OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES LIBRES

3

Le quartz impose sa fréquence propre aux oscillations ; une montre électronique y gagne en précision.

- **Que désigne-t-on par les expressions "oscillations électriques", "oscillateur électrique", "circuit oscillant"...?**
- **Est-ce que le courant alternatif est un phénomène oscillatoire ?**

OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES LIBRES AMORTIES

Dans les chapitres précédents, en plus de la mise en évidence expérimentale des propriétés des condensateurs et des bobines, on a étudié entre autres la décharge d'un condensateur. Que se passera-t-il si l'on décharge le condensateur dans une bobine sachant que celle-ci emmagasine aussi de l'énergie?

1 PRODUCTION D'OSCILLATIONS LIBRES AMORTIES

Manipulation

Avec un générateur de tension idéal de f.e.m. E = 5 V, un condensateur de capacité C = 0,5 μF, un résistor de résistance R_o réglable, une bobine d'inductance L =1 H et de résistance r = 12,5 Ω et un commutateur K, on réalise le montage de la figure 1.

On fixe R_o à 100 Ω.

On réalise les branchements et les réglages indispensables à la visualisation de la tension $u_C = u_{BM}$ aux bornes du condensateur sur la voie Y_1 et la tension $u_{Ro} = u_{AM}$ aux bornes du résistor sur la voie Y_2 d'un oscilloscope à mémoire (Fig.2).

On charge le condensateur en plaçant le commutateur K sur la position 1. En basculant le commutateur K sur la position.2, les chronogrammes ① et ② de la figure 2 apparaissent sur l'écran de l'oscilloscope.

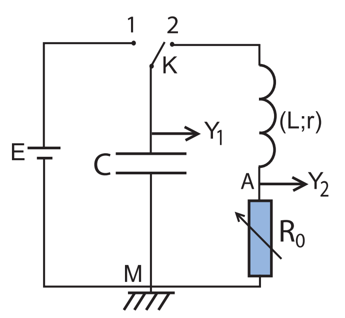


Fig.1 : Montage de charge et de décharge d'un condensateur dans une bobine

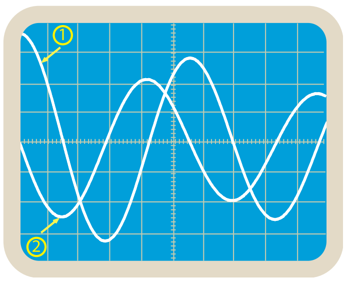


Fig. 2 : Oscillogrammes ① et ②

Questions

1°) Décrire la forme du chronogramme visualié lorsque le commutateur K est en position 1.

2°) Montrer que le chronogramme ① de la figure 2 correspond à la tension u_C et qu'il traduit l'évolution, au cours du temps, de la charge q du condensateur.

3°) Montrer que le chronogramme ② de la figure 2 traduit l'évolution au cours du temps de l'intensité i du courant électrique qui s'établit dans le circuit MKA.

4°) • Tels quels, les chronogrammes ① et ② traduisent des oscillations de q et de i au cours du temps.
Préciser la signification de cette affirmation.
• De telles oscillations électriques sont dites amorties, pourquoi ?

5°) Comparer les intervalles de temps T séparant les maximums ou minimums successifs de u_C et de u_{Ro}.

6°) • En comparant les maximums de $u_C(t)$ ou de $u_{R0}(t)$, montrer que les oscillations sont amorties.

• De telles oscillations, ne pouvant pas être qualifiées comme étant périodiques, sont dites pseudopériodiques, pourquoi ?

7°) Interpréter les oscillations de q(t) et de i(t) dans le circuit RLC série.

Interprétation

En plaçant le commutateur K dans la position 1, le condensateur se charge, la tension à ses bornes devient égale à E, donc le chronogramme ① correspond à $u_c(t)$.

Compte tenu des relations de proportionnalité $q = C\,u_C$ et $u_{Ro} = R_o\,i$ en convention récepteur, les chronogrammes ① et ② traduisent l'évolution au cours du temps respectivement de la charge q du condensateur et de l'intensité i du courant qui s'établit dans le circuit MKA. La symétrie de ces chronogrammes par rapport à l'axe des temps montre que la charge q du condensateur et l'intensité i du courant électrique varient et changent de signe à des intervalles de temps successifs et égaux à T ; c'est-à-dire que q et i prennent au cours du temps des valeurs alternativement positives et négatives. On dit alors que q et i oscillent au cours du temps.

Les oscillations de q résultent d'une décharge oscillante du condensateur; celles de l'intensité i matérialisent une circulation du courant alternativement dans un sens et dans l'autre: On dit qu'un tel courant alternatif est un phénomène oscillatoire. Ces oscillations s'expliquent comme suit :

❖ À $t_o = 0$, juste en plaçant le commutateur K dans la position 2, $u_{Co} = E$ et la charge du condensateur est $Q_o = CE$, c'est-à- dire à cet instant, les armatures A et B du condensateur portent respectivement les charges $Q_o = CE$ et $- Q_o = - CE$.

L'attraction mutuelle de ces charges provoque un déplacement d'ensemble d'électrons de B vers A, ce quit fait naître, à travers le dipôle RL, un courant d'intensité i circulant dans le sens négatif (Fig.3). Mais, contrairement à ce qui se passe dans le cas d'un dipôle RC, la valeur absolue de l'intensité i ne passe pas instantanément de 0 à sa valeur maximale I_m, et ce à cause de la f.e.m. auto-induite dans la bobine.

❖ Entre $t_o = 0$ et $t_1 = T/4$ (Fig.4a) :

l'opposition de la force électromotrice auto-induite à la variation de l'intensité du courant ralentit le déplacement d'ensemble

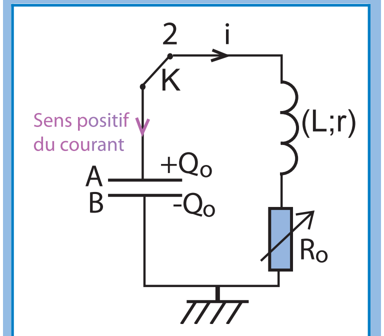


Fig.3 : Sens positif du courant

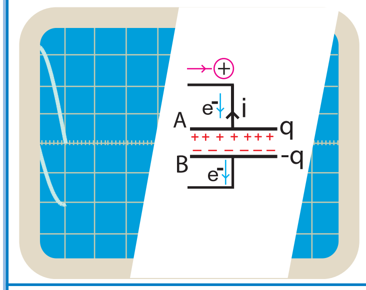


Fig.4a : Décharge du condensateur dans le dipôle RL des électrons, ce qui explique l'augmentation progressive et non brusque de la valeur absolue de i.

❖ Entre $t_1 = T/_4$ et $t_2 = T/_2$ (Fig.4.b)

À $t_1 = T/_4$, bien que i soit maximale en valeur absolue, le courant n'a plus de raison d'être car le condensateur est complètement déchargé, c'est-à-dire il n'y a plus de d.d.p. entre ses armatures A et B. Pourtant, i ne va pas s'annuler à l'instant même, et ce toujours à cause de la f.e.m auto-induite $e = -L\frac{di}{dt}$ qui va contraindre le courant à circuler encore dans le même sens, ce qui fait apparaitre simultanément et progressivement sur l'armature A du condensateur une charge +q < 0 et sur l'armature B une charge - q>0.

À $t_2 = T/_2$, le courant finit par s'annuler pour être régénéré tout de suite, mais dans le sens positif grâce aux charges $+ Q_1<0$ et $- Q_1>0$, maximales en valeur absolue et accumulées respectivement sur les armatures A et B du condensateur.

❖ Entre $t_2 = T/_2$ et $t_4 = T$: l'évolution s'explique de la même manière qu'entre $t_o = 0$ et $t_2 = T/_2$.

A l'instant $t_4 = T$, deux charges $+ Q_2$ et $- Q_2$, maximales en valeur absolue, se trouvent stockées respectivement au niveau des armatures A et B comme à $t_o=0$, c'est-à-dire la charge $+ Q_2$ est positive.

❖ Entre les instants T et 2 T : Tout se passe et s'explique comme entre les instants 0 et T pour "voir" s'accumuler respectivement sur les armatures A et B les charges $+ Q_3$ et $- Q_3$ (avec Q_3 <0) à l'instant $3T/_2$ et $+ Q_4$ et $- Q_4$ (avec Q_4>0) à l'instant 2T et ainsi de suite.

Il reste quand même à expliquer pourquoi $Q_o>|Q_1|>Q_2>|Q_3|$, ce qui revient à expliquer la diminution de l'amplitude des oscillations de i (Fig5).

En fait, la résistance totale R du circuit (résistance r de la bobine + R_o) s'oppose incessamment à la circulation du courant. Par conséquent, elle fait atténuer progressivement la valeur de l'intensité du courant jusqu'à l'annuler au bout de quelques oscillations. De telles oscillations sont dites amorties. De plus, ces oscillations sont dites libres du fait qu'elles se produisent dans le circuit RLC série bien que celui-ci ne soit fermé sur aucun générateur.

Bien que les exrêmums de q ou de i soient atteints à des intervalles de temps successifs égaux, de telles oscillations ne

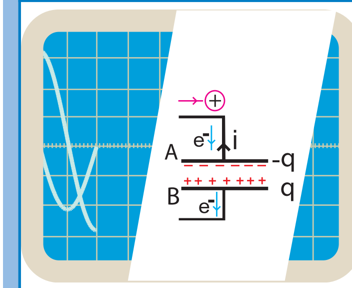


Fig.4b : Charge du condensateur

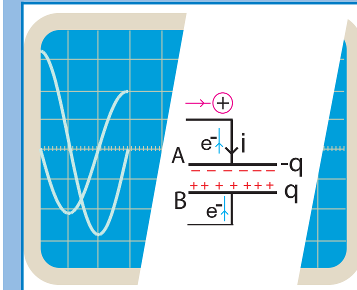


Fig.4c : Décharge du condensateur dans le dipôle RL

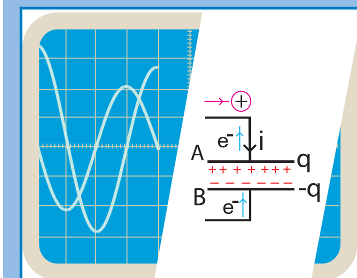


Fig.4d : Charge du condensateur

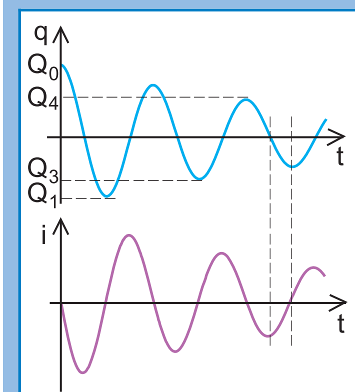


Fig.5 : L'amplitude des oscillations diminue.

peuvent être périodiques à cause de la diminution de l'amplitude, elles sont dites pseudopériodiques.

Conclusion

Un circuit constitué d'un dipôle RL série fermé sur un condensateur initialement chargé peut être le siège d'oscillations électriques amorties. De telles oscillations qui s'effectuent d'elles mêmes sans intervention de l'extérieur sont dites libres.

