Chapitre 4

Similitudes

Dans son programme d'Erlangen, en 1872, Felix Klein propose le caractère d'aujourd'hui de la géométrie, en considérant la géométrie comme l'étude d'une famille de transformations.
Certaines familles de transformations méritent une étude particulière : celles dont la composée de deux transformations appartienne encore à cette famille, l'identité appartienne aussi à cette famille et la transformation inverse d'une transformation de la famille y appartienne encore (chaque famille forme alors ce qu'on appelle groupe).
Parmi ces transformations, les déplacements, les symétries, les similitudes et leurs composés forment ce que Klein appelle le groupe principal de la géométrie euclidienne ; les propriétés métriques sont alors les propriétés invariantes par ce groupe.

(J. Dhombres et al, Mathématiques au fil des âges, 1987).

Chapitre 4

Similitudes

Dans tout le chapitre, le plan est orienté dans le sens direct.

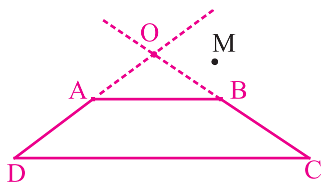
I. Homothéties et translations

Définition (rappel)

Soit I un point et k un réel non nul. On appelle homothétie de centre I et de rapport k l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$.

Activité 1

Dans la figure ci-contre, ABCD est un trapèze et M est un point.
Les droites (AD) et (BC) se coupent en O.
On désigne par h l'homothétie de centre O qui transforme A en D
1. Montrer que h transforme B en C.
2. Construire l'image du point M par h.



Théorème (propriété caractéristique d'une homothétie)

Soit k un réel non nul et différent de 1.
Une application f est une homothétie de rapport k, si et seulement si, pour tous points M et N d'images M' et N' par f, $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

Démonstration

Si f est une homothétie de rapport k, alors pour tous points M et N d'images M' et N' par f, $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'I} + \overrightarrow{IN'} = k(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IN}) = k\overrightarrow{MN}$.

Réciproquement, soit une application f telle que $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$, pour tous points M et N d'images M' et N' par f. Montrons que f est une homothétie.

Soit A un point d'image A' et I le barycentre des points pondérés $(A, -k)$ et $(A', 1)$ de sorte que $\overrightarrow{IA'} = k\overrightarrow{IA}$.

Pour tout point M du plan d'image M', $\overrightarrow{IM'} = \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{A'M'} = k(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AM}) = k\overrightarrow{IM}$.

Le résultat en découle.

Théorème

Toute homothétie conserve les mesures des angles orientés.

Démonstration

Soit h une homothétie de rapport k et A, B , C trois points du plan deux à deux distincts.
On note A', B' et C' leurs images respectives par h . On peut alors écrire

$(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}}) \equiv (\widehat{k\overrightarrow{AB}, k\overrightarrow{AC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})\ [2\pi]$.

Composée de deux homothéties

Théorème

La composée de deux homothéties de rapports respectifs k_1 et k_2 est

une homothétie de rapport $k_1 k_2$ si $k_1 k_2 \neq 1$,

une translation si $k_1 k_2 = 1$.

Démonstration

Soit k_1 et k_2 deux réels non nuls et h_1 et h_2 deux homothéties de rapports respectifs k_1 et k_2. Pour tous points M et N du plan d'images respectives M' et N' par $h_2 \circ h_1$, $\overrightarrow{M'N'} = k_2 k_1 \overrightarrow{MN}$.

Si $k_1 k_2 \neq 1$, alors $h_2 \circ h_1$ est une homothétie de rapport $k_1 k_2$.

Si $k_1 k_2 = 1$, alors $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ et par conséquent $h_2 \circ h_1$ est une translation.

Activité 2

Soit A et B deux points distincts du plan et h_1 et h_2 deux homothéties de centres respectifs A et B et de rapports respectifs 2 et $\frac{1}{3}$.

Construire le centre de chacune des homothéties $h_2 \circ h_1$ et $h_1 \circ h_2$.

Activité 3

Soit t une translation de vecteur $\vec{u}$ et h une homothétie de rapport $k \neq 1$.

1. a. Soit A et B deux points du plan et A' et B' leurs images respectives par $h \circ t$. Montrer que $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.
   b. Quelle est alors la nature de $h \circ t$?
2. Déterminer de même la nature de $t \circ h$.

L'activité précédente permet d'énoncer le théorème ci-dessous.

Théorème

La composée d'une translation et d'une homothétie de rapport $k \neq 1$ est une homothétie de rapport k.

Homothétie et nombres complexes

Théorème

Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.
L'application f est une homothétie de rapport $k \neq 1$, si et seulement si, il existe un nombre complexe b tel que $z' = kz + b$. De plus, l'affixe z_A du centre A de l'homothétie f vérifie $z_A = \dfrac{b}{1-k}$.

Démonstration

Soit f une application et M un point d'image respective M' par f.
On désigne par z et z' les affixes respectives des points M et M'.
L'application f est une homothétie de centre A et de rapport $k \neq 1$, si et seulement si,
$\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$, ou encore si et seulement si, $z' - z_A = k(z - z_A)$, où z_A est l'affixe du point A.
On en déduit que f est une homothétie de centre A et de rapport k, si et seulement si,
$z' = kz + z_A(1-k)$.
Le théorème en découle.

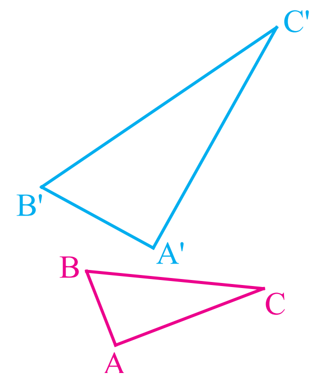
Activité 4

Donner dans chacun des cas suivants, la nature et les éléments caractéristiques de l'application du plan dans lui-même qui à tout M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.
a. $z' = -2z + 3$.
b. $z' = 4z + 1 - i$.

II. Similitudes

Activité 1

Dans la figure ci-contre ABC et $A'B'C'$ sont deux triangles tels que
$\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC}$.
Soit I un point de $[A'B']$ tel que $A'I = AB$ et J un point de $[A'C']$ tel que $A'J = AC$.
1. Montrer que les droites (IJ) et $(B'C')$ sont parallèles.
2. Montrer qu'il existe une isométrie g qui envoie A, B et C respectivement sur A', I et J.
3. Soit h l'homothétie de centre A' qui envoie I sur B' et $S = h \circ g$.
Déterminer les images de A, B et C par S.



