)$, avec $V_m = \omega . X_m$ et $\varphi_v = \varphi_x + \frac{\pi}{2}$ rad.

Questions

Refaire la même étude qui consiste en la détermination de x(t) et de v(t) en procédant comme suit :

1°) a - Par recours à l'analogie formelle électrique-mécanique, écrire, en la vitesse v du centre d'inertie G du palet, l'équation différentielle régissant les oscillations forcées du pendule élastique.

b - Ecrire l'expression de la vitesse instantanée v(t).

2°) De l'expression de v(t) déduire celle de x(t).

Conclusion

Etant régies par l'équation différentielle :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + kx = F_m \sin\omega t \Leftrightarrow m\frac{dv}{dt} + hv + k\int v dt = F_m \sin\omega t,$$

les oscillations forcées d'un pendule élastique évoluent sinusoïdalement au cours du temps à la pulsation ω de l'excitateur.

$x = X_m \sin(\omega t + \varphi_x) \Leftrightarrow v = V_m \sin(\omega t + \varphi_v)$, avec $V_m = \omega X_m$ et $\varphi_v = \varphi_x + \frac{\pi}{2}$ rad.

4.2- Amplitude des oscillations

Par analogie avec l'expression de la valeur maximale Q_m de la charge q du condensateur d'un circuit RLC série en régime forcé sinusoïdal, on peut dégager l'expression de la valeur maximale X_m de l'élongation du centre d'inertie G du palet du pendule élastique x.

On a : $Q_m = \dfrac{U_m}{\sqrt{R^2\omega^2 + (L\omega^2 - \frac{1}{C})^2}}$, d'où : $\boxed{X_m = \dfrac{F_m}{\sqrt{h^2\omega^2 + (m\omega^2 - k)^2}}}$

Donc, comme pour Q_m, l'amplitude X_m dépend de la pulsation et, par suite, de la fréquence N de l'excitateur.

Questions

Par analogie avec l'expression de la valeur maximale I_m de l'intensité du courant oscillant dans un circuit RLC série en régime forcé sinusoïdal, montrer qu'en régime mécanique semblable, la valeur maximale V_m de la vitesse du centre d'inertie G du palet du pendule élastique s'écrit :

$$V_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2\omega^2 + (m\omega - \frac{k}{\omega})^2}}$$

4.3- Résonance d'élongation et résonance de vitesse

Résonance d'élongation

La même analogie nous permet de caractériser la résonance d'élongation comme suit :

	Résonance de charge	Résonance d'élongation
Fréquence de résonance	$N_r = \sqrt{N_o^2 - \frac{R^2}{8\pi^2L^2}}$	$N_r = \sqrt{N_o^2 - \frac{h^2}{8\pi^2m^2}}$

La résonance d'élongation se manifeste bien à une fréquence N_r de l'excitateur légèrement inférieure de la fréquence propre N_o du résonateur, et ce, à cause du terme $\frac{h^2}{8\pi^2m^2}$ dû au cœfficient de frottement non nul h. De plus, l'écart (N_o - N_r) augmente avec ce terme.

D'autre part, l'amortissement influe sur l'amplitude des oscillations : plus h est grand, plus X_m est petite.

Questions

1°) Montrer que la résonance d'élongation devient impossible pour les valeurs de h supérieures à une valeur limite $h_o = m\omega_o\sqrt{2}$.

2°) Montrer que si h était nul, la résonance aurait lieu pour $\omega = \omega_o$ avec une amplitude X_m qui tendrait vers l'infini. Commenter ce cas idéal.

Résonance de vitesse

De la même manière que pour la résonance d'élongation, on peut caractériser la résonance de vitesse par analogie avec la résonance d'intensité en électricité :

	Résonance d'intensité	Résonance vitesse
Fréquence de résonance	$N_r = N_o$	$N_r = N_o$
Valeur maximale de la grandeur oscillante	$I_m = \frac{U_m}{R}$	$V_m = \frac{F_m}{h}$

5 PUISSANCE MECANIQUE MOYENNE

En régime sinusoïdal forcé, le pendule élastique oscille sans diminution d'amplitude grâce à l'énergie qui lui est transférée périodiquement par l'excitateur. La puissance mécanique moyenne P de l'oscillateur peut être exprimée par recours à l'analogie formelle électrique-mécanique.

Puissance électrique moyenne	⇔	Puissance mécanique moyenne
$p = \frac{U_m I_m}{2} \cos\varphi$, avec $\varphi = \varphi_i - \varphi_u$	⇔	$p = \frac{F_m V_m}{2} \cos\varphi$, avec $\varphi = \varphi_v - \varphi_F$
$\cos\varphi = \frac{R}{Z}$	⇔	$\cos\varphi = \frac{h}{Z}$
$U_m = Z I_m$	⇔	$U_m = Z V_m$
$P = \frac{1}{2} R I_m^2$	⇔	$P = \frac{1}{2} h V_m^2$

6 IMPORTANCE DES OSCILLATIONS MÉCANIQUES FORCÉES ET DE LA RÉSONANCE

Les oscillations mécaniques forcées ainsi que le phénomène de résonance sont très importants tant dans la nature que dans les différents domaines de la vie (en acoustique, en industrie…). Toutefois, elles sont parfois recherchées, surtout à la résonance comme en acoustique ; par contre, dans d'autres cas, elles sont à éviter parce qu'elles sont gênantes ou même dangereuses.