Les oscillations libres amorties sont des oscillations pseudopériodiques de pseudopériode T.

2 INFLUENCE DE L'AMORTISSEMENT

Manipulation

On reprend le montage de la figure 1 et on refait l'expérience avec des valeurs différentes de R_o. En suivant l'évolution des oscillogrammes $u_c(t)$ et $u_{Ro}(t)$, on retient ceux de la figure 6 obtenus avec des valeurs de R_o allant de 100 Ω et 5 kΩ.

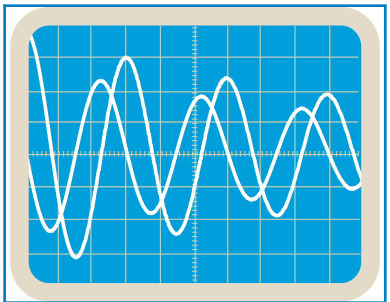


Fig.6a : R_o = 100 Ω

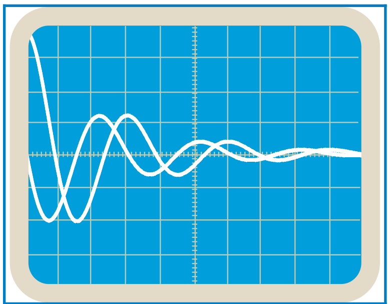


Fig.6b : R_o = 500 Ω

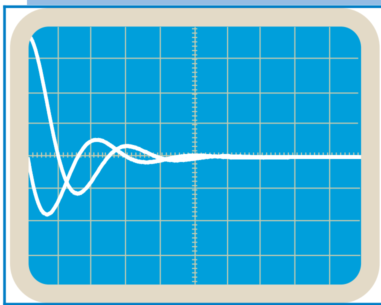


Fig.6c : R_o = 1000 Ω

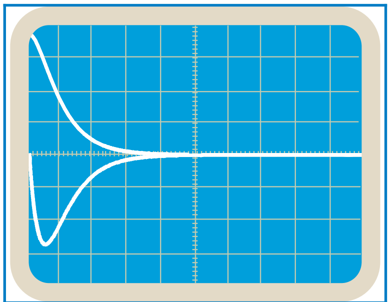


Fig.6d : R_o = 3 kΩ

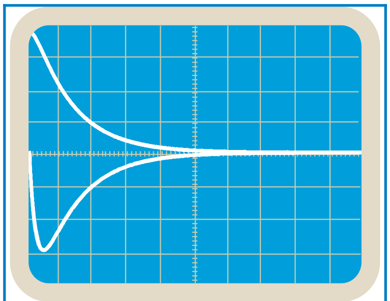


Fig.6e : R_o = 4 kΩ

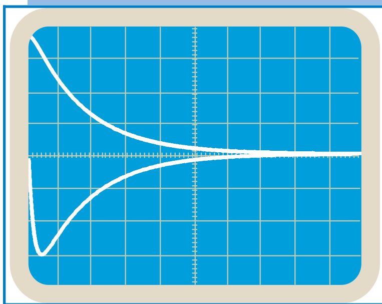


Fig.6f : R_o = 5 kΩ

Questions

À l'aide des oscillogrammes de la figure 6 :

1°) Dégager l'influence de la valeur de la résistance sur l'amortissement des oscillations et sur la pseudopériode.

2°) Montrer que le circuit RLC série ne peut osciller librement que dans des conditions bien déterminées que l'on précisera.
3°) Comparer les oscillogrammes des figures 6.d, 6.e et 6.f entre eux. En déduire l'influence de R_o sur la durée du retour du circuit RLC à son état d'équilibre stable.

Analyse et Interprétation des résultats

L'analyse des chronogrammes $u_C(t)$ et $u_{Ro}(t)$ obtenus avec différentes valeurs de R_o montre que :

- lorsque R_o augmente les oscillations deviennent de plus en plus amorties (le nombre totale des oscillations diminue) alors que la pseudopériode T augmente légèrement (Fig.6a, 6b, 6c).
- pour des valeurs élevées de R_o, la difficulté avec laquelle le courant circule dans le circuit RLC série ne lui permet plus d'atteindre une intensité maximale suffisante pour pouvoir recharger le condensateur avant de s'annuler. Par conséquent, le circuit RLC série ne peut plus osciller ; il s'agit d'un nouveau régime qui consiste en le retour du circuit à son état d'équilibre, c'est-à-dire en une simple décharge du condensateur ; celle-ci demande une durée aussi longue que la résistance R_o est plus grande : un tel régime non oscillatoire est dit apériodique (Fig.6d, 6e, 6f).

Remarques

1- Le régime apériodique obtenu avec la valeur élevée la plus petite de la résistance totale R du circuit RLC série est connu sous le nom du régime critique mais expérimentalement, il est difficile de le mettre en évidence.

2- Du fait que lorsque la résistance totale R du circuit diminue, les oscillations libres du circuit RLC série deviennent de moins au moins amorties, on peut admettre qu'à la limite, lorsque l'amortissement est suffisamment trés faible pour pouvoir le supposer nul (absence du résistor dans le circuit et bobine inductive de trés petite résistance interne r), le régime pseudopériodique devient périodique (Fig.7) : l'amplitude des oscillations ne diminue pratiquement plus. Le circuit RLC continue à osciller indéfiniment (l'étude de ce régime fera l'objet de la deuxième partie du présent chapitre).

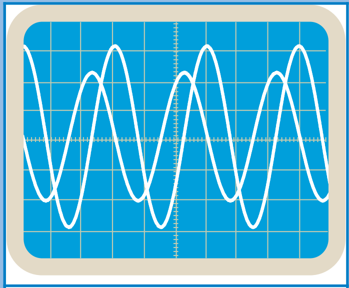


Fig.7 : Régime périodique

Conclusion

Un circuit RLC série fermé, avec le condensateur initialement chargé, ne peut osciller librement que lorsque l'amortissement est faible.
Plus la résistance du circuit est grande, plus la pseudopériode est grande et plus le retour de l'oscillateur à son état d'équilibre est rapide. Avec des valeurs élevées de R, le régime n'est plus oscillatoire, il est apériodique

3 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE RÉGISSANT L'ÉVOLUTION D'UN CIRCUIT RLC SÉRIE EN RÉGIME LIBRE

L'application de la loi des mailles au circuit de la figure 8 permet d'écrire :

$u_C + u_b + u_{Ro} = 0$, ce qui signifie $\frac{q}{C} + (ri + L\frac{di}{dt}) + R_o i = 0$.

D'où : $L\frac{di}{dt} + (r + R_o)i + \frac{q}{C} = 0$. (1)

Or, $i = \frac{dq}{dt}$. Donc, (1) s'écrit :

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + (r + R_o)\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad \text{ou bien} \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{r + R_o}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0.$$

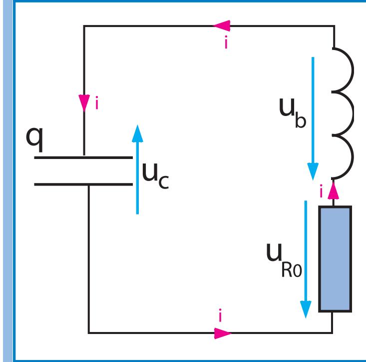


Fig.8 : Schéma du circuit RLC série

4 ÉNERGIE TOTALE D'UN OSCILLATEUR RLC SÉRIE

Manipulation

On reprend le montage de la figure 1 et on remplace l'oscilloscope par une interface d'acquisition numérique de données (console VTT par exemple).
On fixe R_o à la valeur 100 Ω et on règle les paramètres d'acquisition de l'interface pour que, après avoir chargé le condensateur, la fermeture du circuit RLC série déclenche l'acquisition des mesures. Sur l'écran de l'ordinateur, s'affichent les deux courbes de tension $u_C(t)$ et $u_{Ro}(t)$ qu'on enregistre en vue de les exploiter plus loin. Ces deux courbes sont reproduites sur la figure 9.
En réalisant de nouveau la même expérience avec R_o = 500 Ω, on obtient les deux courbes reproduites sur la figure10.

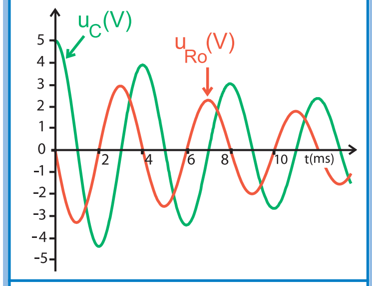


Fig.9 : Evolution temporelle de u_C et u_{Ro} dans le cas où R_o = 100 Ω

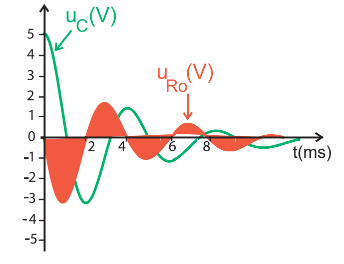


Fig.10 : Evolution temporelle de u_C et u_{Ro} dans le cas où R_o = 500 Ω

A l'aide d'un logiciel tableur-grapheur (il doit être installé au préalable dans l'ordinateur utilisé), on calcule :

- l'énergie électrique $E_C = \frac{1}{2} C.u_C^2$

- l'énergie magnétique $E_L = \frac{1}{2}\frac{L}{R_o^2}.u_{Ro}^2$

- l'énergie totale du circuit $E = E_C + E_L$.

On passe en mode graphique pour que l'ordinateur affiche sur son écran, simultanément et dans un même système d'axes, les chronogrammes des énergies E_C, E_L et E obtenus respectivement avec les valeurs 100Ω et 500Ω de R_o (Fig.11a et 11b).

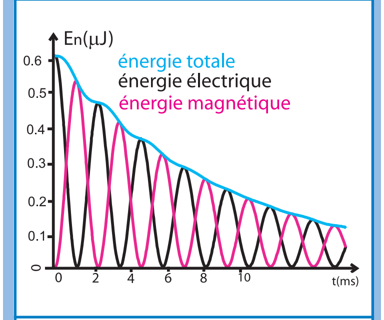


Fig.11a : Evolution temporelle des énergies dans le cas où R_o = 100 Ω

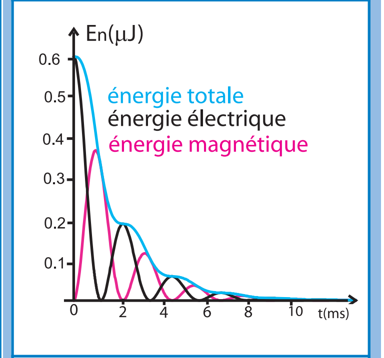


Fig.11b : Evolution temporelle des énergies dans le cas où R_o = 500 Ω

Questions

A l'aide des chronogrammes des figures 11a et 11b :

1°) Montrer que les zéros et les maxima de l'énergie électrostatique E_C emmagasinée dans le condensateur ou de l'énergie magnétique E_L emmagasinée dans la bobine sont atteints à des intervalles de temps successifs égaux à la moitié de la pseudopériode T.

2°) Vérifier qu'au cours des oscillations, l'énergie totale E du circuit est égale à la somme de l'énergie E_C emmagasinée dans le condensateur et de l'énergie E_L stockée par la bobine.