Définition

Soit k un réel strictement positif. On appelle similitude de rapport k, toute application du plan dans lui-même telle que pour tous points A et B d'images respectives A' et B', $A'B' = k\,AB$.

Exemples

Les isométries sont des similitudes de rapport 1.

Toute homothétie de rapport k est une similitude de rapport $|k|$.

Théorème

La composée de deux similitudes de rapports respectifs k et k' est une similitude de rapport kk'.

Démonstration

Soit f une similitude de rapport k et g une similitude de rapport k'.
Soit A et B deux points du plan, A' et B' leurs images respectives par f et A'' et B'' les images respectives de A' et B' par g . On peut écrire $A''B'' = k'\,A'B' = k'k\,AB$. Par suite, $g \circ f$ est une similitude de rapport kk'.

Théorème

Une application du plan dans lui-même est une similitude, si et seulement si, elle est la composée d'une homothétie et d'une isométrie.

Démonstration

Soit f une similitude de rapport k et h une homothétie de rapport k.
On peut écrire $f = h \circ (h^{-1} \circ f)$. De plus, l'application $h^{-1} \circ f$ est une isométrie car c'est une similitude de rapport 1. On en déduit que f est la composée dlune homothétie et d'une isométrie.
Réciproquement, soit f la composée d'une homothétie de rapport k et d'une isométrie g.
Soit A et B deux points, A' et B' leurs images respectives par g et A'' et B'' les images respectives de A' et B' par h . Alors $A''B'' = |k|A'B' = |k|AB$.
On en déduit que f est une similitude.
Le cas où f est la composée d'une isométrie et d'une homothétie se traite de la même manière.

Théorème

Pour tous points A,B,C et D, d'images respectives A', B', C' et D' par une similitude de rapport k , $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{C'D'} = k^2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$.

Démonstration

Soit $f = h \circ g$ une similitude telle que h est une homothétie de rapport k et g est une isométrie. Soit A, B, C et D des points, A_1, B_1, C_1 et D_1 leurs images respectives par g et A', B', C' et D' les images respectives de A_1, B_1, C_1 et D_1 par h.
Alors $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{C'D'} = k^2\overrightarrow{A_1B_1}.\overrightarrow{C_1D_1} = k^2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$.

Les propriétés ci-dessous découlent des propriétés des homothéties et des isométries.

Propriétés

- Une similitude de rapport k est une bijection et sa réciproque est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.
- Une similitude conserve les angles géométriques.
- Une similitude conserve l'orthogonalité.
- Une similitude conserve l'alignement et le barycentre.
- Une similitude transforme un segment en un segment.
- Une similitude transforme une droite en une droite.
- Une similitude conserve le parallélisme.
- Une similitude transforme un cercle en un cercle et conserve le contact.
- Soit A, B, C, D, E, F des points du plan et A', B', C', D', E', F' leurs images respectives par une similitude.

  Si $\overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{CD} + b\overrightarrow{EF}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, alors $\overrightarrow{A'B'} = a\overrightarrow{C'D'} + b\overrightarrow{E'F'}$.

Théorème

Deux similitudes qui coïncident sur trois points non alignés coïncident sur tout le plan.

Démonstration

Soit f et g deux similitudes qui coïncident sur trois points non alignés A, B et C.

Alors f et g ont nécessairement le même rapport et alors $f^{-1} \circ g$ est une isométrie qui fixe les points A, B et C. Il en résulte que $f^{-1} \circ g$ est l'identité du plan et par suite $f = g$.

Activité 2

On dit que deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables, s'il existe une similitude qui envoie A, B et C sur A', B' et C'.

1. Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles semblables. Montrer que $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$.

2. Montrer que deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables, si et seulement si, $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ et $\widehat{C} = \widehat{C'}$.

Propriétés

Soit f, g et h trois similitudes.

- $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.
- $f = g$, si et seulement si, $h \circ f = h \circ g$.

III. Similitudes directes – Similitudes indirectes

Activité 1

Soit h et h_1 deux homothéties et g et g_1 deux isométries telles que $h \circ g = h_1 \circ g_1$.

1. Montrer que $h_1^{-1} \circ h$ est un déplacement.
2. Montrer que g est un déplacement, si et seulement si, g_1 est un déplacement.

Définition

On dit qu'une similitude est directe si elle est la composée d'une homothétie et d'un déplacement.
On dit qu'une similitude est indirecte si elle est la composée d'une homothétie et d'un antidéplacement.

Conséquence

Toute similitude directe conserve les mesures des angles orientés.
Toute similitude indirecte change les mesures des angles orientés en leurs opposées.

Théorème

- La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.
- La composée de deux similitudes indirectes est une similitude directe.
- La composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.
- La réciproque d'une similitude directe est une similitude directe.
- La réciproque d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.

Théorème

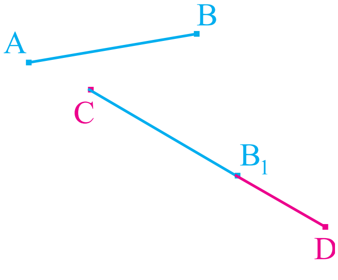
Soit A, B, C et D des points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.
Il existe une unique similitude directe qui envoie A sur C et B sur D.
Il existe une unique similitude indirecte qui envoie A sur C et B sur D.

Démonstration

Unicité

Si f et g sont deux similitudes de même nature qui coïncident sur deux points distincts A et B, alors $f \circ g^{-1}$ est une similitude directe qui fixe A et B et qui a pour rapport 1. On en déduit que $f \circ g^{-1}$ est l'identité du plan.

Existence



Soit A, B, C et D des points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.
Soit B_1 le point de la demi- droite [CD) tel que $CB_1 = AB$.
On sait qu'il existe un unique déplacement g qui envoie A sur C et B sur B_1. Si h est l'homothétie de centre C qui envoie B_1 sur D alors $f = h \circ g$ est la similitude directe qui envoie A sur C et B sur D.

De même, on sait qu'il existe un unique antidéplacement g_1 qui envoie A sur C et B sur B_1.

Si h est l'homothétie de centre C qui envoie B_1 sur D alors $f = h \circ g_1$ est la similitude indirecte qui envoie A sur C et B sur D.

IV. Similitudes directes

IV. 1 Angle d'une similitude directe

Théorème et définition

Soit f une similitude directe et A, B, C et D des points tels que $AB \neq 0$ et $CD \neq 0$. Soit A', B', C' et D' les images respectives de A, B, C et D.

Alors $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'})} \ [2\pi]$.