1- Dans la nature : phénomène des marées

Dans certaines baies, il se produit régulièrement, au cours de l'année, le phénomène naturel des marées (Fig.9) qui consiste en des oscillations forcées de grandes quantités d'eau d'océans, les excitateurs sont la lune et le soleil.
Ayant, dans la baie, une période propre proche de la période des marées (de l'ordre de 12 heures), l'eau entre en résonance. Ainsi, à l'entrée d'une baie, on peut observer des marées hautes de dix mètres et même plus, alors qu'en haute mer l'amplitude n'est que de l'ordre de 30 cm. L'énergie des marées peut être mise à profit pour faire fonctionner les turbines d'une centrale marémotrice.


Fig.9 : Exemple de marée

2- En acoustique

En musique, les caisses des instruments à cordes ainsi que l'air qu'elles contiennent entrent en résonance sous l'action des vibrations des cordes, ce qui permet de renforcer les notes produites.
La caisse de résonance et l'air qu'elle contient constituent un

oscillateur mécanique de période propre dépendant de la forme de la caisse.
La membrane d'un haut parleur forme le système oscillant qui engendre les vibrations sonores. Elle doit vibrer avec une amplitude importante dans un domaine particulier de fréquences audibles. Ces vibrations forcées doivent correspondre à une résonance «floue», sinon, selon leur fréquence, certains sons seraient amplifiés beaucoup plus que d'autres.

3- En industrie : oscillations forcées dues aux trépidations du rotor d'une machine tournante

Dans le cas où la partie tournante d'une machine n'est pas parfaitement équilibrée, elle joue par ses trépidations, le rôle d'excitateur pour les autres parties de la machine, susceptibles de vibrer.
Lorsque la fréquence de rotation de la machine avoisine la fréquence propre de l'une ou l'autre de ses parties, l'amplitude des oscillations que prend cette machine peut devenir tellement importante que de dangereuses ruptures se produisent.
Ceci explique les vibrations inconfortables ou bruyantes qu'on observe parfois dans une voiture pour certains régimes de rotation du moteur, leur amplitude est d'autant plus grande que les pièces de la carrosserie mises en cause sont plus desserrées, puisque leur amortissement devient plus faible.
C'est aussi l'une des raisons pour lesquelles on équilibre les roues des véhicules en plaçant une masselotte de plomb sur la jante de la roue.
Les paniers à linge des machines à laver sont suspendus à des amortisseurs qui évitent aux châssis une excitation à ses fréquences propres lorsque le panier est en rotation.
Pour les mêmes raisons, les machines outils sont souvent munies de supports amortisseurs.

EXEMPLE D'ILLUSTRATION

Pour illustrer les effets de trépidation, on peut utiliser l'exemple du gyroscope (Fig.10). Cet appareil est constitué essentiellement d'un stator et d'un rotor. La partie fixe (stator) est un bâti portant une série de lamelles d'acier d'inégales longueurs, donc de différentes périodes propres. La partie tournante (rotor) est un disque métallique mobile autour d'un axe fixe passant par son centre et perpendiculaire à son plan.
Un petit trou percé au voisinage du pourtour du disque fait que son centre d'inertie n'est pas situé exactement sur l'axe de rotation et provoque de légères trépidations au cours de sa rotation. Les oscillations sont transmises aux lamelles.
Le disque est mis en rotation à l'aide d'une ficelle initialement enroulée sur son axe. A cause des frottements, le disque tour-

Fig.10 : Gyroscope à lames

ne de moins en moins vite.
Lorsque la fréquence des trépidations avoisine la fréquence propre de l'une des lamelles, celle-ci entre en résonance. On voit donc les lamelles entrer en résonance, une à une, sachant que c'est la plus courte qui commence la première vu que sa fréquence propre est la plus grande.

4- Dans les ouvrages

Lors d'intempéries, les ponts suspendus peuvent être considérés comme des résonateurs. Si la fréquence des tourbillons dus à une tornade est voisine de la fréquence propre des oscillations du pont, il y aura une résonance susceptible d'engendrer de très fortes amplitudes, d'où les effets "spectaculaires" menant parfois à la rupture du pont. Pour plus de détails, il est recommandé de lire la rubrique " en savoir plus ".