3°) Montrer les transformations mutuelles de E_C et E_L au cours des oscillations.

4°) Préciser l'influence sur la vitesse de diminution de l'énergie totale du circuit RLC série.

Interprétation

◆ Non conservation de l'énergie totale d'un circuit RLC série

L'énergie totale E du système oscillant (circuit RLC série) à un instant donné est la somme de l'énergie électrique E_C emmagasinée dans le condensateur et de l'énergie magnétique E_L emmagasinée dans la bobine. Pour étudier son évolution au cours du temps, il est commode de déterminer sa vitesse de variation⊙ qui s'écrit :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2C} + \frac{L}{2}i^2\right) = \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} + Li\frac{di}{dt} = i\left(L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\right)$$

Or l'équation différentielle peut s'écrire : $L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + Ri = 0$,

ce qui donne $L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = -Ri$, d'où $\boxed{\frac{dE}{dt} = -Ri^2}$

⊙ La vitesse de variation de l'énergie totale d'un système $\frac{dE}{dt}$ n'est autre que la puissance instantanée p du même système :

$$p = \frac{dE}{dt}$$

L'énergie totale emmagasinée dans le circuit RLC série diminue au cours du temps, elle est transformée progressivement en énergie thermique par effet Joule.
Cette dissipation est d'autant plus rapide que la résistance est plus grande. En conséquence, on dit qu'un circuit RLC série en régime libre est un système non conservatif.

◆ Transformations mutuelles des énergies électrique et magnétique.

Au cours de la décharge du condensateur qui se produit entre $t_o = nT$ et $t_1 = nT + T/_4$,l'énergie E_C qui y est stockée diminue car IqI diminue, tandis que l'énergie E_L emmagasinée par la bobine augmente car I i I augmente.
D'après la loi de conservation de l'énergie, cela ne s'explique que par une transformation d'énergie électrostatique E_C en énergie mégnétique E_L.
Entre $t_2 = nT + T/_4$ et $t_2 = nT + T/_2$, L'énergie électrostatique E_C augmente tandis que l'énergie magnétique E_L diminue parce que IqI augmente et IiI diminue, ce qui s'explique par une transformation de l'énergie magnétique en énergie électrostatique et ainsi de suite.
Donc, il y a au cours des oscillations pseudopériodique des transformations mutuelles d'énergie électrostatique et d'énergie magnétique. Mais, à cause de la résistance R du circuit, les transformations mutuelles ne sont pas intégrales. En fait, à chaque transfert d'énergie du condensateur à la bobine et inversement, une partie est transférée par chaleur au milieu extérieur jusqu'à dissipation totale. Par conséquent, le nombre de ces transformations mutuelles devient limité, ce qui explique l'amortissement des oscillations libres du circuit RLC série et leur cessation quand l'énergie totale E est transformée complètement en énergie thermique.

LES OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES LIBRES NON AMORTIES

L'étude de l'influence de la résistance R d'un circuit RLC série sur l'amortissement de ses oscillations nous a amené à admettre précédemment que si la résistance R est nulle, les oscillations seront périodiques. C'est ce que l'on se propose de montrer dans ce qui suit mais uniquement, par une étude théorique. En fait, l'oscillateur LC non amorti est un cas idéal parce qu'il est impossible de le réaliser dans la pratique.

1 NATURE DES OSCILLATIONS LIBRES NON AMORTIES

1.1- Évolution de la charge du condensateur

En fermant un condensateur de capacité C initialement chargé sur une bobine supposée purement inductive, on a le circuit schématisé dans la figure 12.

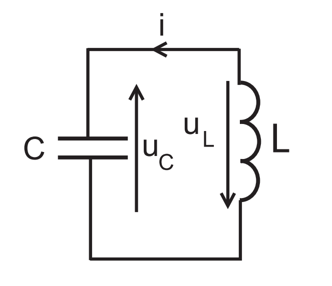


Fig.12 : Schéma du circuit

La loi des mailles s'écrit :

$u_C + u_L = 0$, ce qui signifie $\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = 0$.

Or $i = \frac{dq}{dt}$, d'où $\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_o^2 q = 0$ avec $\omega_o^2 = \frac{1}{LC}$: constante positive

On constate bien que l'équation différentielle établie est exactement celle des oscillations libres amorties, mais sans le terme $\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}$.

On admet que la solution générale d'une telle équation différentielle est de la forme : $q(t) = Q_m \sin(\omega_o t + \varphi)$.

$q(t)=Q_m \sin(\omega_o t +\varphi)$.

ω_o : pulsation des oscillations de la charge q, exprimée en radians par seconde ($rad.s^{-1}$).

Q_m : amplitude des oscillations de la charge q, exprimée en coulombs (C).

φ : phase initiale de la charge q, exprimée en radians (rad).

$\varphi(t) = \omega t + \varphi$: phase à l'instant t, exprimée en radians (rad)

Vérification de la solution de l'équation différentielle

En remplaçant la grandeur charge par son expression $q(t) = Q_m \sin(\omega_o t + \varphi)$ dans l'équation différentielle

$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$, il vient : $\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{d^2 Q_m \sin(\omega_o t + \varphi)}{dt^2} = - \omega_o^2 q$

Donc, l'équation différentielle devient : $-\omega_o^2 q + \frac{1}{LC} q = 0$,

d'où $q\left(\frac{1}{LC} - \omega_o^2\right) = 0$ quel que soit q.

Donc, $\frac{1}{LC} - \omega_o^2 = 0$, ce qui donne : $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Conclusion

La charge q du condensateur d'un circuit LC (circuit RLC série non amorti) oscille sinusoïdalement au cours du temps avec la pulsation $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Ne dépendant que des grandeurs L et C caractéristiques du circuit, la pulsation des oscillations libres non amorties est qualifiée de pulsation propre de l'oscillateur.

Simulation des oscillations

Avec un logiciel approprié, on demande à l'ordinateur la solution de l'équation différentielle $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$, avec L = 10 mH, C = 100 μF et $Q_m = 6.10^{-4}$ C comme charge initiale du condensateur par exemple. On obtient alors sur l'écran de l'ordinateur la sinusoïde q(t) de la figure 13.

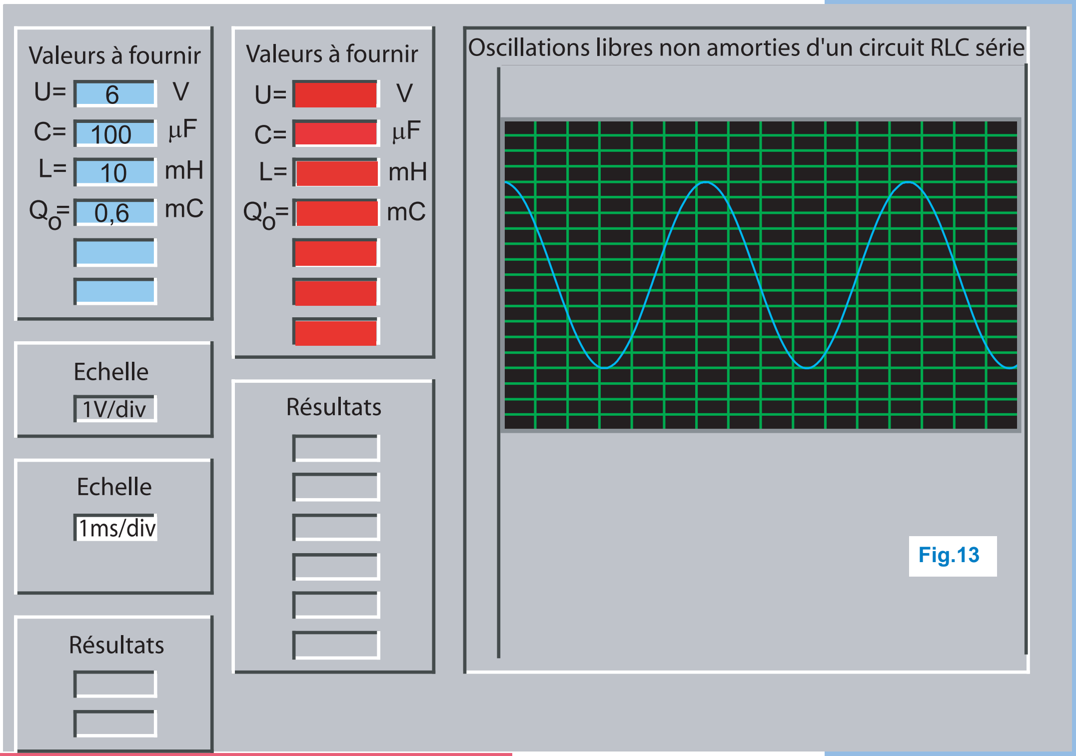


Fig.13

1.2- Période et fréquence des oscillations

La pulsation ω_o étant propre à l'oscillateur, la période des oscillations $T_o = \frac{2\pi}{\omega_o}$ est appelée période propre.

$$\boxed{T_o = 2\pi\sqrt{LC}}$$

De même, la fréquence des oscillations $N_o = \frac{1}{T_o}$ est appelée fréquence propre des oscillations.

$$\boxed{N_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$

Questions

1°) A l'aide du chronogramme de la figure 13, calculer la période T_o des oscillations libres non amorties de la charge q.
En déduire la valeur de la fréquence propre N_o de l'oscillateur.

2°) Vérifier avec les valeurs de L et de C utilisées pour simuler les oscillations de q(t) que la période propre de l'oscillateur RLC série non amortie s'exprime : $T_o = 2\pi\sqrt{LC}$

Remarque

Compte tenu du fait que les ordres de grandeur des capacités et des inductances sont les mêmes que ceux de L = 10 mH et C = 100 μF utilisées pour réaliser la simulation précédente, la valeur obtenue pour T_o (réponse à la question n°1 ci-dessus : T_o = 6,28 ms) montre que l'oscillateur RLC série non amorti a une période propre très inférieure à la seconde.

1.3- Amplitude et phase initiale des oscillations

On vient de voir que dans l'expression de q(t), ω_o ne dépend que de L et de C. Qu'en est-il quant à la valeur de l'amplitude des oscillations de la charge q ainsi qu'à la valeur de sa phase initiale ?

En réalisant une deuxième simulation des oscillations de q avec les mêmes choix des valeurs de L et de C, mais en remplacant la valeur $Q_m = 6.10^{-4}$ C par la valeur $Q'_m = 9.10^{-4}$ C, on obtient, en plus du premier chronogramme de la figure 13, un deuxième chronogramme dans le même système d'axes (Fig.14).