En désignant par θ une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$, on dit que f est une similitude directe d'angle θ.

Activité 1

Soit f et g deux similitudes directes d'angles respectifs θ et θ'.
Soit deux points distincts A et B. On note A' et B' les images de A et B par g et A'' et B'' les images de A' et B' par f.

Déterminer $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A''B''})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AB})}$.

Théorème

Soit f et g deux similitudes directes d'angles respectifs θ et θ'.
La similitude directe $f \circ g$ est d'angle $\theta + \theta'$.

La similitude directe f^{-1} est d'angle $-\theta$.

IV. 2 Centre d'une similitude directe

Activité 1

Soit A et B deux points distincts du plan et k un réel strictement positif et différent de 1. On considère l'ensemble E des points M du plan tels que $MA = kMB$.

1. Montrer que M appartient à E, si et seulement si, $\left(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}\right) = 0$.
2. Soit G le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, -k)$ et G′ le barycentre de $(A, 1)$ et (B, k).

   Montrer que M appartient à E, si et seulement si, $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MG'} = 0$.
3. En déduire que E est le cercle de diamètre $[GG']$.

Activité 2

Soit A et B deux points distincts du plan.
Déterminer et construire dans chacun des cas, l'ensemble F des points M du plan tels que

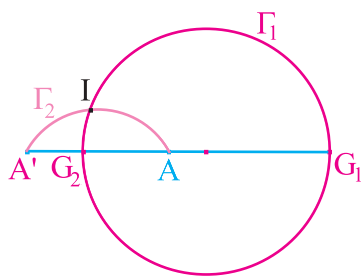
a. $\widehat{\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)} \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$, b. $\widehat{\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$, c. $\widehat{\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)} \equiv \frac{4\pi}{3}\,[2\pi]$.

Théorème

Toute similitude directe de rapport différent de 1 admet un unique point fixe, appelé centre de la similitude.

Démonstration

Soit f une similitude directe de rapport $k \neq 1$ et d'angle θ.
Si f est une homothétie alors f admet un unique point fixe, qui est le centre de l'homothétie.
Supposons que f n'est pas une homothétie, dans ce cas l'angle de f est non nul. Considérons un point A non invariant par f, d'image A'.



Soit Γ_1 le cercle de diamètre $[G_1G_2]$ où G_1 et G_2 sont les barycentres respectifs de $(A',\ 1)$, $(A, -k)$ et $(A',\ 1)$, $(A,\ k)$.
Soit Γ_2 l'ensemble des points du plan tels que $\widehat{\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MA'}\right)} \equiv \theta\,[2\pi]$.
Alors Γ_2 est soit un arc de cercle, soit un segment privé des points A et A'.
Les ensembles Γ_1 et Γ_2 se coupent en un unique point I car G_2 appartient à $[AA']$ et G_1 n'appartient pas à $[AA']$.
De plus, le point I vérifie les relations $IA' = kIA$ et $\widehat{\left(\overrightarrow{IA},\ \overrightarrow{IA'}\right)} \equiv \theta\ [2\pi]$.
L'image I' de I par f est l'unique point vérifiant $I'A' = kIA$ et $\widehat{\left(\overrightarrow{IA},\ \overrightarrow{I'A'}\right)} \equiv \theta\ [2\pi]$.
Il en résulte que les points I et I' sont confondus, c'est-à-dire que f fixe I.

Conséquence

Une similitude directe de rapport différent de 1 est parfaitement déterminée par la donnée de son centre, son rapport et son angle.
Le centre, le rapport et l'angle d'une similitude directe sont appelés éléments caractéristiques de cette similitude.
Une application f est une similitude directe de rapport $k \neq 1$, de centre I et d'angle θ, si et seulement si, pour tout point M distinct de I, d'image M', $IM' = k\,IM$ et $\widehat{\left(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IM'}\right)} \equiv \theta[2\pi]$.

Exercice résolu 1

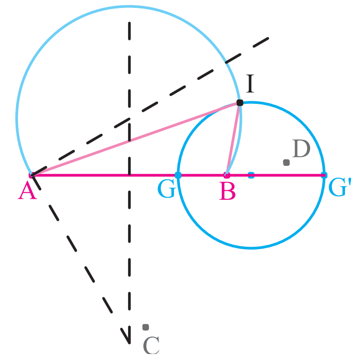
Soit A, B, C et D des points distincts tels que $BD = \frac{1}{3}AC$ et $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Construire le centre I de la similitude directe S qui transforme A en B et C en D.

Solution

Le centre I de S vérifie $IA = 3IB$ et $(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Soit G et G' les barycentres respectifs de (A, 1), (B, 3) et (A, 1), (B, –3).
Le point I appartient à l'intersection du cercle de diamètre $[G\quad]$ et de l'arc de cercle ensemble des points M du plan tels que $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.



Activité 3

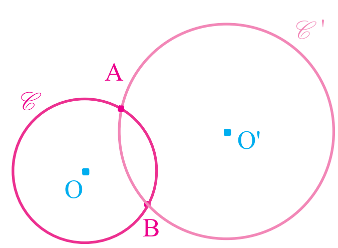
Soit A et B deux points distincts du plan.
Soit f une similitude directe qui ne fixe aucun des points A et B.
On suppose que les images respectives A' et B' de A et B par f sont telles que les droites (AA') et (BB') sont strictement parallèles.

1. Montrer que si deux points C et D de la droite (AB) vérifient $CA = DA$ et $CB = DB$ alors $C = D$.
2. Montrer que si les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, alors le rapport de f vaut 1.
3. On suppose que f est de rapport $k \neq 1$ et on note I l'intersection des droites (AB) et $(A'B')$.

a. Montrer que l'image I' de I par f appartient à la droite $(A'B')$.
b. Montrer que $I'A' = IA'$ et $I'B' = IB'$.
c. En déduire le centre de f.

Exercice résolu 2

Dans la figure ci-contre, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont deux cercles de centres respectifs O et O' et se coupent en A et B.



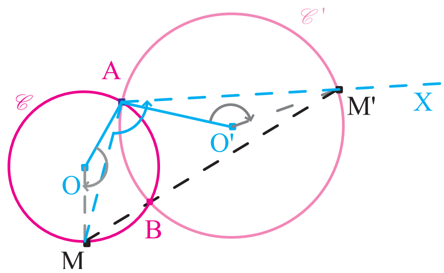
1. a. Montrer qu'il existe une unique similitude directe f de centre A, qui transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$.
   b. Préciser le rapport et l'angle de f.
2. Soit M un point de $\mathscr{C}$.
   a. Construire son image M' par f.
   b. Comparer $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'M'}})$.
   c. En déduire que les points M, B et M' sont alignés.