L'essentiel

- En régime forcé, le dispositif d'entretien des oscillations d'un pendule élastique constitue l'excitateur tandis que le pendule constitue le résonateur.
- La fréquence des oscillations forcées d'un pendule élastique est égale à celle de l'excitateur.
- En présence de frottements visqueux, les oscillations sinusoïdales forcées d'un pendule élastique sont régies par l'équation différentielle en x : $\boxed{m\frac{d^2}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + kx = F}$, ce qui équivaut à l'équation en v : $\boxed{m\frac{dv}{dt} + hv + k\int vdt = F}$

avec $F = F_m\sin\omega t$, valeur algébrique de la force excitatrice.

- En régime sinusoïdal forcé, le résonateur oscille en retard de phase par rapport à l'excitateur avec une amplitude X_m qui dépend de la fréquence N de l'excitateur :

$$\boxed{X_m = \frac{F_m}{\sqrt{4h^2\pi^2N^2 + (k - 4m\pi^2N^2)^2}}}$$

- De même, la vitesse maximale $V_m = \omega X_m$ dépend de la fréquence N de l'oscillateur :

$$\boxed{V_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 + (m\omega \frac{k}{\omega})^2}}}$$

- En régime sinusoïdal forcé la résonance d'élongation se produit à la fréquence :

$$\boxed{N_r = \sqrt{N_o^2 - \frac{h^2}{8\pi^2L^2}}}$$

Cependant, la résonance de vitesse se produit à la fréquence $\boxed{N_r = N_o}$

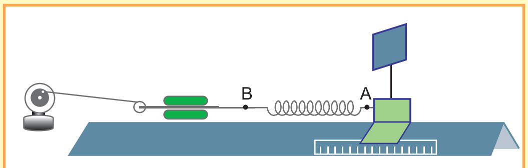
- La résonance est d'autant plus aiguë que l'amortissement est faible.
- Dans le cas d'un amortissement fort, la résonance est floue. Lorsque h dépasse la valeur limite $\boxed{h_l = m\omega_o\sqrt{2}}$, la résonance devient impossible.
- En régime sinusoïdal forcé, la puissance mécanique moyenne est donnée par la relation :

$$\boxed{P = \frac{1}{2}hV_m^2}$$

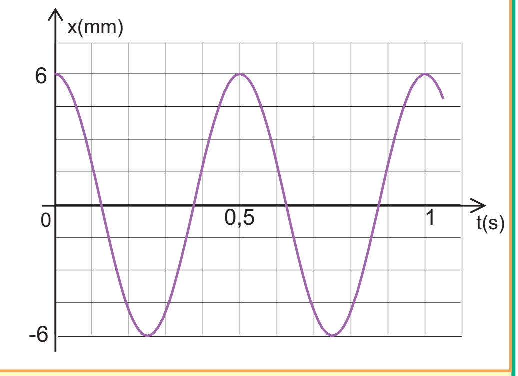
Exercices

Exercice résolu 1

ÉNONCÉ



L' extrémité B d'un ressort de raideur k = 40 $N.m^{-1}$ est reliée indirectement à un excentrique fixé à un moteur. La deuxième extrémité A du ressort est attachée à un palet (S) de masse m = 100 g. Sur (S) est fixée une plaque rectangulaire comme l'indique la figure ci–contre, et ce, afin de créer des frottements supposés visqueux et faibles.
Le système {palet – ressort} se déplace sur un banc à coussin d'air horizontal.
Lorsque le moteur tourne à une fréquence N, le palet (S) se trouve soumis à une force excitatrice sinusoïdale de valeur maximale F_m et de pulsation $\omega = 2\pi N$. Il effectue alors des oscillations de part et d'autre de sa position de repos.
Le stylet fixé sur le palet permet d'enregistrer la position du centre d'inertie G de (S) au cours du temps.



1°) Préciser le rôle joué par le moteur muni de l'excentrique et celui joué par le système {palet – ressort}.
2°) A la valeur N_1 de N, on obtient la courbe x(t) ci contre, x étant l'abscisse du centre d'inertie G du palet (S) dans un repère galiléen $(O, \vec{i})$ horizontal.
Le point O correspond à la position de G lorsque le palet est au repos.
a) Déterminer la fréquence N_1 et l'amplitude X_m des oscillations du palet (S).
b) Ecrire x(t).
3°) Montrer qu'en agissant sur la fréquence N de rotation du moteur, le palet (S) se remettra à osciller avec la même amplitude X_m que précédemment à une fréquence N_2 plus élevée que N_1.
4°) Sachant qu'à N = N_o (fréquence propre du pendule), le palet (S) ocille avec l'amplitude X_m = 15 mm, calculer le cœfficient de frottement h.
On donne : F_m = 0,15 N.

SOLUTION

1°) Le moteur muni de l'excentrique joue le rôle de l'excitateur. Le système { palet - ressort } joue le rôle de résonateur.
2°) a) D'après l'enregistrement x(t), la période des oscillations est T = 0.5 s. Donc, la fréquence N_1 vaut **2 Hz**. L'amplitude des oscillations est $\mathbf{X_m = 6\ mm}$.
b) $x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi_x)$. A t = 0 ; $x = X_m \sin\varphi_x = X_m$, d'où : $\sin\varphi_x = 1 \Leftrightarrow \varphi_x = \frac{\pi}{2}$ rad.