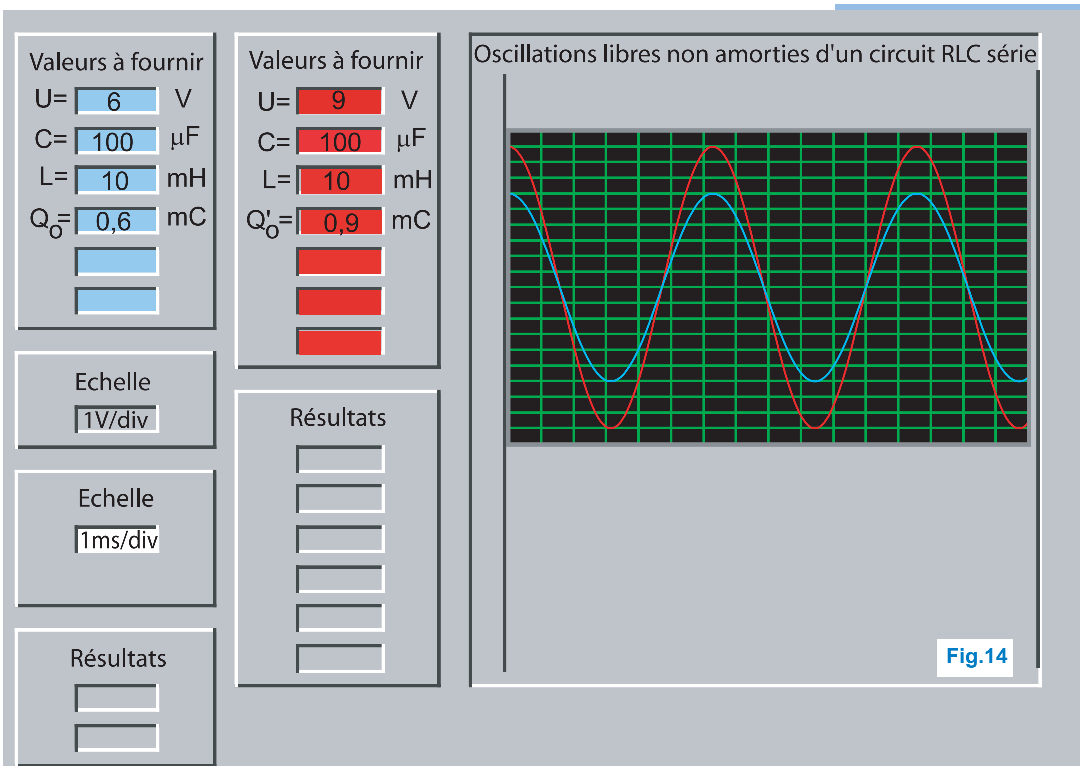


Fig.14

En relevant sur les chronogrammes de la figure 14, les valeurs des deux amplitude des oscillations de q, on constate qu'elles sont égales respectivement aux valeurs Q_m et Q'_m de la charge initiale du condensateur.

En ce qui concerne la phase initiale, si l'on choisit comme origine des temps l'instant de fermeture du circuit LC, on a $q(0) = Q_o$.

Or, à $t = 0$, $q = Q_m \sin\varphi$, d'où $Q_m \sin\varphi = Q_o$, ce qui donne $\sin\varphi = 1$

Donc, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ rad.

En choisissant un autre instant comme origine des temps, il est clair que l'on aboutit avec le même raisonnement à une autre valeur de φ différente de $\frac{\pi}{2}$ rad .

Conclusion

L'amplitude et la phase initiale des oscillations libres d'un circuit RLC série non amorti ne dépendent que des conditions initiales.

Toutefois, la valeur de l'amplitude est tributaire de la valeur de la charge initiale du condensateur, tandis que la valeur de la phase initiale est fonction du choix arbitraire de l'origine des temps.

Questions

1°) Sachant que $q(t) = Q_m \sin(\omega_o t + \pi/2)$, montrer que l'intensité i du courant électrique circulant dans le circuit RLC non amorti peut s'écrire sous la forme : $i(t) = \omega_o Q_m \cos(\omega_o t + \pi/2)$.

2°) En déduire que i est une autre grandeur oscillante du circuit RLC série non amori qui s'écrit sous la forme : $i(t) = I_m \sin(\omega_o t + \phi)$ tout en précisant l'expression de l'amplitude I_m et la valeur de la phase initiale ϕ.

2 ÉNERGIE TOTALE D'UN OSCILLATEUR LC

2.1- Conservation de l'énergie totale

$$E = E_C + E_L = \frac{1}{2C}q^2 + \frac{1}{2}Li^2.$$

Avec $q = Q_m \sin(\omega_o t + \frac{\pi}{2})$, $i = \frac{dq}{dt} = Q_m \omega_o \cos(\omega_o t + \frac{\pi}{2})$.

Donc, $E = \frac{1}{2C}(Q_m \cos\omega_o t)^2 + \frac{1}{2}L(-\,Q_m \omega_o \sin\omega_o t)^2$.

$$E = \frac{Q_m^2}{2C}\cos^2(\omega_o t) + \frac{1}{2}L\omega_o^2 Q_m^2 \sin^2(\omega_o t).$$

Or, $\omega_o^2 = \frac{1}{LC}$, il vient : $E = \frac{Q_m^2}{2C}[(\cos^2(\omega_o t) + \sin^2(\omega_o t)]$

On sait que $(\cos^2\omega_o t + \sin^2 \omega_o t = 1)$ quel que soit t.

Donc, $E = \frac{1}{2C}Q_m^2$

Q_m et C étant des constantes, E reste constante au cours du temps :

on dit que l'énergie totale de l'oscillateur LC se conserve.

Questions

1°) Comparer l'énergie totale E du circuit RLC série non amorti avec l'énergie qui lui est transférée initialement ; ce résultat est-il prévisible ? Pourquoi ?

2°) Montrer que l'énergie totale de l'oscillateur peut s'écrire sous la forme : $E = \frac{1}{2}L.I_m^2$ sachant que $I_m = \omega_o Q_m$ et $LC\omega_o{}^2 = 1$.

3°) Montrer autrement, par l'étude de l'évolution de dE/dt, que E est constante et vérifier que le résultat trouvé est un cas particulier du résultat $\frac{dE}{dt} = -\,Ri^2$ établi lors de l'étude des oscillations libres amorties du même oscillateur.

Conclusion

L'oscillateur RLC série en régime libre non amorti est un système conservatif. Son énergie est proportionnelle au carré de l'amplitude de la grandeur oscillante q(t) ou i(t).

$$\boxed{E = \frac{Q_m^2}{2C} = \frac{1}{2}LI_m^2 = \frac{1}{2}CU_{Cm}^2}$$

2.2- Évolution des énergies électrique et magnétique

Pour étudier l'évolution, au cours du temps, des énergies électrostatique E_C et magnétique E_L, il suffit de s'appuyer sur les courbes (1) et (2) représentant respectivement la charge q du condensateur et l'intensité i du courant circulant à travers la bobine,dans le cas où $q = Q_m$ à t = 0 (Fig.15).

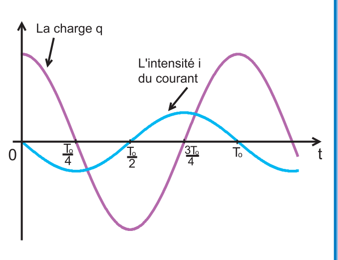


Fig.15 : Évolution temporelle de q et i.

◆ A t = 0, la charge est maximale et l'intensité du courant est nulle, ce qui signifie que l'énergie totale:

$$E = E_{C\,max} = \frac{Q_m^2}{2C}.$$

Donc, l'énergie du circuit LC est purement électrostatique.

◆ Pendant l'intervalle de temps $]0, T_o/4[$, la charge q diminue et l'intensité i négative augmente en valeur absolue. Donc, la décharge du condensateur dans la bobine s'accompagne d'une transformation de l'énergie électrostatique en énergie magnétique.

◆ A $t = T_o/4$, la charge q s'annule, donc l'énergie électrostique est nulle, et l'intensité i du courant est maximale en valeur absolue. Donc, l'énergie magnétique est maximale. Par conséquent, l'énergie du circuit LC est purement magnétique :

$$E = E_{L\ max} = \frac{1}{2}LI_m^2.$$

◆ Pendant l'intervalle de temps $]T_o/4, T_o/2[$, bien que la charge q soit négative, sa valeur absolue augmente alors que celle de l'intensité i diminue. En fait, grâce à l'énergie magnétique qu'elle a stockée entre 0 et $T_o/4$, la bobine joue le rôle de générateur en chargeant progressivement le condensateur, ce qui se traduit par une transformation de l'énergie magnétique en énergie électrostatique.

◆ A $t = T_o/2$, l'intensité i du courant s'annule et la charge q est maximale en valeur absolue. Ainsi, comme à t = 0, à l'instant $t = T_o/2$, l'énergie totale est purement électrostatique.

◆ Pendant la deuxième demi-période, c'est-à-dire entre $T_o/2$ et T_o ,tout se passe comme pendant la première demi-période mais avec une augmentation de la charge q de $-Q_m$ à $+Q_m$ et une circulation du courant dans le sens positif.

◆ Pendant l'intervalle de temps $]T_o/2, 3T_o/4[$, l'énergie électrostatique se transforme en énergie magnétique, tandis qu'entre $3T_o/4$ et T_o, l'énergie magnétique se transforme en énergie électrostatique. Ainsi, il s'avère que comme en régime libre amorti, il y a transformation mutuelle d'énergie magnétique et d'énergie électrostatique, mais sans aucune perte : si, pendant un quart de période To, l'énergie électrostatique se transforme en énergie magnétique, c'est l'énergie magnétique qui se transforme en énergie électrostatique pendant le quart de période suivant, et ainsi de suite. Effectivement, pour C = 0,47µF et L = 0,1H, l'enregistrement graphique de l'énergie électrostatique E_C et de l'énergie magnétique E_L avec un logiciel approprié donne les chronogrammes de la figure 16 lorsque le condensateur de l'oscillateur est chargé initialement sous la tension U_o = 5 V.

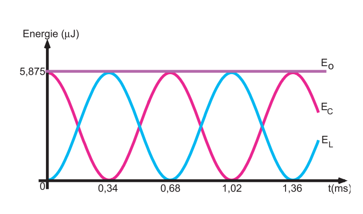


Fig.16 : Chronogrammes des énergies

Questions

1°) Interpréter énergétiquement les oscillations libres non amorties d'un circuit RLC série de résistance R nulle.

2°) A l'aide des graphiques de la figure 16 :

a) Montrer que les énergies électrostatique E_C et magnétique E_L varient périodiquement au cours du temps.

b) Calculer les périodes de E_C et de E_L, les comparer entre elles et avec la période propre To de l'oscillateur LC.

c) Relever la valeur de l'énergie totale E de l'oscillateur et la comparer à l'énergie E_o qui y est emmagasinée initialement.

3°) Montrer théoriquement que :

$$E_C = \frac{Q_m^2}{4C}(1+\cos 2\omega_o t) \text{ et que } E_L = \frac{1}{4}LI_m^2(1-\cos 2\omega_o t)$$

sachant que dans les conditions d'enregistrement, $q = Q_m\cos\omega_o t$ et vérifier que l'énergie totale de l'oscillateur est constante et égale à l'énergie qui lui est transférée initialement.

Conclusion

Les oscillations libres d'un circuit RLC série non amorti sont dues aux transformations mutuelles et intégrales de ses énergies électrostatique et magnétique : l'énergie totale du système est transférée continuellement de manière intégrale du condensateur à la bobine et inversement.

L'essentiel

■ L'évolution de la charge du condensateur d'un circuit RLC série est régie en régime libre par l'équation différentielle : $\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0}$

■ Un circuit RLC série auquel on a transféré initialement de l'énergie peut être le siège d'oscillations électriques libres amorties, c'est le régime pseudo-périodique.

