Chapitre 3

Déplacement
Antidéplacement

Euclide utilisait les déplacements (312 – 215 avant J.-C), pour démontrer entre autre, les cas d'égalité des triangles. Les cartographes du XVIème siècle, sachant qu'il est impossible de projeter la sphère sur un plan tout en conservant les longueurs, cherchaient des applications conservant les angles.
Euler (1707-1784) avait étudié les déplacements et avait démontré en substance, qu'un déplacement plan est une rotation ; une translation ou une translation suivie d'une symétrie.
Personne pourtant n'explicitait la notion de transformation. Ce n'est que chez Poncelet (1788-1867), que la transformation apparaît comme une correspondance entre figures de deux plans.
Un peu plus tard, Mobius (1790-1868) crée la notion d'affinités géométriques pour décrire différents types de transformations : selon que figures initiales et transformées sont égales et semblables (dans le premier cas la transformation est un déplacement).

(A. Dahan-Dalmedico et al,
Histoire des mathématiques -routes et dédales, 1982).
(J. Dhombres et al, Mathématiques au fil des âges, 1987).

Chapitre 3

Déplacements Antidéplacements

Dans tout le chapitre le plan est orienté dans le sens direct.

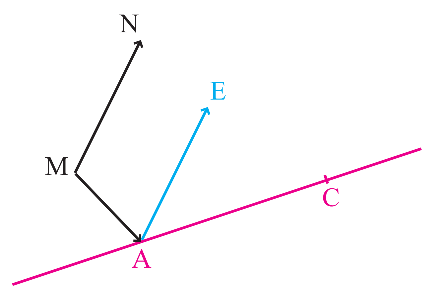
I. Définitions et propriétés

Activité 1

Soit A et C deux points distincts et S la symétrie orthogonale d'axe (AC).

Soit M et N deux points distincts du plan et E le point tel que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AE}$.

Construire leurs images M', N' et E' par S.



1. Comparer $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE'}}\right)$.

2. Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}}\right) \equiv -\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{M'N'}}\right)\ [2\pi]$.

3. Soit P et Q deux points distincts d'images respectives P'et Q' par S.

Comparer $\left(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{P'Q'}}\right)$.

Théorème

Toute symétrie orthogonale change les mesures des angles orientés en leurs opposées.
(On dit qu'une symétrie orthogonale change l'orientation).

Activité 2

Soit g la composée de deux symétries orthogonales. Soit M, N, P et Q des points tels que $MN \neq 0$ et $PQ \neq 0$, d'images respectives M', N', P' et Q' par g.

Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{P'Q'}}\right)\ [2\pi]$.

Théorème

La composée de deux symétries orthogonales conserve les mesures des angles orientés.
(On dit que la composée de deux symétries orthogonales conserve l'orientation).

Activité 3

Soit f la composée de n symétries orthogonales.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur n pour que f change l'orientation.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur n pour que f conserve l'orientation.

Définition

On appelle déplacement toute isométrie qui conserve les mesures des angles orientés.
On appelle antidéplacement toute isométrie qui change les mesures des angles orientés en leurs opposées.

Le théorème ci-dessous découle de la décomposition d'une isométrie en composée de symétries orthogonales.

Théorème

Une isométrie est un déplacement, si et seulement si, elle est la composée de deux symétries orthogonales.
Une isométrie est un antidéplacement, si et seulement si, elle est une symétrie orthogonale ou la composée de trois symétries orthogonales.

Le tableau ci-dessous donne la classification des isométries en déplacements ou antidéplacements.

Identité	Déplacement
Rotation	Déplacement
Translation	Déplacement
Symétrie orthogonale	Antidéplacement
Symétrie glissante	Antidéplacement

Le théorème ci-dessous découle de la définition d'un déplacement et d'un antidéplacement.

Théorème

- La composée de deux déplacements est un déplacement.
- La composée de deux antidéplacements est un déplacement.
- La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement.
- La réciproque d'un déplacement est un déplacement.
- La réciproque d'un antidéplacement est un antidéplacement.

II. Détermination d'un déplacement ou d'un antidéplacement

Activité 1

Soit A et B deux points distincts.

1. Soit f et g deux déplacements qui coïncident sur A et B.

   a. Déterminer $\left(f^{-1}\circ g\right)(A)$ et $\left(f^{-1}\circ g\right)(B)$.

   b. Identifier $f^{-1}\circ g$ et en déduire que $f = g$.

2. Soit f_1 et g_1 deux antidéplacements qui coïncident sur A et B.

   Identifier $f_1^{-1}\circ g_1$ et en déduire que $f_1 = g_1$.

Théorème

Deux déplacements qui coïncident sur deux points distincts sont égaux.
Deux antidéplacements qui coïncident sur deux points distincts sont égaux.

Activité 2

Soit A, B, C et D des points du plan tels que $AB = CD$ et $AB \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe une symétrie orthogonale S_1 qui envoie A sur C
2. On pose $M = S_1(B)$. Montrer qu'il existe une symétrie orthogonale S_2 qui fixe C et qui envoie M sur D.
3. Montrer que $S_2 \circ S_1$ est un déplacement qui envoie A sur C et B sur D.
4. Combien existe-t-il de déplacements qui envoient A sur C et B sur D ?