$\omega = 2\pi N = 4\pi\ rad.s^{-1}$. Finalement : $\boxed{x(t) = 6.10^{-3} \sin(4\pi t + \frac{\pi}{2})}$

3°) Les frottements étant faibles, le palet (S) peut entrer en résonance à une fréquence légèrement inféreure à sa fréquence propre $N_o = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$,
soit numériquement : N_o = 3,18 Hz. Or, $N_1 < N_o$. Donc, (S) oscillera de nouveau avec la même amplitude X_m = 6 mm à une fréquence $N_2 > N_o$ et par suite, supérieure à N_1.
4°) Les frottements étant visqueux, l'expression de X_m peut être écrite par analogie avec celle de la charge électrique maximale Q_m, d'où h est tel que : $h^2\omega^2 = (\frac{F_m}{X_m})^2 - (m\omega^2 - k)^2$.
<u>Autre méthode plus astucieuse</u> : A $N = N_0$, c'est la résonance de vitesse qui est caractérisée par $V_m = \frac{F_m}{h} = 2\pi N_0 X_m$, d'où : $h = \frac{F_m}{2\pi N_o X_m}$. **A.N. : $\mathbf{h = 0,5\ N.s.m^{-1}}$.**

Exercice résolu 2

ÉNONCÉ

Une voiture roule sur une piste saharienne, avec une vitesse constante. Elle rencontre des bosses régulièrement espacées d'une distance d = 20 m les unes des autres. La masse totale de la voiture et de son conducteur est m = 1000 kg.
1°) Sachant que la voiture est assimilable à un système {solide ; ressort} oscillant verticalement, montrer que le conducteur doit éviter de rouler à une vitesse critique v_c. Calculer v_c sachant que la raideur du ressort vaut $k = 4.10^4\ N.m^{-1}$.
2°) Expliquer le rôle des amortisseurs de la voiture.

SOLUTION

1°) La série de bosses régulièrement espacées impose à la voiture des oscillations forcées de période T égale à la durée séparant les passages de la voiture sur deux bosses successives $T = \frac{d}{v}$. L'ensemble (voiture ; amortisseurs) se comporte comme un oscillateur mécanique de période propre : $T_o = 2\sqrt{\frac{m}{k}}$. La résonance a lieu lorsque $T = T_o$, ce qui est obtenu pour une certaine vitesse $v = v_c$. On aura alors : $\frac{d}{v_c} = 2\sqrt{\frac{m}{k}}$, d'où : $v_c = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$
Soit, numériquement $\mathbf{v_c = 20,14\ m.s^{-1}}$ ou $\mathbf{v_c = 72,5\ km.h^{-1}}$.
2°) Les amortisseurs absorbent une partie de l'énergie des oscillations. L'amplitude des secousses provoquées par la succession des bosses est ainsi diminuée, ce qui entraîne une meilleure tenue de route et donc plus de sécurité.

Exercices à résoudre

Tests rapides des acquis

1 Items "vrai ou faux"

Evaluer les propositions suivantes par vrai ou faux.

1- Pour un pendule élastique en régime sinusoïdal forcé, le ressort constitue l'excitateur tandis que le solide (S) qui lui est attaché est le résonateur.
2- La période des oscillations forcées d'un pendule élastique est imposée par l'excitateur.
3- En régime sinusoïdal forcé, le pendule élastique peut osciller avec sa période propre.
4- La résonance d'élongation a lieu à chaque fois que la fréquence de l'excitateur est égale à la fréquence propre du résonateur.
5- Pour un pendule élastique en régime sinusoïdal forcé, l'élongation x du centre d'inertie du solide (S) évolue toujours en retard de phase par rapport à la valeur algébrique F de la force excitatrice.
6- L'élongation du centre d'inertie d'un pendule élastique n'est maximale qu'à la résonance.
7- A la résonance d'élongation, l'amplitude X_m des oscillations d'un pendule élastique augmente avec l'amortissement.
8- La résonance d'élongation est d'autant plus aiguë que l'amortissement est faible.

2 Questions à Choix Multiples

Préciser pour chacune des questions suivantes, la (ou les) proposition(s) juste(s).

1- En régime sinusoïdal forcé, l'élongation du résonateur est :
- **a-** toujours en retard de phase par rapport à sa vitesse ;
- **b-** toujours en retard de phase par rapport à la force excitatrice ;
- **c-** alternativement en avance de phase et en retard de phase par rapport à la force excitatrice.

2- A la résonance d'élongation, l'amplitude X_m des oscillations d'un pendule élastique est :
- **a-** maximale seulement en valeur absolue ;
- **b-** la plus élevée ;
- **c-** indépendante de l'amortissement.

3- A la résonance d'élongation, la période d'un pendule élastique :
- **a-** n'est pas égale à celle de l'excitateur ;
- **b-** ne dépend que de la période propre de l'oscillateur ;
- **c -** dépend du coefficient de frottement.