■ Les oscillations libres d'un circuit RLC série sont d'autant plus amorties et leur pseudopériode est d'autant plus grande que la résistance R du circuit est plus grande. Pour des valeurs suffisamment élevées de la résistance R, c'est le régime apériodique.

■ Si la résistance d'un circuit RLC série est nulle, les oscillations libres ne sont plus amorties, elles sont sinusoïdales, c'est le régime périodique.

■ La période propre d'un oscillateur RLC série s'exprime : $\boxed{T_o = 2\pi\sqrt{LC}}$

■ La pseudo-période des oscillations libres amorties d'un circuit RLC série est légèrement supérieure à T_o.

■ Les oscillations libres d'un circuit RLC série sont dues aux transformations mutuelles de ses énergies électrostatique et magnétique.

■ En régime libre, l'énergie totale d'un circuit RLC série ne se conserve que si sa résistance électrique est nulle.

Exercices

Exercice résolu

ÉNONCÉ

Dans une séance de travaux pratiques, on dispose du matériel suivant :

- un générateur de tension idéal de f.e.m. E = 5 V,
- un condensateur de capacité C = 1 μF,
- une bobine d'inductance L = 10 mH et de résistance interne r,
- un résistor de résistance R = 90 Ω,
- un oscilloscope à mémoire.
- un interrupteur et des fils de connexion.

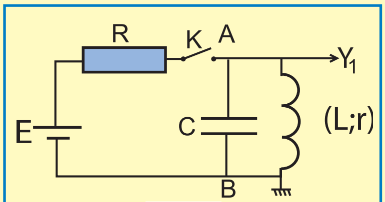


Fig.1

A l'aide de ce matériel, on réalise le montage de la figure 1.

1°) La résistance r de la bobine est supposée nulle.

a) L'interrupteur K étant fermé :

- montrer que la tension aux bornes de la bobine est nulle, en déduire la valeur de la charge du condensateur,
- calculer l'intensité I_o du courant parcourant la bobine.

b) En ouvrant l'interrupteur K à l'instant t = 0 :

- décrire qualitativement ce qui se passe dans le circuit,
- établir l'équation différentielle régissant l'évolution de la tension u aux bornes du condensateur,
- sachant que cette équation différentielle admet comme solution $u = U_m \sin(\omega_o t + \varphi)$ avec $\omega_o = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ que l'on calculera, déterminer les valeurs de U_m et φ ; écrire les expressions de la charge q(t) du condensateur et de l'intensité i(t) du courant circulant dans la bobine.

c) D'où provient l'énergie de l'oscillateur réalisé ? La calculer.

2°) Avec les réglages adéquats sur l'oscilloscope et en mettant son dispositif de balayage en marche juste avant l'ouverture de l'interrupteur K, on obtient l'oscillogramme de la figure 2. S'y appuyer pour :

a) montrer par deux méthodes différentes que la résistance interne r de la bobine n'est pas nulle ;

b) calculer r ;

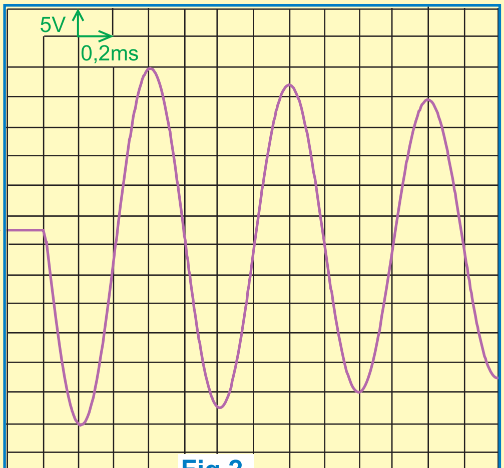


Fig.2

c) calculer la pseudo-période T des oscillations de la charge q du condensateur et la comparer à la période propre T_o ;
d) évaluer algébriquement la variation qui a affecté l'énergie totale de l'oscillateur entre les instants t_1 et t_2 indiqués sur la figure 2.

SOLUTION

1°a) - La tension instantanée $u_1 = u_{AB}$ aux bornes d'une bobine d'inductance L et de résistance r parcourue par un courant d'intensité i (Fig.1) est, en convention récepteur :

$u_1 = r\,i + L\dfrac{di}{dt}$. (1)

Lorsque le régime permanent est établi dans le circuit, i(t) devient indépendante du temps, d'où $\dfrac{di}{dt} = 0$.

Donc, l'équation (1) devient : $u_1 = r.i$.

Or, la résistance r est supposée nulle. Donc, $u_1 = 0\ V$.

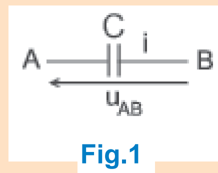


Fig.1

- En choisissant comme sens positif du courant le sens orienté de B vers A à travers le condensateur (Fig.1) et comme charge q du condensateur celle portée par son armature qui est du côté de B, on a $u_{AB} = -\dfrac{q}{C}$. Or, $u_{AB} = u_1 = 0$.

Donc la charge q est nulle.

- On sait qu'en régime permanent, le condensateur joue le rôle d'un interrupteur ouvert. Donc, tout le courant d'intensité I_o débité par le générateur circule dans la bobine.

D'après la loi de Pouillet, $\boxed{I_o = \dfrac{E}{R}}$.

A.N : $I_o = 55{,}5\ mA$.

b) - Lorsque l'on ouvre l'interrupteur K , à cause du phénomène d'auto-induction, la bobine s'oppose à l'annulation du courant. Celui-ci continue à circuler, d'après la loi de Lenz, dans le même sens. Ainsi, le condensateur va se charger et à son tour, il se déchargera dans la bobine dès que le courant s'annule et ainsi de suite :
le circuit RLC série est le siège d'oscillations libres non amorties.

- La loi des mailles s'écrit : $u_C + u_L = 0$ (Fig.2).

En posant $u_C = u$, on a : $u - L\dfrac{di}{dt} = 0$

Or, $i = \dfrac{dq}{dt}$ et $q = -C.u$. Donc, $i = -C\dfrac{du}{dt}$. D'où : $u + LC\dfrac{d^2u}{dt^2} = 0$,

ce qui signifie : $\boxed{\dfrac{d^2u}{dt^2} + \dfrac{1}{LC}u = 0}$

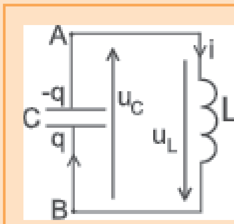


Fig.2

- On a : $u(t) = U_m \sin(\omega_o t + \varphi)$

$$\boxed{\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^4 \text{ rad.s}^{-1}}.$$

A t = 0, $u = U_m \sin \varphi = 0$, d'où $\sin\varphi = 0$. Donc, $\varphi = 0$ ou bien $\varphi = \pi$ rad.

On a : $i = -C\frac{du}{dt}$. Donc, $i = -CU_m\omega_o\cos(\omega_o t + \varphi)$. A t = 0, on a : $i = -CU_m\omega_o\cos\varphi = I_o > 0$.

Donc, $\cos\varphi < 0$. D'où, $\varphi = \pi$ rad.

$\cos\varphi = -\frac{I_o}{U_m C\omega_o} = -1$, ce qui signifie : $U_m = \frac{I_o}{C\omega_o}$.

A.N : $U_m \simeq 5{,}55$ V.

Finalement, on a : $\boxed{u(t) = 5{,}55\sin(10^4 t + \pi)}$

$q = -C.u$, d'où $\boxed{q = 5{,}55.10^{-6}\sin(10^4 t)}$

$i = -CU_m\omega_o\cos(\omega_o t + \varphi) = CU_m\omega_o\sin(\omega_o t + \varphi - \frac{\pi}{2})$. Or, $CU_m\omega_o = I_o$. Donc, $I_m = I_o = 55{,}5$ mA.

D'où : $\boxed{i = 55{,}5\sin(10^4 t + \frac{\pi}{2})}$ en mA avec t en seconde.

c) $E = E_L + E_C$

La résistance du circuit RLC série étant supposée nulle, l'énergie totale se conserve : elle reste égale à l'énergie transférée initialement à l'oscillateur, c'est l'énergie magnétique $E_L = \frac{1}{2}L.I_o^2$ emmagasinée par la bobine durant tout le régime permanent de la question 1°a).

$$\boxed{E = \frac{1}{2}L.I_o^2}$$

A.N : $E = 1{,}54.10^{-5}$ J

2°a)

Première méthode : Pour tout instant t > 0, la diminution de l'amplitude des oscillations libres durant le régime transitoire est due à la résistance du circuit qui est la résistance r de la bobine. Donc, r est non nulle.

Deuxième méthode : Durant le régime permanent, obtenu pour t<0, la tension aux bornes du condensateur est : u = 0,5 V. Or, la tension u_{AB} aux bornes de la bobine est égale à u d'où $u_{AB} = 0{,}5\text{ V} \neq 0$. Donc, $r = \frac{u_{AB}}{I'_o}$ est non nulle.

b) On a : $r = \frac{u}{I'_o}$. Or, $I'_o = \frac{E}{r+R}$, d'où $r = \frac{u}{E}(R+r)$. Donc, $\boxed{r = \frac{u.R}{E - U}}$.

A.N : $r = 10\ \Omega$.

c) D'après l'oscillogramme, $T = t_2 - t_1$ qui correspond à peu près à 3.15 div sur l'axe des temps.

Or, une division représente 0,2 ms. Donc, $T = 0,63$ ms.

$T_o = \dfrac{2\pi}{\omega_o} = 0,628$ ms, d'où T est légèrement supérieure à T_o.

d) Aux instants t_1 et t_2, u est maximale en valeur absolue. Donc, l'énergie du circuit RLC série est purement électrostatique.

A l'instant t_1, on a : $E_1 = \dfrac{1}{2}CU_{m1}^2$ et à l'instant t_2, on a : $E_2 = \dfrac{1}{2}CU_{m2}^2$.

D'après l'oscillogramme, on a : $U_{m1} = 5,5$ V et $U_{m2} = 5$ V.

Donc, $\boxed{E_2 - E_1 = \dfrac{1}{2}C\,(U_{m2}^2 - U_{m1}^2)}$.

A.N : $E_2 - E_1 = -\ 2,625.10^{-6}$ J.

Exercices à résoudre

Tests rapides des acquis

1 Items "vrai ou faux"

Evaluer les propositions suivantes par vrai ou faux.

1- La décharge d'un condensateur dans une bobine est identique à sa décharge dans un résistor.
2- La pseudo-période des oscillations d'un circuit RLC série est légèrement inférieure à sa période propre.
3- Un oscillateur RLC série transfère son énergie à l'extérieur d'autant plus rapidement que sa résistance est plus grande.
4- Dans un régime pseudo-périodique, le nombre d'oscillations augmente lorsque la pseudo-période augmente.
5- Les oscillations libres d'un circuit RLC amorti sont dues à des transformations intégrales des énergies électrostatique et magnétique.

2 Questions à Choix Multiples

Préciser pour chacune des questions suivantes, la (ou les) proposition(s) juste(s).

■ **I-** L'amortissement des oscillations libres d'un circuit RLC série est dû à :
a- la capacité du condensateur ;
b- l'inductance de la bobine ;
c- la résistance du résistor ;
d- la résistance de la bobine ;
e- sa résistance totale.