Solution

1. a. On sait qu'il existe une unique similitude directe qui envoie A sur A et O sur O'.
   Cette similitude transforme nécessairement $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$.

   b. Il s'agit de la similitude de centre A, de rapport $\dfrac{OA'}{OA}$ et d'angle $\widehat{(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AO'})}$.

2. a. Le point M' appartient au cercle $\mathscr{C}'$ et vérifie
   $\widehat{(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AO'})}\ [2\pi]$.
   Le point M' appartient donc à l'intersection du cercle $\mathscr{C}'$ avec la demi-droite [AX) telle que
   $\widehat{(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AX})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AO'})}\ [2\pi]$.



   b. On sait qu'une similitude directe conserve les mesures des angles orientés.
   On en déduit que $\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{O'A},\overrightarrow{O'M'})}\ [2\pi]$.

   c. Les angles au centre $\widehat{(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{O'M'},\overrightarrow{O'A'})}$ vérifient les égalités
   $\widehat{(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA})} = 2\widehat{(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA})} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ et $\widehat{(\overrightarrow{O'M'},\overrightarrow{O'A})} = 2\widehat{(\overrightarrow{BM'},\overrightarrow{BA})} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
   De plus, la relation de Chasles nous permet d'écrire que
   $\widehat{(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'})} = \widehat{(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA})} + \widehat{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM'})} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
   Il en résulte que $\widehat{(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'})} = \dfrac{1}{2}\widehat{(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA})} + \dfrac{1}{2}\widehat{(\overrightarrow{O'A},\overrightarrow{O'M'})} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
   La relation $\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{O'A},\overrightarrow{O'M'})}\ [2\pi]$ implique alors que
   $\widehat{(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'})} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Ce qui prouve que les points M, B et M' sont alignés.

IV. 3 Forme réduite d'une similitude directe

Activité 1

Soit f une similitude directe de centre I, de rapport k et d'angle non nul θ et h l'homothétie de centre I et de rapport k et r la rotation de centre I et d'angle θ.

1. Donner les éléments caractéristiques des similitudes f, $h \circ r$ et $r \circ h$.
2. En déduire que $f = h \circ r = r \circ h$.

Théorème

Toute similitude directe de centre I, de rapport $k \neq 1$ et d'angle θ se décompose sous la forme $f = h \circ r = r \circ h$ où h est l'homothétie de centre I et de rapport k et r est la rotation de centre I et d'angle θ. Cette décomposition s'appelle forme réduite de f.

Activité 2

Soit I un point du plan.
Donner la forme réduite de la similitudes $h \circ r$ dans chacun des cas suivants.

1. h est l'homothétie de centre I et de rapport $-\frac{1}{2}$ et r est lidentité.
2. h est l'homothétie de centre I et de rapport $-\frac{1}{2}$ et r est la rotation de centre I et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
3. h est l'homothétie de centre I et de rapport $-\frac{1}{2}$ et r est la symétrie centrale de centre I .

Activité 3

Soit AECD un carré de centre B. On désigne par h lhomothétie de centr e A et de rapport 2 et par r la rotation de centre B, qui envoie C sur D. Donner les éléments caractéristiques des similitudes $h \circ r$ et $r \circ h$.

IV. 4 Similitudes directes et nombres complexes

Activité 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit h l'homothétie de centre $A(0, 1)$ et de rapport 2, r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Soit M un point d'affixe z, M' son image par r et M'' limage de M' par h.
On désigne par z' et z'' les affixes respectives de M' et M''.
Exprimer z' en fonction de z, puis z'' en fonction de z.

Théorème

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.
L'application f est une similitude directe de centre I, de rapport $k \neq 1$ et dangle θ, si et seulement si, il existe deux nombres complexes a et b tels que $z' = az + b$, avec $a = ke^{i\theta}$ et $z_I = \frac{b}{1-a}$ est l'affixe de I.

Démonstration

Soit f une application et M un point d'image M' par f.
On désigne par z et z' les affixes respectives des points M et M'.
L'application f est une similitude directe de centre I, de rapport $k \neq 1$ et dangle θ ,
si et seulement si, f fixe I, $IM' = k\ IM$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}}\right) \equiv \theta\ [2\pi]$ pour tout point M distinct de I.
On en déduit que f est une similitude directe de centre I, de rapport $k \neq 1$ et d'angle θ, si et seulement si, $|z' - z_I| = k|z - z_I|$ et $\arg\left(\frac{z' - z_I}{z - z_I}\right) \equiv \theta[2\pi]$, pour tout $z \neq z_I$.
Ce qui équivaut à, $z' - z_I = ke^{i\theta}(z - z_I)$, $z \neq z_I$.
Le théorème en découle sachant que la relation précédente est vraie pour $M = I$.

Activité 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.

Donner dans chacun des cas suivants, la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.

a. $z' = -2iz + 3$.

b. $z' = 4z + 1 - i$

c. $z' = e^{i\frac{\theta}{6}} z + 1$.

Activité 3

Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A vérifiant $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $AB = AC = 1$.

On désigne par D le milieu de $[BC]$ et on munit le plan du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Donner l'écriture complexe de la similitude directe de centre A qui envoie C sur D.

V. Similitudes indirectes

Rappelons qu'une similitude indirecte est la composée d'une homothétie et d'un antidéplacement.

Théorème et définition

Une similitude indirecte de rapport différent de 1 admet un unique point fixe, appelé centre de la similitude.

Démonstration

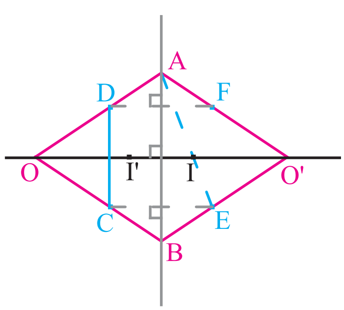
Soit f une similitude indirecte de rapport $k \neq 1$. La similitude directe $f \circ f$ est de rapport $k^2 \neq 1$ et admet un unique point fixe que nous noterons I.

Posons $f(I) = J$. Il en résulte que $I = (f \circ f)(I) = f(f(I)) = f(J)$.

On en déduit alors que $IJ = k\,IJ$ puis que $I = J$ car $k \neq 1$.

L'unicité résulte du fait que f fixe I, si et seulement si, I est le centre de $f \circ f$.