4- L'amplitude X_m des oscillations forcées d'un pendule élastique est :
- **a -** d'autant plus grande que l'amortissement est plus important ;
- **b-** d'autant plus grande que la valeur de la fréquence de l'excitateur est plus proche de la valeur de sa fréquence propre ;
- **c-** d'autant plus petite que sa masse est plus grande.

5- Pour un pendule élastique en régime sinusoïdal forcé, la résonance d'élongation :
- **a-** n'est possible que lorsque sa période propre est très petite ;
- **b-** peut être obtenue avec n'importe quelle valeur du coefficient de frottement ;
- **c-** est d'autant plus aiguë que l'amortissement est plus faible.

6- D'après l'analogie électrique-mécanique :
- **a-** comme on définit l'impédance électrique, on peut définir l'impédance mécanique ;
- **b-** comme il y a la résonance d'intensité de courant électrique, il y a une résonance d'élongation mécanique ;
- **c-** la puissance mécanique moyenne est constante à la résonance d'élongation.

Exercices d'application

3 L'une des extrémités d'un ressort de masse négligeable et de raideur $k = 50\ N.m^{-1}$ est attachée à un solide (S) de masse m = 100 g. L'ensemble est monté de manière à réaliser un pendule élastique horizontal. La deuxième extrémité du ressort est liée à un dispositif d'excitation qui permet de mettre le pendule en mouvement et de l'entretenir.

1°) Identifier l'excitateur et le résonateur.

2°) Calculer la période propre T_o des oscillations du pendule élastique.

3°) Que risque-t-il de se produire lorsque le dispositif d'excitation impose au pendule une fréquence d'oscillations proche de sa fréquence propre ? Pourquoi ?

4 Un pendule élastique horizontal, constitué d'un solide (S) de masse m = 200 g et d'un ressort de raideur $k = 5\ N.m^{-1}$ oscille suivant l'axe du ressort. Au cours de ses oscillations, l'élongation x du centre d'inertie G de (S), mesurée à partir de sa position de repos O, évolue au cours du temps selon l'équation :

$x = 0{,}025\sin\pi(1{,}2.t + 0{,}75)$.

1°) De l'expression de x(t), tirer l'amplitude X_m, la phase initiale φ_x et la fréquence N des oscillations du centre d'inertie G.

2°) a) calculer la fréquence propre N_o de l'oscillateur (le pendule élastique).

b) Comparer N à N_o et en déduire si les oscillations du pendule sont forcées.
Dans l'affirmative, préciser la valeur de la fréqence de l'excitaeur.
Justifier la réponse.

5 Sur une piste saharienne, le vent produit sur le sable des bosses qui se succèdent régulièrement à une distance d = 60 cm. Une voiture parcourt cette piste à la vitesse v constante. Le conducteur sait qu'il faut rouler très lentement ou avec une vitesse supérieure à une certaine valeur pour éviter les sensations désagréables et les détériorations du véhicule.

1°) Avec quelle période, la roue de la voiture passe-t-elle d'une bosse à la suivante ? En déduire la fréquence de ce phénomène.

2°) L'action des bosses successives fait que la voiture soit en régime d'oscillations forcées.

a) préciser l'excitateur et le résonateur.

b) l'oscillateur constitué par la roue, son ressort de suspension et son amortisseur est caractérisé par une fréquence propre $N_o = 5$ Hz. Montrer qu'il existe une valeur v_o de la vitesse pour laquelle l'oscillateur entre en résonance.
On admettra que la fréquence de résonance est la fréquence propre de l'oscillateur.

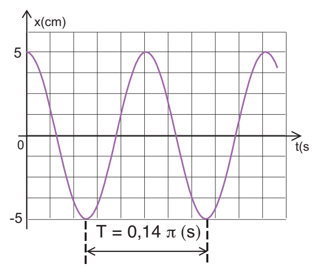
Exercices de synthèse

6 Un oscillateur mécanique comporte un solide (S), de masse m et de centre d'inertie G, attaché à l'une des extrémités d'un ressort (R) de raideur k et de masse négligeable. L'autre extrémité du ressort est fixe. L'ensemble {ressort, solide (S) } est disposé horizontalement. Le solide (S) est soumis à une force de frottement de type visqueux $\vec{f} = -h\vec{v}$ où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse instantanée de G et h est une constante positive. A l'aide d'un dispositif approprié, on applique sur (S) une force excitatrice $\vec{F}(t) = F_{max}\sin(2\pi Nt + \varphi_F)\vec{i}$. On désigne par x(t) l'élongation du centre d'inertie G en fonction du temps par rapport au repère $(O, \vec{i})$, O étant la position d'équilibre de G.

1°) Écrire, par recours à l'analogie formelle électrique-mécanique, l'expression de l'amplitude X_m des élongations x du centre d'inrtie G de (S) en fonction de la valeur maximale F_m de la force excitatrice, de la raideur k du ressort et du coefficient de frottement h.