■ **II-** La décharge d'un condensateur dans une bobine purement inductive fait naître des oscillations ;
a- périodiques ;
b- sinusoïdales amorties ;
c- pseudo-périodiques non amorties ;
d- incessantes.

■ **III-** La pèriode propre T_o d'un oscillateur RLC série s'exprime :

a – $T_o = 2\pi\sqrt{\frac{L}{C}}$;

b – $T_o = 2\pi\sqrt{\frac{1}{LC}}$;

c – $T_o = 2\pi\sqrt{LC}$.

■ **IV-** Un circuit RLC série ne peut entrer en régime d'oscillations libres :
a- sans lui transférer initialement de l'énergie ;
b- sans lui transférer sans cesse de l'énergie ;
c- sans qu'il transfère lui-même de l'énergie à l'extérieur ;
d- sans les transformations mutuelles d'énergie électrique et d'énergie magnétique.

Exercices d'application

3 On se propose d'étudier le comportement d'un circuit RLC constitué par une association en série d'une bobine de résistance r et d'inductance L et d'un condensateur de capacité C = 15 μF.
On prend une pile plate du commerce de f.é.m. E = 4.5 V et un résistor de résistance R = 1 kΩ, puis on réalise le montage de la figure1.
Un dispositif informatisé d'acquisition de données permet de visualiser à travers son entrée Y la tension u aux bornes du condensateur en fonction du temps.

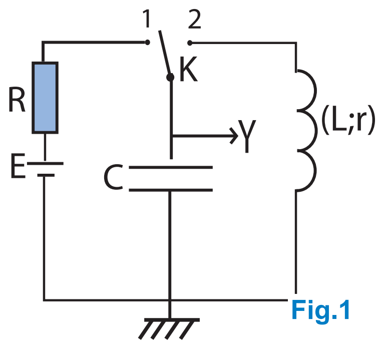


Fig.1

On place le commutateur en position 1 jusqu'à ce que le condensateur soit chargé, puis on le bascule en position 2 à un instant que l'on prendra comme origine des temps : la fermeture du commutateur en position 2 déclenche l'acquisation des mesures. La courbe de la figure 2 s'affiche sur l'écran de l'ordinateur.

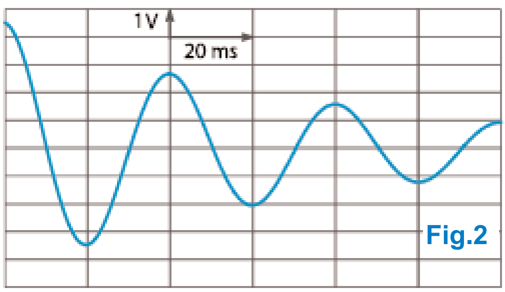
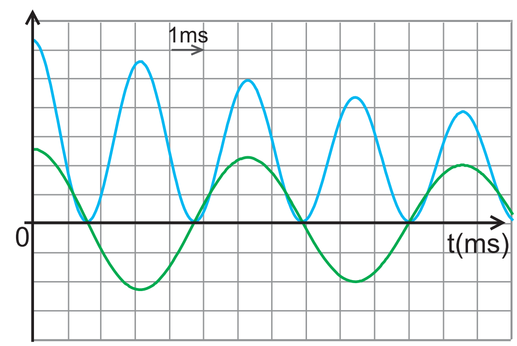


Fig.2

1°) De quel phénomène le circuit est-il le siège?
2°) Calculer l'énergie du condensateur en début d'acquisation, à l'instant t=0 et au bout de deux oscillations. Quelles sont les transformations d'énergie qui ont lieu dans ce circuit pendant une pseudopériode ?
3°) Etablir l'équation différentielle que vériferait la tension u_C entre les armatures du condensateur si la résistance interne de la bobine était nulle.
4°) Déduire de la question précédente les expressions littérales de la pulsation propre et de la période propre du circuit. Sachant que, dans les conditions choisies pour l'acquisition, la pseudopériode peut être confondue avec la période propre, calculer la valeur de l'inductance L de la bobine.

4

Un circuit RLC série est constitué d'une bobine d'inductance L = 1 H, de résistance R et d'un condensateur de capacité C = 1 μF.
Le condensateur est initialement chargé.
À t = 0, on décharge le condensateur dans la bobine et on enregistre l'évolution de la tension u_C aux bornes du condensateur ainsi que celle de l'énergie électrique E_C qui y est emmagasinée (Fig. ci-dessous).
Les échelles des ordonnées ne sont pas indiquées sur le graphique de cette figure.



1°) Montrer graphiquement que la résistance R de la bobine n'est pas nulle.
2°) Déterminer graphiquement la pseudo-période T de $u_C(t)$.
3°) Comparer la valeur mesurée T à la valeur de la période propre T_O du circuit.
4°) Quelle est la pseudo-période T_E de l'énergie E_C ?
5°) Comparer T_E et T.

5

On réalise un montage formé par une association en série:
- d'un condensateur de capacité C = 0.47 μF, initialement chargé sous une tension de 5 V ,
- d'une bobine d'inductance L = 44 mH et de résistance nulle,
- d'un interrupteur.

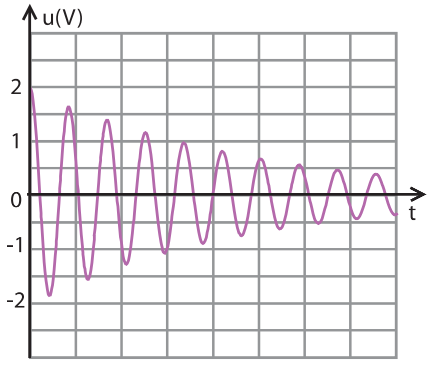
1°) a) Établir l'équation différentielle que vérifie la tension u_C aux bornes du condensateur après la fermeture du circuit. En déduire l'expression de la période propre T_0 du circuit.
b) Exprimer u_C en fonction du temps.
c) En déduire l'expression de la charge q du condensateur.
2°) On remplace le condensateur par un autre de capacité C' = 4 C et la bobine par une autre d'inductance L' = L/2.
Exprimer la nouvelle période T'_o en fonction de T_o.

6 L'équation différentielle associée à la décharge d'un condensateur de capacité C et portant initialement la charge $Q_o = 4.10^{-4}$ C, dans une bobine d'inductance L, s'écrit :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0 \quad (1)$$

1°) Donner l'expression de l'énergie totale du circuit L,C.
2°) Retrouver l'équation différentielle (1) en utilisant le fait que l'énergie totale se conserve.
3°) vérifier que $q = Q_m\sin(\omega_o t + \phi)$ est solution de l'équation (1).
4°) Donner, en fonction de L et C, l'expression de la période propre de l'oscillateur électrique. La calculer.
5°) Le circuit a été fermé à un instant pris comme origine des temps .
Déterminer numériquement les constantes figurant dans l'expression de la charge q.
On donne : C = 30 μF et L = 0,1 H.

7 Le graphe ci-après représente l'évolution au cours du temps de la tension u aux bornes d'un condensateur de capacité C = 1,16 μF qui a été chargé puis connecté à une bobine d'inductance L = 0,35H et de résistance interne r. On numérotera les maxima de tension visibles à partir de 1.
La pseudopériode des oscillations a pour valeur T = 4,4 ms.



1°) Comparer la pseudopériode T à la période propre T_o de l'oscillateur.
2°) Exprimer puis calculer l'énergie électrique du condensateur aux instants t_1 et t_7 correspondant au maxima 1 à 7.
3°a) Donner la valeur de l'énergie magnétique de la bobine et de l'énergie totale du circuit aux mêmes instants.
b) Conclure quant à l'évolution de l'énergie totale de l'oscillateur au cours du temps.

Exercices de synthèse

8 On considère le circuit électrique comportant un générateur de tension idéal de f.e.m. E = 6 V, un condensateur de capacité C = 20 μF, une bobine d'inductance L = 0,8 H et de résistance nulle, deux résistors de même résistance R = 20 Ω et deux interrupteurs K_1 et K_2 (Fig.1).

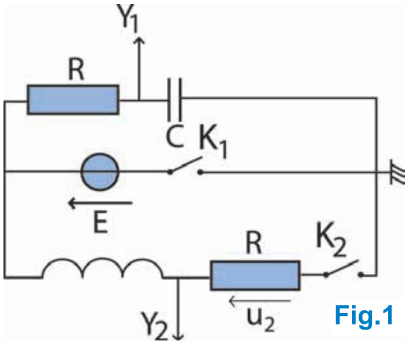


Fig.1

A- Première partie
Dans cette expérience, on ferme K_1 (en maintenant K_2 ouvert). Le dipôle RC est alors soumis à un échelon de tension de valeur E.
1°) Quel est le nom du phénomène observé sur la voie 1 à la fermeture de K_1?
2°) Reproduire la partie de circuit concernée et indiquer sur le schéma, juste après la fermeture de l'interrupteur K_1, le sens du courant, le signe des charges de chacune des armatures du condensateur.Indiquer la flèche-tension u_1 aux bornes du condensateur.
3°) sur la voie Y_1 d'un oscilloscope à mémoire, on obtient la courbe de la figure 2. Déterminer graphiquement, la constante de temps τ du dipôle RC en expliquant la méthode utilisée. Sachant que R = 20 Ω, en déduire la valeur de la capacité C.
4°) L'étude théorique du dipôle RC conduit à l'équation différentielle : $\tau\frac{du_1}{dt} + u_1 = E$

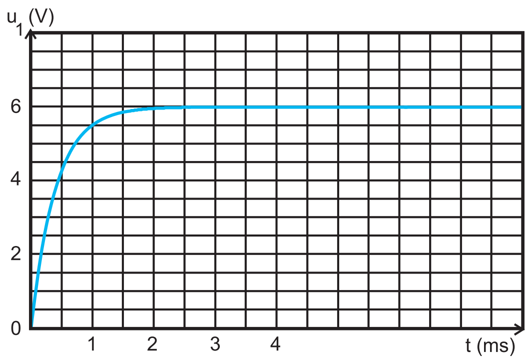


Fig.2

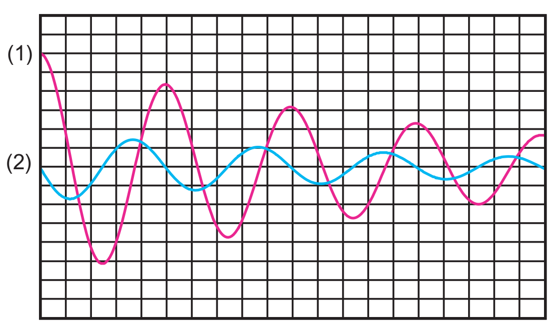
a- Retrouver cette équation différentielle en appliquant la loi des mailles.
b- Compte tenu des conditions initiales, la solution de cette équation est de la forme:

$u_1 = E.\,[1-\exp(-{}^{t}/_{\tau})]$.

Calculer la valeur de u_1 pour $t = 5\,\tau$. Conclure.