Activité 1



Dans la figure ci-contre, $OBO'A$ est un losange et les droites (CD) et (AB) sont parallèles.

On note h l'homothétie de centre O qui envoie C sur B.

On désigne par S la symétrie orthogonale d'axe (AB) et on pose $f = h \circ S$.

1. Soit E et F les symétriques respectifs de C et D par rapport à la droite (AB).
   Déterminer les images par f des points O', E et F.
2. Soit I le point d'intersection de $[AE]$ et (OO') et I' son symétrique par rapport à la droite (AB). Montrer que I' appartient à $[AC]$ et en déduire que I est le centre de f.

V. 1 Forme réduite d'une similitude indirecte

Activité 1

Soit f une similitude indirecte de centre I et de rapport $k \neq 1$. On désigne par h lhomothétie de centre I et de rapport k.

1. Montrer que $h^{-1} \circ f$ est une symétrie orthogonale dàx e une droite D passant par I.
2. Soit M un point distinct de I et M' son image par f.
   Montrer que M appartient à D, si et seulement si, $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$.
3. Montrer que $h \circ S_D = S_D \circ h$.

Théorème

Soit f une similitude indirecte de centre I et de rapport $k \neq 1$ et h l' homothétie de centre I et de rapport k. Il existe une droite D telle que f se décompose de manière unique sous la forme $f = h \circ S_D = S_D \circ h$, où S_D est la symétrie orthogonale d'axe D.

Dans ce cas, la droite D est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$, où $M' = f(M)$.
Cette décomposition est appelée forme réduite de f.
La droite D est appelée axe de la similitude indirecte f.

Conséquences

Une similitude indirecte de rapport différent de 1, est parfaitement déterminée par son rapport, son centre et son axe, qui sont appelés éléments caractéristiques de cette similitude.
L'axe D d'une similitude indirecte de centre I et la perpendiculaire à D passant par I sont globalement invariants par f.
Si f est une similitude indirecte de centre I et de rapport k alors $f \circ f$ est une homothétie de centre I et de rapport k^2.

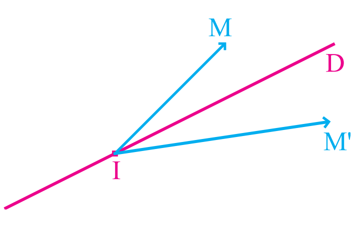
Activité 2

Soit ABCD un carré direct de centre O. On note I le milieu de [AB]
1. Soit f la similitude directe telle que $f(A) = B$ et $f(D) = I$.
Déterminer le rapport et l'angle de f et construire son centre Ω.
2. Soit $g = f \circ S_{(\Omega C)}$.
Montrer que g est une similitude indirecte dont on précisera les éléments caractéristiques.

Activité 3

Soit f une similitude indirecte de centre I, de rapport $k \neq 1$, d'axe D et $\vec{u}$ un vecteur directeur de D.

Montrer que $\widehat{(\vec{u},\overrightarrow{IM'})} \equiv -\widehat{(\vec{u},\overrightarrow{IM})}\ [2\pi]$, pour tout point M distinct de I, d'image M' par f.



Propriété

Soit f une similitude indirecte de centre I, de rapport différent de 1 et d'axe D.

Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D, alors $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{IM'}}\right) \equiv -\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{IM}}\right)\ [2\pi]$, pour tout M distinct de I , d'image M'. La droite D porte donc la bissectrice intérieure de $\widehat{MIM'}$.

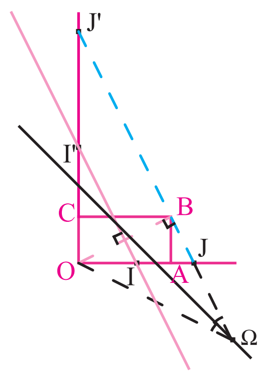
Exercice résolu

On considère un rectangle OABC tel que OA = 2 OC et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

La médiatrice Δ du segment [OB] coupe la droite (OA) en I et la droite (OC) en I'. Soit J et J' les symétriques respectifs de O par rapport à I et I'.

1. Montrer que les triangles OBJ et OBJ' sont rectangles en B.
2. En déduire que les points B, J et J' sont alignés.
3. Soit S la similitude indirecte qui transforme J en O et O en J'.
   a. Donner le rapport de S et en déduire que S admet un unique point fixe Ω.
   b. Caractériser $S \circ S$ et en déduire que Ω appartient à (JJ').
   c. Construire Ω et l'axe de S.

Solution



1. D'après les données le point I est le milieu de [OJ].
   On déduit alors des égalités IO = IB = IJ que le triangle OBJ est rectangle en B.
   On prouve de la même manière que le triangle OBJ' est rectangle en B.
2. Les droites (BJ) et (BJ') sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (OB). Par suite les points B, J et J' sont alignés.
3. a. Le rapport de S est égal à $\frac{OJ'}{OJ}$. De plus, $\frac{OJ'}{OJ} = \tan \widehat{J'JO} = \frac{OA}{AB}$.
   On en déduit que S est de rapport 2 et par suite, S admet un unique point fixe Ω.
   b. On déduit de la forme réduite de S que $S \circ S$ est lhomothétie de centre Ω et de rapport 4.
   De plus, $S \circ S(J) = S(O) = J'$. Il en résulte que Ω est le point de (JJ') tel que $\overrightarrow{\Omega J'} = 4\,\overrightarrow{\Omega J}$.
   c. L'axe de S est la droite portant la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{O\Omega J}$

V. 2 Similitude indirecte et nombres complexes

Théorème

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'. L'application f est une similitude indirecte de centre I et de rapport $k \neq 1$, si et seulement si, il existe deux nombres complexes a et b tels que $z' = a\bar{z} + b$.

Dans ce cas $k = |a|$ et $z_I = \dfrac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2}$ est l'affixe du point I.

Démonstration

On suppose que le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ et on note S la symétrie orthogonale d'axe $\left(O,\ \vec{i}\right)$.

Alors $S\circ f$ est une similitude directe qui à tout point M d'affixe z associe le point M'' d'affixe $z''=a_1z+b_1$.

On en déduit que $S\circ S\circ f=f$ associe à tout M d'affixe z le point M', symétrique de M'' par rapport à $\left(O,\ \vec{i}\right)$, ayant pour affixe $z'=\overline{z''}=\overline{a_1z+b_1}=\overline{a_1}\ \overline{z}+\overline{b_1}$.

Le théorème en découle en posant $a=\overline{a_1}$ et $b=\overline{b_1}$.