2°) Le dispositif d'enregistrement des oscillations de (S) est constitué d'un cylindre enregistreur sur lequel est enroulé un papier millimétré et d'un stylet marqueur, solidaire du solide (S), et affleurant le papier millimétré. Dans le cas de l'expérience étudiée, ce dispositif permet d'obtenir le diagramme qui représente l'évolution temporelle de l'élongation : $x(t) = X_m \sin(2\pi Nt + \varphi_x)$.

a) sachant que les deux oscillations représentées sur le diagramme de la figure ci-contre correspondent à un tour complet du cylindre enregistreur, en déduire le nombre de tours par minute effectués par ce cylindre. Déterminer, à partir de ce diagramme X_m, N et φ_x.



b) sachant que m = 98 g et k = 20 $N.m^{-1}$, montrer que (S) effectue des oscillations mécaniques forcées correspondant à une résonance de vitesse.

c) en déduire qu'à tout instant t, x(t) vérifie la relation suivante : $m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$.

d) déterminer les valeurs de F_m, φ_F et la puissance mécanique moyenne absorbée par l'oscillateur. On donne h = 1,8 $kg.s^{-1}$.

7

Relié à l'une des extrémités d'un ressort, un solide (S) de masse m = 51 g oscille sur un banc à coussin d'air horizontal. La deuxième extrémité du ressort est animée d'un mouvement sinusoïdal de translation, grâce à un système de transmission relié à un disque mis en rotation par un moteur de fréquence N réglable.

On fait tourner le moteur à raison de 1,25 tours par seconde, l'amplitude des oscillations du solide (S) est maximale et vaut 4,8 cm .

1°) Proposer un montage correspondant à la description précédente et permettant d'enregistrer le mouvement du solide (S).

2°) Préciser, dans le montage l'excitateur et le résonateur.

3°) a) déterminer la période du mouvement du solide (S)

b) en déduire une valeur approchée de la raideur du ressort.

4°) On fixe au solide (S) une palette que l'on immerge dans l'eau. L'amplitude des oscillations devient 2,4 cm.

a) interpréter cette diminution de l'amplitude.

b) dans quel sens évolue l'amplitude lorsqu'on remplace l'eau par de l'huile ?

5°) On fait varier la fréquence N du moteur. On constate que l'amplitude des oscillations prend une valeur maximale pour une fréquence particulière N_r.

a) de quel phénomène s'agit-il ?

b) la période et l'amplitude des oscillations dépendent-elles de la nature du liquide utilisé lorsque ce phénomène se produit ? Justifier la réponse.

8

Un oscillateur est constitué d'un pendule élastique {solide (S) de masse m relié à un ressort de raideur k} horizontal. Le pendule est excité à l'aide d'un moteur muni d'un excentrique, celui-ci produit une force périodique qui agit sur l'extrémité du ressort qui n'est pas reliée au solide (S).

1°) Quel type d'oscillations, le résonateur effectue-t-il ? et avec quelle période oscille-t-il ?

2°) Sachant que la période propre du pendule élastique vaut T_0 = 0,46 s, quel phénomène aura-t-il lieu si la période de la force excitatrice devient voisine de 0,46 s ?

3°) Sachant que la période T de l'excitateur égale à T_o, le centre d'inertie G de (S) oscille avec une amplitude égale à 4 cm, déterminer :
a) la valeur maximale de la vitesse de G,
b) la valeur du coefficient de frottement h.
on donne : F_m = 0,25 N.

9 Un solide (S) de masse m est accroché à l'extrémité d'un ressort de raideur k dont l'autre extrémité est fixe. L'ensemble est horizontal et (S) subit des actions de frottement visqueux équivalentes à une force $\vec{f} = - h\vec{v}$, où $\vec{v}$ est la vitesse du centre d'inertie G de (S) et h est une constante positive. De plus, (S) subit une force F dirigée suivant l'axe du ressort et dont la projection sur cet axe est $F = F_m \sin\omega t$.

1°) Par recours à l'analogie formelle électrique-mécanique, établir l'équation différentielle régissant les oscillations du centre d'inertie G de (S).

2°) En utilisant la construction de Fresnel obtenue par analogie avec celle qui correspond à un circuit RLC série, montrer que $Z = \frac{F_m}{V_m} = \sqrt{h^2 + (m\omega - \frac{k}{\omega})^2}$, où V_m est la vitesse maximale de (S), et que le déphasage entre F et v est donné par : $tg\varphi = \frac{(m\omega - \frac{k}{\omega})}{h}$.

3°) En déduire l'expression de la vitesse v en fonction de t, F_m, Z et φ.

4°) De l'expression précédente, déduire celle de x(t).

5°) En faisant varier ω, mais en maintenant constante la valeur de F_m, V_m varie. Déterminer la valeur de ω pour laquelle V_m est maximale (résonance de vitesse).
Quel est alors le déphasage entre la vitesse v et la force F ?