B- Deuxième partie

Une fois la première expérience réalisée, on ouvre K_1 puis on ferme K_2. Le circuit est alors le siège d'oscillations électriques. À L'aide d'un dispositif d'acquisition de données, on visualise la tension u_1 aux bornes du condensateur sur la voie 1 et la tension u_2 aux bornes du résistor sur la voie 2 du même oscilloscope. On obtient les courbes **1** et **2** de la figure 3.

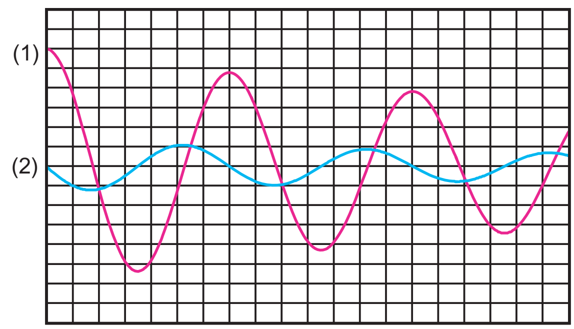


5 ms/dv ; 1 V /div pour u_1 ; 0,2 mV/div pour u_2

Fig.3

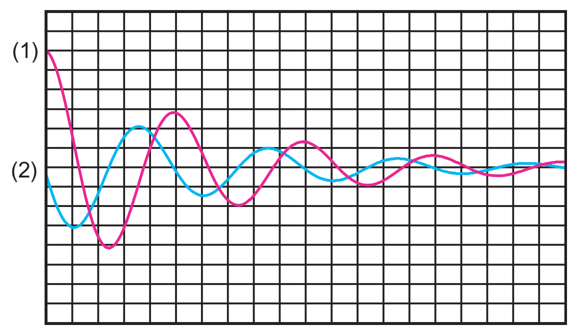
1°) Attribuer à chaque courbe la tension correspondante en justifiant brièvement pour une courbe seulement.
2°) Etablir l'équation différentielle à laquelle obéissent les oscillations de u_2 (t).
3°) Déterminer graphiquement la valeur de la pseudopériode T des oscillations. Comparer les valeurs de T et de la période propre T_o de l'oscillateur.

4°) On réalise à présent la deuxième expérience en modifiant un seul des paramètres R ou L. Deux cas sont proposés : dans l'un, on a augmenté la valeur de L ; dans l'autre, on a augmenté la valeur de R. On obtient les courbes des figures 4 et 5.
Attribuer à chaque cas proposé la figure qui lui correspond et justifier la réponse.



5 ms/dv ; 1 V /div pour u_1 ; 0,2 mV/div pour u_2

Fig.4



5 ms/dv ; 1 V /div pour u_1 ; 0,2 mV/div pour u_2

Fig.5

9

Un condensateur de capacité $C = 10\,\mu F$ est chargé avec un générateur maintenant entre ses bornes une tension $U_o = 3$ V.

1°) Calculer la charge du condensateur et l'énergie qu'il a emmagasiné.
2°) Ce condensateur chargé est déconnecté du générateur puis relié, à t = 0, aux bornes d'une bobine d'inductance L = 0,1 H. La résistance totale du circuit est pratiquement nulle.
a) Faire un schéma du montage. Dessiner qualitativement ce que l'on observerait sur l'écran d'un oscilloscope branché aux bornes du condensateur.
b) Donner une interprétation énergétique du phénomène.

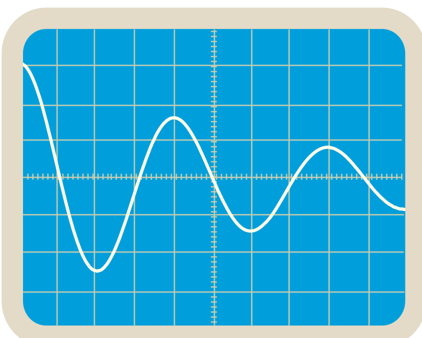
c) Établir l'équation différentielle régissant l'évolution temporelle de la tension instantanée u_C aux bornes du condensateur.

d) Quelle relation doit lier la période propre T_O, C et L pour que la solution de cette équation différentielle soit $u_C(t)=U_m\sin(\omega_O t+\phi)$?

e) Déterminer les valeurs de la tension maximale U_m et de la phase initiale ϕ.

f) Exprimer, en fonction de T_O, les instants pour lesquels l'intensité du courant électrique est maximale.

3°) En réalité la bobine possède en plus de l'inductance une résistance r non nulle.
La tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur est enregistrée avec un oscilloscope à mémoire. La courbe obtenue avec la sensibilité horizontale $10ms.div^{-1}$ est reproduite sur la figure ci-dessous.



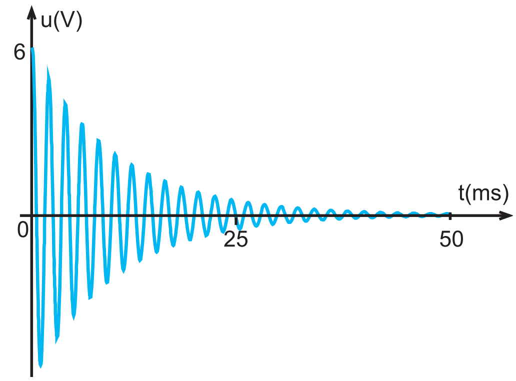
a- Comparer la pseudopériode T et T_O.

b- Pourquoi a-t-on besoin d'un oscilloscope à mémoire ?

c- Calculer l'énergie thermique dissipée par la résistance r de la bobine au bout de l'oscillation produite entre t_o = 0 et t_1 = T.

10

Au cours d'une séance de travaux pratiques, on veut vérifier l'exactitude de la valeur L = 0,2 H de l'inductance d'une bobine, indiquée par le fabricant.
Pour cela, on étudie la décharge d'un condensateur de capacité C = 0,5 µF, initialement chargé sous la tension E = 6 V, à travers la bobine.
A l'aide d'un dispositif informatisé d'acquisition de données, on visualise sur l'écran d'un ordinateur, la courbe d'évolution de la tension u aux bornes du condensateur en fonction du temps. (Fig. ci-après)



1°) Pourquoi qualifie-t-on un tel régime d'évolution temporelle de u comme étant un régime pseudopériodique et non périodique ?

2° a) Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension u.

b) On pose cette équation différentielle sous la forme suivante : $\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{1}{\tau}\frac{du}{dt}+\omega_o^2u=0$

* Expliciter τ et donner sa dimension ainsi que sa signification physique.

* Déterminer à partir de la courbe, une valeur approchée de τ. En déduire la valeur de L.
On donne R = 20 Ω.

c) Comparer la valeur de l'inductance trouvée expérimentalement L_{exp} avec la valeur L=0,2H portée sur le support de la bobine en calculant l'écart relatif $\frac{L_{exp}-L}{L}$.
En déduire si l'indication L = 0,2 H est correcte.

11

A l'aide d'un générateur de tension idéal, d'un condensateur, de deux résistors et d'une bobine inductive, on réalise le montage de la figure 1.

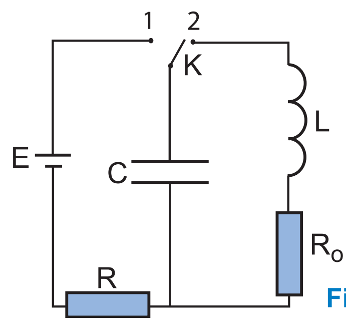


Fig.1

1°) On réalise la charge du condensateur de capacité C = 50 μF par le générateur de tension idéal de f.e.m. E = 6 V.

A l'instant t = 0, on place le commutateur K en position 1. L'évolution au cours du temps de la tension u_R aux bornes du résistor de résistance R = 30 kΩ et celle de la tension u_C aux bornes du condensateur sont représentées sur la figure 2.

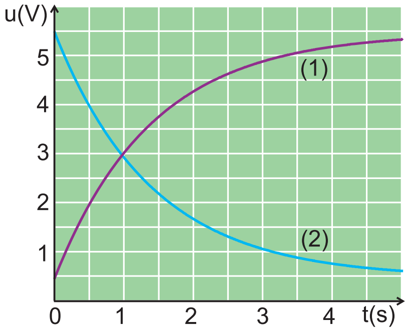


Fig.2

a) Quelle est, des courbes 1 et 2, celle qui illustre l'évolution de u_C ? Justifier la réponse.

b) Quelle serait la charge q du condensateur à la fin du processus de charge ?

c) Sachant que la constante de temps τ du circuit est la durée au bout de laquelle le condensateur a acquis 63% de sa charge maximale, déterminer graphiquement la valeur de τ.

d) Déterminer la valeur de l'intensité i du courant de charge à l'instant t = τ.

2°) On suppose maintenant que le condensateur a acquis sa charge maximale. On place l'interrupteur K en position 2. On observe, à l'aide d'un oscilloscope, la tension u_C sur l'entrée Y_1 et la tension u_{Ro} aux bornes du

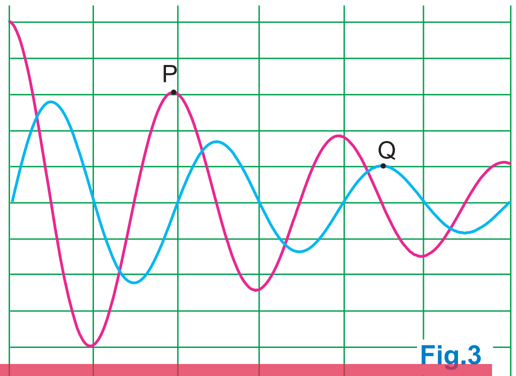


Fig.3

résistor de résistance R_o = 5 Ω sur l'entrée Y_2 (Fig.3)

Les réglages de l'oscilloscope sont :

- sensibilité horizontale : 5 ms/div
- sensibilté verticale :

1V/div pour Y_1 et 250 mV/div pour Y_2.

a) Rappeler les expressions de l'énergie électrostatique E_C et de l'énergie magnétique E_L. Calculer ces énergies aux instants correspondant aux points P et Q (Fig.3).

b) Comparer les énergies totales du circuit RLC série aux instants correspondant aux points P et Q.

12 Étude de texte

Capteur d'humidité

La mesure du taux (ou pourcentage) d'humidité relative de l'air (%HR) est appelée l'hygrométrie. Pour pouvoir y accéder, on fait recours à des capteurs de type "résistif" (reposant sur la variation d'une résistance avec l'humidité) ou "capacitif" (reposant sur la variation de la capacité avec l'humidité) : les premiers capteurs, souvent à base d'oxydes métalliques, sont peu précis et affectés par la condensation. Les seconds, dits "humidistances" possèdent souvent les qualités requises.

Un hémidistance comporte un condensateur plan dont la capacité de trés faible valeur C de l'ordre de 120 pF varie en fonction de l'humidité du diélectrique. En fait, le diélectrique est un film de polymère (polyamide par exemple) dont la permittivité varie avec son humidité (Fig.1).