De l'égalité $f=S\circ S\circ f$, on déduit que le rapport k de f est le même que celui de la similitude directe $S\circ f$. C'est-à-dire $k=|a|$

Le centre I de f est défini par $z_I=a\overline{z_I}+b$, ou encore $\overline{z_I}=\overline{a}\,z_I+\overline{b}$.

Le résultat en découle.

Activité

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit f la similitude indirecte qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=-2i\overline{z}+6$ où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.

1. Montrer que f est une similitude indirecte dont on déterminera le rapport et le centre I.
2. Déterminer l'ensemble des M d'affixe z tels que $\overrightarrow{IM'}=2\overrightarrow{IM}$.
   En déduire une équation de l'axe de f.

QCM

Cocher la réponse exacte.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Soit $M(z)$ et $M'(z')$.

1. Soit I un point quelconque. L'homothétie $h(I, -4)$ est une

☐ similitude indirecte de rapport 4. ☐ similitude directe de rapport 4 et d'angle nul. ☐ similitude directe de rapport 4 et d'angle π

2. Soit I et J deux points distincts. L'application $h(I, 2) \circ h\left(J, \frac{1}{2}\right)$ est

☐ une translation. ☐ une homothétie. ☐ l'identité.

3. L'image par une similitude de rapport $\frac{1}{2}$, d'un triangle d'aire $\mathcal{A}$ est un triangle dont l'aire est égale à

☐ $\mathcal{A}$. ☐ $4\mathcal{A}$. ☐ $\frac{\mathcal{A}}{4}$.

4. Soit Ω un point quelconque. L'application $r\left(\Omega, \frac{\pi}{6}\right) \circ h(\Omega, -2)$ est une similitude directe dont la forme réduite est

☐ $r\left(\Omega, \frac{\pi}{6}\right) \circ h(\Omega, 2)$. ☐ $r\left(\Omega, -\frac{\pi}{6}\right) \circ h(\Omega, 2)$. ☐ $r\left(\Omega, -\frac{5\pi}{6}\right) \circ h(\Omega, 2)$.

5. Soit f la similitude indirecte de centre I, de rapport 2 et d'axe Δ. L'application $f \circ f$ est

☐ La similitude indirecte de centre I, de rapport 4 et d'axe Δ ☐ l'homothétie $h(I, 4)$. ☐ La similitude directe de centre I, de rapport 4 et d'angle π

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Une similitude directe qui fixe deux points distincts est l'identité.
2. La composée d'une similitude directe de rapport 2 et d'un antidéplacement est une similitude indirecte de rapport 2.
3. La composée d'une similitude directe de rapport 4 et d'une similitude indirecte de rapport $\frac{1}{4}$ est un déplacement.
4. La réciproque d'une similitude directe de centre I, de rapport 3 et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est la similitude directe de centre I, de rapport 3 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
5. Soit A, B, C et D des points tels que $A \neq C$ et $B \neq D$.
   Soit f la similitude indirecte qui envoie A sur B et C sur D. L'application $f \circ S_{(AC)}$ est une similitude directe de même rapport que f qui envoie A sur B et C sur D.

Dans tous les exercices le plan est orienté dans le sens direct.

1 Soit ABC un triangle équilatéral de centre G tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Déterminer, dans chacun des cas, le rapport et l'angle de la similitude directe f.

a. f fixe B et envoie A sur C.
b. f fixe B et envoie C sur G.
c. f fixe G et envoie B sur C.

2 1. Soit S une similitude directe. Donner la nature de $S \circ f \circ S^{-1}$ dans chacun des cas ci-dessous.

a. f est une translation de vecteur non nul.
b. f est une rotation d'angle non nul.
c. f est une homothétie de rapport différent de 1.
d. f est une symétrie orthogonale d'axe passant par le centre de S.

2. Reprendre la question précédente en supposant que S est une similitude indirecte.

3 Soit ABCD un carré de côté 1, de centre O et tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On note I le milieu de [AO].

1. a. Montrer qu'il existe une unique similitude directe S qui envoie A sur O et B sur I.
b. Déterminer le rapport et l'angle de S.
2. a. Donner l'écriture complexe de S dans le repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
b. Déterminer le centre de S.

4 Soit ABC un triangle non isocèle , rectangle en A et tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On désigne par H le projeté orthogonal de A sur (BC) et on note f la similitude directe qui envoie B sur A et A sur C.

1. Déterminer les éléments caractéristiques de f.
2. Soit M un point variable de [AB]. La perpendiculaire à (HM) menée de H coupe [AC] en N. Montrer que le cercle de diamètre [MN] passe par un point fixe.

5 Soit ABCD un carré de centre O et tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Soit S la similitude directe de centre D qui envoie O sur C.

1. Déterminer le rapport et l'angle de S.
2. Déterminer l'image du point A par S.
3. Construire l'image du point C par S.

6 Soit un triangle direct ABC et M un point du plan.

Soit S la similitude directe de centre A qui envoie B sur C.

Construire l'image de M dans chacun des cas ci-dessous.

1. Le point M n'appartient pas à (AB).
2. Le point M appartient à la droite (AB) privée des points A et B.

7 Soit ABC un triangle isocèle et rectangle en A tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par A' le symétrique de A par rapport à C.

1. a. Préciser le rapport et l'angle de la similitude directe S qui envoie A' sur C et C sur B.
b. Déterminer l'image par S de la droite (AC).
2. a. Soit I le centre de S. Montrer que le triangle ICB est rectangle isocèle.
b. Construire I.
c. Construire l'image du cercle de centre C et de rayon CA.

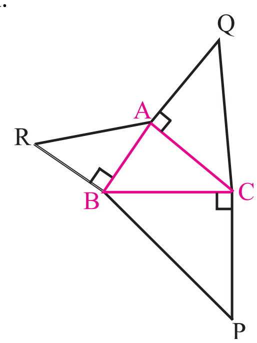
8 Soit ABCD un carré direct de centre O.

1. a. Préciser l'angle et le rapport de la similitude directe S qui envoie A sur O et B sur D.
b. Construire le centre de f.
c. Déterminer $S(D)$.
2. Existe-t-il une similitude directe qui envoie A sur O, B sur D et D sur C ?

9 Soit A et B deux points. On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport -2 et par r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On pose $S = r \circ h$.

1. Montrer que S est une similitude directe et déterminer son rapport et son angle.
2. Soit O le centre de la similitude S et $A' = r(A)$.
a. Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $OA' = 2OA$.
b. Construire le point O.
3. Soit $B' = h(B)$.
Construire le centre de la similitude $S' = h \circ r$ et préciser son angle et son rapport.