6°) L'amplitude des élongations varie également en fonction de ω. Montrer qu'elle est maximale (résonance d'élongation) quand la somme $Y = [\, m^2\omega^4 + (h^2 - 2mk)\omega^2 + k^2]$ est minimale. Déterminer la valeur ω_r qui rend Y minimale. Vérifier que $\omega_r < \omega_o$. Montrer qu'il existe une valeur du coefficient de frottement à partir de laquelle il n'existe plus de phénomène de résonance d'élongation.

10 **Etude de texte**

Dans le film «le salaire de la peur» de Henri-Georges Clouzot, les héros doivent transporter de la nitroglycérine (explosif puissant) dans un camion. La piste empruntée est constituée d'une succession régulière de rigoles creusées par le ruissellement de l'eau. Une piste de ce genre est appelée «tôle ondulée».
L'un des acteurs affirme à ses collègues qu'il faut rouler soit très lentement soit très vite pour éviter de faire exploser le chargement.

1°) Quel est le phénomène susceptible de se produire lorsqu'un véhicule roule sur ce type de piste ?

2°) Sachant que la masse du camion chargé est m = 10 tonnes et que ses suspensions s'affaissent de 1,2 mm lorsqu'il porte une charge de 6,5 tonnes, calculer :
a) la raideur du ressort équivalent aux suspensions du camion.
b) la période et la fréquence des oscillations du camion.

3°) Le camion roule sur une tôle ondulée dont les bosses sont régulièrement espacées d'une distance d = 0,70 m. Pour quelle vitesse de déplacement, le phénomène sera le plus perceptible ?

4°) L'affirmation de l'acteur est-elle justifiée ?

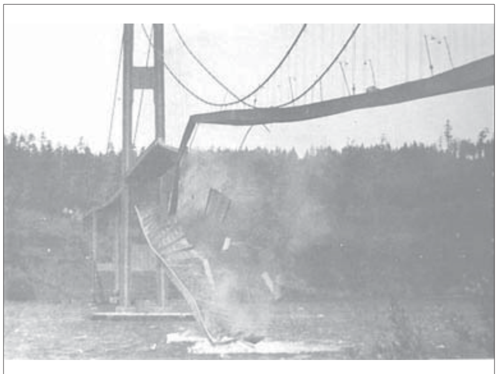
En savoir plus

DANGERS DE LA RÉSONANCE

Généralement en mécanique le phénomène de résonance est à éviter vu les effets néfastes qu'il peut engendrer. En effet la suspension d'une voiture peut être modélisée par un ressort vertical de raideur k sur lequel est posé un solide de masse m. L'ensemble constitue un oscillateur.
Il en est de même pour les constructions et bâtiments que le vent et les secousses sismiques peuvent mettre en oscillations avec des amplitudes importantes, risquant même leur destruction.
Un conducteur de voiture doit éviter de rouler à certaines vitesses lorsqu'il rencontre certains types d'irrégularités dans la chaussée ou sur une piste saharienne dans les rallyes par exemple, où le vent produit sur le sable des ondulations. Pour ces vitesses, le véhicule entre en résonance, l'amplitude de ses oscillations augmente fortement et cela peut engendrer des dangers ; les roues décollent de la route et perdent toute adhérence. Pour limiter cet effet désagréable et assurer plus de sécurité, on ajoute des amortisseurs, généralement à huile (à gaz sur les motos), qui permettent de diminuer l'amplitude du mouvement dans le cas où il y a résonance.


Pont de Tacoma Narrow quelques instants avant sa rupture

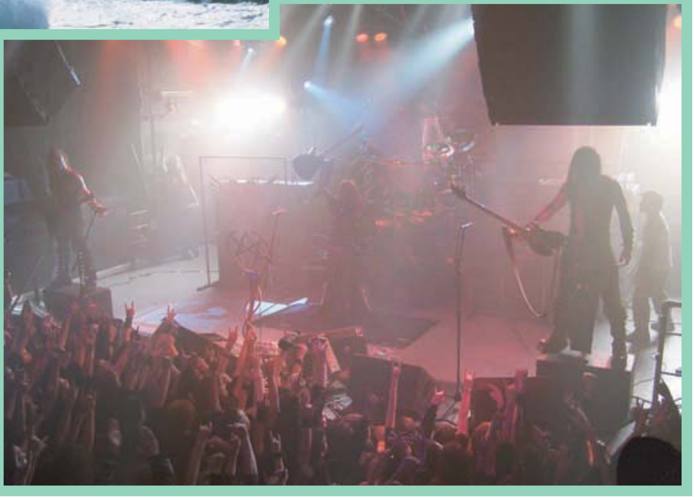
Le cas du Tacoma Narrow Bridge, situé à Puget Sound dans l'état de Washington aux U.S.A. est un exemple célèbre : en novembre 1940, cinq mois après son ouverture à la circulation, les rafales de vent périodiques, jouant le rôle d'excitateur, ont provoqué la résonance du pont qui s'est mis à vibrer et en quelques heures, les vibrations sont devenues si importantes que le pont s'est effondré.
De même, le 16 avril 1850, le tablier d'un pont suspendu sur la maine à Angers en France, se rompit au passage d'une troupe marchant au pas cadencé.
A la suite de ces évènements les ponts sont dessinés de manière à les rendre aérodynamiquement stables. Les tabliers des ponts actuels sont tous arrimés au sol par l'intermédiaire de vérins amortisseurs qui permettent de limiter le phénomène de résonance.
Les bâtiments de grande hauteur, comme les tours et les gratte-ciel sont particulièrement sensibles aux vibrations provoquées par les bourrasques de vent, les turbulences et les secousses sismiques. Leur construction doit en tenir compte. Citons l'exemple de la conception et la réalisation de la tour Taipei 101 à Taiwan achevée en 2004, qui mesure 508 mètres de haut pour 101 étages. Une boule en acier de 800 tonnes suspendue entre les 88ème et 92ème étages permet d'amortir les oscillations engendrées par les vents et les secousses sismiques.