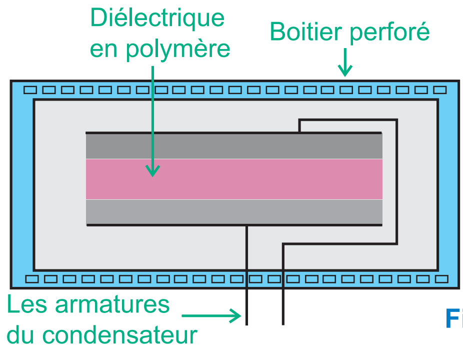


Fig.1

Cette variation d'humidité entraîne une variation de la fréquence propre du circuit RLC série dans lequel le condensateur est inséré.(Fig.2)

Ces capteurs d'humidité sont conçus pour fonctionner entre - 10° C et + 40° C, dans une gamme de mesure de 10 à 100 % d'humidité, avec une précision de quelques % et un temps de réponse de l'ordre de 30 s.

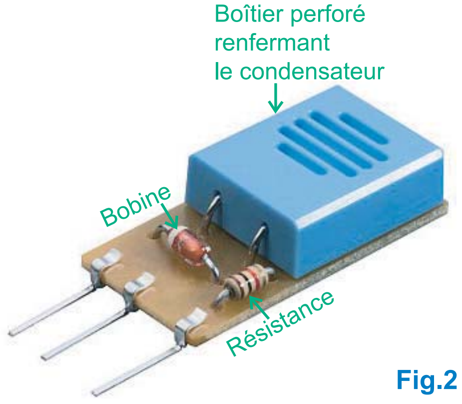


Fig.2

Questions

1°) La permittivité du diélectrique utilisé est dite hygroscopique, pourquoi ?

2°) Expliquer comment la variation du taux d'humidité relative de l'air entraîne une variation de la fréquence propre des oscillations.

3°) Sachant que la valeur de C est à 40% HR et que la fréquence propre des oscillations au lieu de l'expérience est N_o = 31850 Hz, déterminer le taux d'humidité relative de l'air en ce lieu.

On donne L = 200 mH et on suppose que la fréquence des oscillations est pratiquement égale à la fréquence propre de l'oscillateur.

Fiche technique

Visualisation d'un régime transitoire avec un oscilloscope analogique

Pour la mise en évidence expérimentale des régimes pseudopériodique et apériodique d'un oscillateur RLC série comme lors de l'étude expérimentale de la réponse d'un dipôle RC ou RL à un échelon de tension, on a eu besoin d'un oscilloscope à mémoire qui ne peut être que numérique. Mais, dans le cas échéant, c'est-à-dire à défaut d'un oscilloscope de ce type, peut-on se débrouiller avec un oscilloscope analogique ?

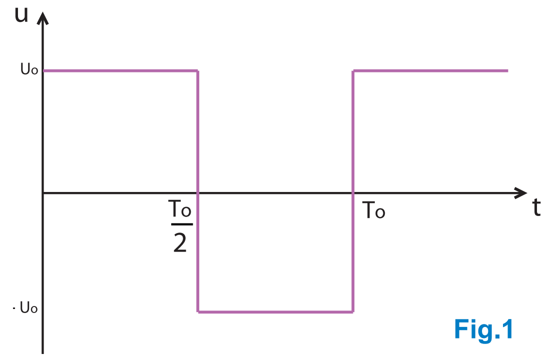


Fig.1

Oui, il suffit de penser à profiter de la durée θ_p= 0,1s de persistance des impressions lumineuses sur la rétine de l'oeil et en cherchant un moyen permettant de visualiser le régime transitoire, que ce soit le régime pseudopériodique, le régime apériodique ou autre, de manière répétitive toutes les durées θ inférieures à la durée θ_p de persistance des impressions lumineuses. Pour cette fin, il est pratique et assez commode, pour charger par exemple le condensateur du circuit RLC série du montage de la figure 1 de la page 80, d'utiliser au lieu d'un générateur de tension idéal de f.e.m. E = 5 V, un générateur de tension en créneaux évoluant au cours du temps selon le chronogramme de la figure 1, entre $-U_o$= -5V et $+U_o$= +5V. Puis, on réalise le montage de la figure 2.

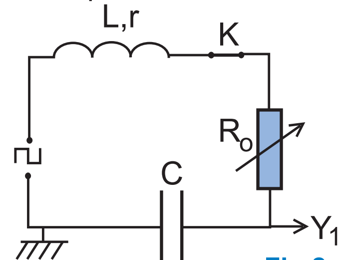


Fig.2

Après avoir mis l'oscilloscope analogique en marche et avoir fait les réglages nécessaires, on observe à priori l'oscillogramme stable de la figure 3 à condition que la demi période $T_e/2$ de la tension u en créneaux soit à la fois inférieure à la durée θ_p de persistance des impressions lumineuses à l'oeil et trés supérieure à la pseudopériode T des oscillations libres et par suite trés supérieure à la période propre $T_o = 2\pi\sqrt{LC}$ de l'oscillateur.

Donc, pour obtenir un oscillogramme net et stable comme celui de la figure 3, il faut bien étudier le choix des valeurs de L et de C :

- $T_o << T_e$. D'où, $LC << T_e^2$
- $T_e < \theta_p$. D'où, $T_e^2 < \theta_p^2$

Il faut donc : $LC << \theta_p^2 = 10^{-2}\ s^2$.

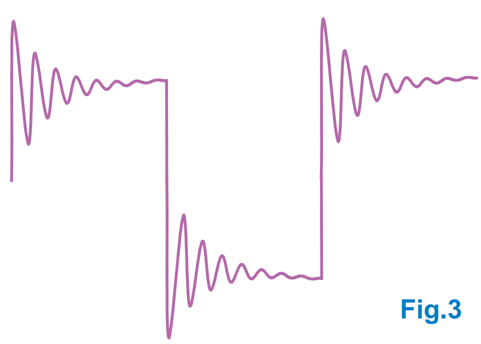


Fig.3

Remarque

Dans le cas de la réponse d'un dipôle RC ou RL à un échelon de tension, il faut veiller à ce que la demi période de la tension en crénaux soit dix fois plus grande que la constante de temps du dipôle.

Enfin, en agissant sur la base des temps de l'oscilloscope, on arrive à visualiser l'oscillogramme représentant une seule décharge oscillante, c'est-à-dire la réponse à un seul échelon de tension (Fig.4)

Fig.4

De plus, l'oscilloscope lui-même peut être un facteur de perturbation des mesures. En fait, l'entrée Y_1 ou Y_2 d'un oscilloscope est équivalente à un résistor de résistance R_{osc} = 1 MΩ monté en parallèle avec un condensateur de capacité C_{osc} allant de 16 à 47 pF. Donc, il faut en tenir compte pour réussir l'expérience.

Par conséquent, le schéma du montage réalisé devient équivalent à celui de la figure 5.

Par application de la loi des mailles, on écrit :

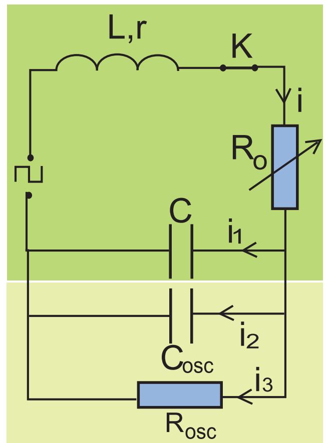


Fig.5

$$u_C + (R_o + r)\, i + L\frac{di}{dt} = 0 \qquad (1)$$

où $i = i_1 + i_2 + i_3 = \dfrac{dq}{dt} + \dfrac{dq_{osc}}{dt} + \dfrac{u_C}{R_{osc}}$.

Or, $q = Cu_C$ et $q_{osc} = C_{osc}.u_C$, il vient alors :

$i = C'\dfrac{du_C}{dt} + C_{osc}u_C$ avec $C' = C + C_{osc}$.

On peut facilement disposer d'un condensateur de capacité C >> 50 pF.

Donc, on peut négliger C_{osc} devant C, d'où $C' \simeq C$ et $i \simeq C\dfrac{du_c}{dt} + C_{osc}\, u_C$ (2).

(1) et (2) donnent : $\boxed{LC\dfrac{d^2u_C}{dt^2} + [(R_o+r)\, C + \dfrac{L}{R_{osc}}]\dfrac{du_C}{dt} + (1 + \dfrac{R_o+r}{R_{osc}})\, u_C = u}$

Pour que cette équation ne diffère pas de : $\boxed{LC\dfrac{d^2u_C}{dt^2} + (R_o + r)\, C\dfrac{du_C}{dt} + u_C = u}$, il faut :

- $1 + \dfrac{R}{R_{osc}} \simeq 1$, c'est-à-dire $\boxed{\dfrac{R}{R_{osc}} << 1}$, ce qui est facilement vérifié car R_{osc} = 1 MΩ est trés élevée.
- $(R_o + r)C + \dfrac{L}{R_{osc}} \simeq (R_o + r)C$. Donc $\dfrac{L}{R_{osc}} << (R_o + r)C$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{R_{osc}\, C} << \dfrac{Ro+r}{L}$,

ce qui signifie : $\boxed{\dfrac{L}{(R_o+r)C} << R_{osc} = 10^6}$.

Pour que la condition $(R_o + r) << R_{osc}$ reste satisfaite, on ne peut augmenter R_o.
Donc, pour satisfaire cette dernière condition, il faut choisir une très petite inductance L et une grande capacité C, mais sans perdre de vue la condition: $\boxed{LC << 10^{-2}\ s^2}$.

Exemples :

- Avec L = 10 mH, C = 100 µF et R_o telle que $(R_o + r) = 20\ \Omega$, on a :

  $LC = 10^{-6} << 10^{-2}$ et $\dfrac{L}{(R_o+r)C} = 5\ \Omega << 10^{6}\Omega$: c'est un très bon choix.

- Avec L = 1 H, C = 1 µF et $(R_o + r) = 20\ \Omega$, on a toujours :

  $LC = 10^{-6} << 10^{-2}$ et $\dfrac{L}{(R_o + r)C} = 5.1O^{4}\ \Omega$, qui n'est pas négligeable devant la valeur $10^{6}\ \Omega$ de R_{osc} : c'est un mauvais choix.

Objectifs

- Réaliser à l'aide d'un amplificateur opérationnel, un montage équivalent à un dipôle à résistance négative.
- Réaliser un montage permettant d'entretenir les oscillations d'un circuit RLC série.
- Déterminer la valeur de la résistance négative indispensable à l'entretien des oscillations d'un circuit RLC série.
- Montrer que la fréquence des oscillations entretenues est égale à la fréquence propre de l'oscillateur.
- Interpréter énergétiquement l'amorçage des oscillations entretenues d'un circuit RLC série.

Prérequis

SAVOIR	SAVOIR FAIRE
◆ Définir un oscillateur électrique. ◆ Définir la pulsation propre, la période propre et la fréquence propre d'un oscillateur RLC série. ◆ Ecrire l'équation différentielle régissant les oscillations libres d'un circuit RLC série. ◆ Exprimer l'énergie totale d'un circuit RLC série. ◆ Enumérer les propriétés d'un amplificateur opérationnel idéal.	◆ Reconnaître les oscillations libres d'un circuit RLC série. ◆ Visualiser à l'oscilloscope les oscillations libres amorties d'un circuit RLC série. ◆ Mesurer la pseudopériode des oscillations libres amorties d'un circuit RLC série. ◆ Etablir l'équation différentielle régissant les oscillations libres d'un circuit RLC série. ◆ Expliquer la diminution de l'énergie totale d'un oscillateur RLC série.