10 Dans la figure ci-dessous le triangle ABR est isocèle et rectangle en B, le triangle BCP est isocèle et rectangle en C et le triangle CAQ est isocèle et rectangle en A.



On note respectivement par S_P, S_Q et S_R les similitudes directes de centres P, Q et R.
On suppose de plus que les trois similitudes sont de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Soit $f = S_R \circ S_P \circ S_Q$.

1. Déterminer $f(A)$.
2. Préciser f et donner ses éléments caractéristiques.

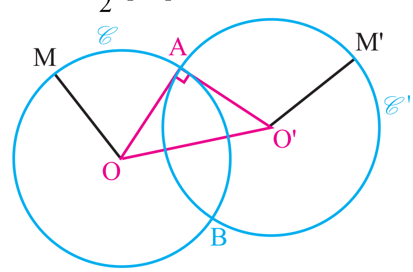
11 Soit O et B deux points distincts et $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [OB]
Soit A un point du segment [OB] distinct de O et B et I le milieu de [AB]
La médiatrice de [AB] coupe le cercle $\mathscr{C}$ en M et M′ tels que $(\widehat{\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
Soit N le projeté orthogonal de A sur (OM).
1. a. Quelle est la nature du quadrilatère AMBM′ ?
b. En déduire que la droite (AM′) est orthogonale à (OM) et que les points N, A et M′ sont alignés.
2. On désigne par S la similitude de centre N qui envoie M sur A.
a. Déterminer l'angle de S.
b. Déterminer les images par S des droites (MI) et (NA).
c. En déduire l'image par S de M′.
d. Déterminer l'image I′ de I par S.
e. Montrer que la droite (NI) est tangente en N au cercle de diamètre [OA]

12 Soit un triangle AHH′ isocèle en H et tel que $(\widehat{\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HH'}}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et M un point de la droite (HH′) et M′ le point tel que le triangle AMM′ soit isocèle en M avec $(\widehat{\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{MA}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

1. Préciser la similitude directe de centre A, qui envoie M sur M′.
2. Quel est l'ensemble E des points M′ lorsque M décrit (HH′) ?
3. Soit J le milieu de [MM′]. Calculer $\frac{AJ}{AM}$ et montrer que $(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AJ}})$ ne dépend pas du point M.
4. Quel est l'ensemble F des points J lorsque M décrit (HH′) ? Construire F.

13 Soit ABC un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A.
1. Montrer que le triangle ABH est l'image du triangle CAH par une similitude directe que l'on déterminera.
2. Montrer que le triangle HAC est l'image du triangle ABC par la composée d'une similitude directe et d'une symétrie orthogonale que l'on précisera.
3. Par quelle transformation peut-on passer du triangle ABC au triangle HBA ?

14 dans la figure ci-dessous AOO′ est un triangle rectangle et isocèle en A, $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O passant par A et $\mathscr{C}'$ est le cercle de centre O′ passant par A, les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ se recoupent en B, M est un point de $\mathscr{C}$ et M′ est le point de $\mathscr{C}'$ tel que $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{O'M'}}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.



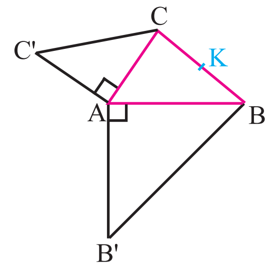
1. Préciser la similitude directe qui envoie O sur O′ et M sur M′.
2. Si M est distinct de B et de $S_O(B)$, la droite (MB) recoupe $\mathscr{C}'$ en un point N′ et la droite (BM′) recoupe $\mathscr{C}$ en N.
Montrer que BN = BN′ et que les droites (BN) et (BN′) sont perpendiculaires.
3. Soit les carrés MBM′P et NBN′Q.
a. Quel est l'ensemble des points P et l'ensemble des points Q lorsque M varie ?
b. Montrer que la droite (PQ) passe par un point fixe.

15 Soit la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = 2iz + 3 - i$.
1. Soit B le point d'affixe i et C le point d'affixe -1. On désigne par B' et C' les images respectives de B et C par f. Déterminer $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B'C'}}\right)$ et exprimer $B'C'$ en fonction de BC.
2. Identifier f et donner ses éléments caractéristiques.

16 Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit les points $A(3, -1)$ et $B(0, 2)$.
On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport $-\sqrt{2}$, r la rotation de centre B et d'angle $\frac{3\pi}{4}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{BO}$.
On pose $f = t \circ r \circ h$.
1. a. Caractériser $t \circ r$.
b. En déduire la nature de f et ses éléments caractéristiques.
c. Donner l'écriture complexe de f.
2. Déterminer et construire le point K tel que $f(K) = O$.

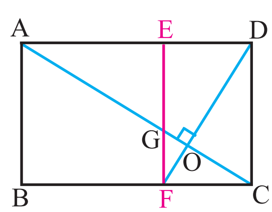
17 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = 2 + i$, $z_B = 1 + 2i$, $z_C = 6 + 3i$ et $z_D = -1 + 6i$.
1. Montrer qu'il existe une rotation qui transforme A en B et C en D.
Préciser ses éléments caractéristiques.
3. On désigne par J le point d'affixe $3 + 5i$.
Montrer que la rotation de centre J et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ transforme A en D et C en B.
4. On désigne par I le point d'affixe $1 + i$, M et N les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BD]$.
Déterminer la nature du quadrilatère IMJN.
5. On considère les points P et Q tels que les quadrilatères IAPB et ICQD soient des carrées.
a. Calculer z_P et z_Q, les affixes respectives des points P et Q.
b. Déterminer $\frac{IP}{IA}$ et $\frac{IQ}{IC}$ ainsi qu'une mesure des angles $\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IP}\right)$ et $\left(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IQ}\right)$.
En déduire les éléments caractéristiques de la similitude directe g telle que $g(A) = P$ et $g(C) = Q$.
c. En déduire que J est l'image de M par g et que J est le milieu de [PQ].

18 Dans la figure ci-dessous ABC est un triangle quelconque, $AB'B$ et ACC' sont directs, rectangles, isocèles de sommet A et K est le milieu de [BC].



Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct d'origine A. On note a, b et c les affixes des points A, B et C.
1. Exprimer les affixes k, b' et c' des points K, B' et C' en fonction de b et c.
2. Montrer qu'il existe une unique similitude directe f qui envoie A sur B' et K sur C'.
3. a. Donner les éléments caractéristiques de f, son expression complexe ainsi que sa forme réduite.
b. En déduire que les droites (AK) et $(B'C')$ sont perpendiculaires.