Pont de Tacoma Narrow après sa rupture

ONDES ONDES ONDES

La houle qui intéresse les surfers (ceux qui pratiquent le surf) par sa propagation et son déferlement est une onde créée à la surface de l'océan, ou de la mer.

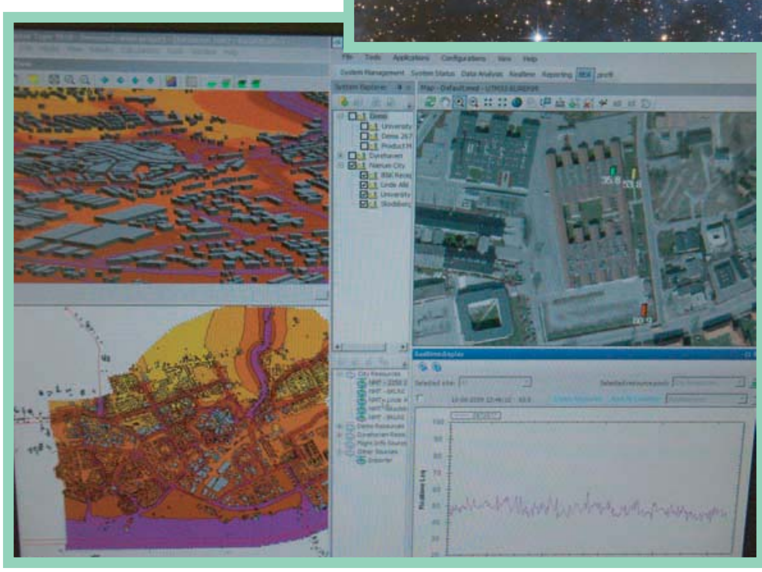
Bien que ce soit aussi une onde créée au large de l'océan, le tsunami n'est perceptible qu'au niveau des côtes où le niveau de l'eau s'élève très rapidement sous forme de vagues d'un à plusieurs dizaines de mètres !



Spectacle de son et de lumière qui sont tous les deux, des phénomènes ondulatoires.

ONDES ONDES ONDES

Grand Nuage de Magellan avec ses étoiles brillantes, en orbite autour de notre galaxie, paraissant plus ou moins grosses à cause du phénomène de diffraction



La modélisation d'une ville par cartographie sonore est l'une des applications de la nature ondulatoire du son.

SOMMAIRE

Objectifs

c

- Distinguer entre une onde transversale et une onde longitudinale.
- Reconnaître que la propagation d'une onde est due à une propagation d'énergie sans transport de matière.
- Réaliser une expérience illustrant la propagation d'une onde sinusoïdale dans un milieu homogène et isotrope.
- Identifier dans un milieu de propagation donné, les propriétés dont dépend la célérité d'une onde.
- Etablir l'équation horaire du mouvement d'un point donné du milieu de propagation connaissant celle de la source d'onde progressive et représenter graphiquement le diagramme du mouvement de ce point.
- Représenter graphiquement l'aspect à un instant donné, du milieu (ou d'une coupe du milieu) de propagation d'une onde progressive.
- Reconnaître la double périodicité d'une onde sinusoïdale.

Prérequis

Savoir

- Définir un phénomène périodique.
- Définir la période T et la fréquence N d'un phénomène périodique.
- Ecrire la relation $N = \frac{1}{T}$.
- Définir une grandeur sinusoïdale.
- Définir la pulsation et l'amplitude d'une grandeur sinusoïdale.
- Ecrire la relation $T = \frac{2\pi}{\omega}$ $(\text{ou } N = \frac{\omega}{2\pi})$

Savoir faire

- Utiliser l'oscilloscope.
- Appliquer les relations :

$$N = \frac{1}{T} \text{ et } T = \frac{2\pi}{\omega} \ (\text{ou } \omega = 2\pi N).$$

- Représenter graphiquement une grandeur sinusoïdale en fonction du temps.
- Mesurer les durées et les vitesses à l'aide de photocapteurs.