19 Un rectangle d'or est un rectangle dont le quotient longueur/largeur est égal à $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
La figure ci-dessous représente un rectangle d'or ABCD et un carré ABFE.



1. Vérifier que $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$. En déduire que EFCD est un rectangle d'or.
2. Soit f la similitude directe qui envoie A sur D et D sur C. Préciser son rapport et son angle.

3. Quelle est l'image de C par f ?
4. En déduire que l'intersection O de (AC) et (DF) est invariant par f.
5. Montrer que les droites (AC) et (DF) sont perpendiculaires et que si G désigne l'intersection de (AC) et (EF) alors $ED = EG$.

20 On considère un rectangle ABCD tel que

$AD = 1$, $AB = 2$ et $(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par L, K et J les milieux respectifs de $[AD]$, $[DC]$ et $[BC]$.

On munit le plan du repère $(D, \overrightarrow{DK}, \overrightarrow{DA})$.

1. Montrer qu'il existe une unique similitude indirecte f qui envoie A sur D et C sur B.
2. a. Déterminer $f(L)$ et $f(J)$.
b. Donner les éléments caractéristiques de f.

21 Soit ABC un triangle équilatéral direct .On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$ et par D le symétrique de A par rapport à C.
1. Soit f l'antidéplacement tel que $f(C) = A$ et $f(A) = B$. Identifier f.
2. Soit g la similitude directe telle que $g(B) = D$ et $g(I) = C$.
Montrer que $g(A) = A$ et déterminer les éléments caractéristiques de g.
3. Soit K le point défini par $\overrightarrow{KA} - 2\overrightarrow{K\,} = \vec{0}$.
a. Donner la nature de $f \circ g$.
b. Déterminer $f \circ g(I)$ et $f \circ g(A)$.
c. vérifier que $\overrightarrow{KB} - 2\overrightarrow{KA}\ \ \vec{0} =$.
En déduire que $f \circ g(K) = K$
d. Déterminer le rapport de $f \circ g$.
e. Montrer que l'axe de la similitude $f \circ g$ est la perpendiculaire en K à la droite (AB).

22 Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère la similitude indirecte f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = (1+i)\bar{z} + i$.
Déterminer le centre et l'axe de f.

23 Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère la similitude indirecte f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -5i\bar{z} + 1 + i$.
1. Déterminer le centre et l'axe de f.
2. Déterminer l'image par f du cercle de centre I d'affixe $3 + i$ et de rayon $\sqrt{5}$.

24 On considère un rectangle OABC tel que

$OA = 2OC$ et $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

La médiatrice D du segment [OB] coupe la droite (OA) en H et la droite (OC) en H' .
Soit J et J' les symétriques respectifs du point O par rapport à H et H' .
1. a. Montrer que les triangles OBJ et OB J' sont rectangles en B.
b. En déduire que les points B, J et J' sont alignés.
2. Soit f la similitude directe qui envoie J sur O et O sur J' .
a. Déterminer l'angle de f.
b. Déterminer $f(B)$ et en déduire le centre et le rapport de f.
3. Soit g la similitude indirecte qui envoie J sur O et O sur J' .
a. Donner le rapport de g.
b. En déduire que g admet un unique point invariant que l'on notera I.
c. Montrer que le point I appartient à (J J').
d. Construire le centre et l'axe de g.

25 On considère un triangle équilatéral ABC tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

On désigne par I le milieu de [AC] et par K le milieu de [AB]
1.a. Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui envoie B sur A et A sur C.
b. Montrer que f est une symétrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur.
c. Soit D le symétrique de B par rapport à I. Montrer que $f(C) = D$.
d. Soit $D' = f(D)$. Montrer que D' est le symétrique de B par rapport à C.
2. Soit S la similitude directe qui envoie A sur B et I sur D.
a. Déterminer le rapport et l'angle de S.

b. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [AB] et $\mathscr{C}'$ le cercle de diamètre [ID]. Montrer que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont sécants en I et en un autre point Ω.
Montrer que Ω est le centre de S.
3. Soit $g = f \circ S$. Déterminer la nature de g et ses éléments caractéristiques.

26 On considère un triangle isocèle ABC direct de sommet principal A. On pose
$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv 2\alpha\ [2\pi]$, où α est un réel de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.
On désigne par O le milieu de [BC] et D le symétrique de A par rapport à O.
Soit I et J les projetés orthogonaux respectifs de O et D sur (AC).
1. Soit f la similitude directe qui envoie O sur I et D sur J.
Déterminer à l'aide de α, l'angle et le rapport de f.
Montrer que $f(A) = A$.
2. On désigne par E le symétrique de O par rapport à I.
Montrer que $f(B) = O$ et $f(C) = E$.
Déterminer $\frac{OE}{BC}$.
3. Soit g la similitude indirecte qui envoie B sur O et C sur E.
a. Déterminer le rapport de g et l'image de O par g.
b. Montrer que $g = S_{(OE)} \circ f$.
4. Soit Ω le centre de g.
a. Montrer que $g \circ g(D) = J$ et en déduire que Ω appartient à la droite (DJ).
b. Montrer que Ω appartient à la droite (BI).
c. Construire Ω.

27 Soit ABC un triangle rectangle en C tel que
$\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.
La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe $[AC]$ en O.
On désigne par H le projeté orthogonal de O sur (AB) et par H' le milieu de [OA].
1. a. Faire une figure.
b. Montrer que le triangle OAB est isocèle et que H est le milieu de [AB].
2. Soit f la similitude directe telle que $f(B) = O$ et $f(H) = H'$.
a. Montrer que le rapport de f est $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et que $\frac{\pi}{6}$ est une mesure de son angle.
b. Montrer que H' est le milieu du segment $[Of(A)]$.
En déduire que A est le centre de f.
3. Les cercles (Γ) et (Γ') de diamètres respectifs [AB] et [AO] se recoupent en D.
a. Montrer que les points B, O et D sont alignés.
b. Montrer que les triangles BCH et ODH' sont équilatéraux et que $f(C) = D$.
c. Montrer que le quadrilatère ADCH est un losange.
4. Soit $g = S_{(DH)} \circ f$, où $S_{(DH)}$ est la symétrie axiale d'axe (DH).
a. Déterminer g(A) et g(C).
b. Montrer que g est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.
c. Soit Ω le centre de g.
Montrer que $\overrightarrow{\Omega D} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega D}$.
Construire alors le centre Ω et l'axe Δ de g.