Activité 3

Soit A, B, C et D des points du plan tels que $AB = CD$ et $AB \neq 0$.
On note t la translation qui envoie A sur C et on pose $M = t(B)$.

1. Montrer qu'il existe une symétrie orthogonale S qui fixe C et qui envoie M sur D.
2. Montrer que $f = S \circ t$ est un antidéplacement qui envoie A sur C et B sur D.
3. Combien existe-t-il d'antidéplacements qui envoient A sur C et B sur D ?

Le théorème ci-dessous résulte des deux activités précédentes.

Théorème

Soit A, B, C et D des points du plan tels que $AB = CD$ et $AB \neq 0$.
Il existe un unique déplacement qui envoie A sur C et B sur D.
Il existe un unique antidéplacement qui envoie A sur C et B sur D.

III. Déplacements

III.1 Angle d'un déplacement

Activité 1

Soit A, B, C et D des points du plan tels que $AB \neq 0$ et $CD \neq 0$.
Soit f un déplacements et A', B', C' et D' les images respectives des points A, B, C et D. Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'}}\right) [2\pi]$.

Théorème et définition

Soit f un déplacement et A, B, C et D des points du plan tels que $AB \neq 0$ et $CD \neq 0$. Si A', B', C' et D' sont les images respectives par f des points A, B, C et D, alors

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'}}\right) [2\pi].$$

En désignant par θ une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)$, on dit que f est un déplacement d'angle θ.

Corollaire 1

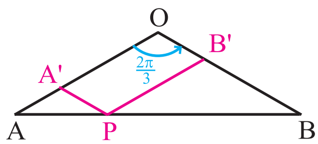
Soit f un déplacement d'angle θ.
Si $\theta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ alors f est une translation.
Si $\theta \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ alors f est une rotation d'angle θ.

Corollaire 2

- Si f est un déplacement d'angle θ et g est un déplacement d'angle θ', alors $f \circ g$ est un déplacement d'angle $\theta + \theta'$.
- Si f est un déplacement d'angle θ, alors f^{-1} est un déplacement d'angle $-\theta$.

Activité 2

Soit OAB un triangle isocèle de sommet principal O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ et soit P un point de $[AB]$ distinct de A et B. La parallèle menée de P à la droite (OB) coupe (OA) en A'. La parallèle menée de P à la droite (OA) coupe (OB) en B'.



1. a. Montrer que $OA' = BB'$.
   b. En déduire qu'il existe une unique rotation r qui transforme O en B et A' en B'.
2. Montrer que $r(A) = O$ et déterminer les éléments caractéristiques de r.
3. Soit Ω le centre de r. Montrer que les points O, A', B' et Ω appartiennent à un même cercle.

Activité 3

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

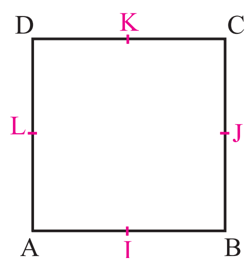
et O le milieu du segment $[BC]$.

1. Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(A) = O$ et $f(C) = B$.
2. Montrer que f est une rotation dont on précisera l'angle. Construire son centre.

Activité 4

Dans la figure ci-contre ABCD est un carré de sens direct et I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.
Justifier, dans chaque cas l'existence du déplacement f et l'identifier.

1. $f(J) = I$ et $f(K) = L$.
2. $f(I) = K$ et $f(J) = L$.
3. $f(B) = K$ et $f(L) = A$.



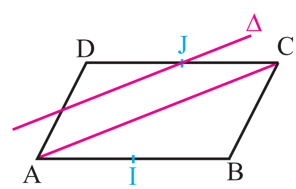
III. 2 Composition de déplacements

• Composition de deux translations

Activité 1

Dans la figure ci-contre ABCD est un parallélogramme, I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$ et Δ désigne la droite passant par J et parallèle à (AC).

Montrer que la droite Δ est globalement invariante par $t_{\overrightarrow{AI}} \circ t_{\overrightarrow{AJ}}$.



Théorème (Rappel)

La composée de deux translations $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ est la translation

$t_{\vec{u}+\vec{v}} = t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{v}+\vec{u}}$.

• Composition de deux rotations

Activité 2

Soit ABCD un carré direct. On désigne par r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

et par r' la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que $r = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$.
2. Déterminer la droite Δ telle que $r' = S_{(AB)} \circ S_{\Delta}$.
3. Identifier $r \circ r'$.

Activité 3

Soit ABC un triangle équilatéral direct et de centre O. On désigne par r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et par r' la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1. Déterminer $(r \circ r')(A)$.
2. Identifier $r \circ r'$.

Activité 4

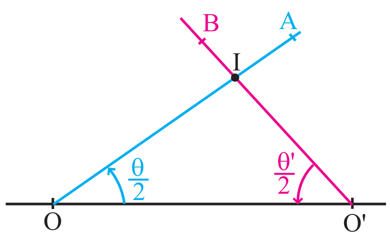
Soit r et r' deux rotations d'angles respectifs θ et θ' et de centres respectifs distincts O et O'.

1. On considère deux points A et B tels que $2\widehat{(\overrightarrow{OO'},\overrightarrow{OA})} \equiv \theta\ [2\pi]$ et $2\widehat{(\overrightarrow{O'B},\overrightarrow{O'O})} \equiv \theta'\ [2\pi]$.

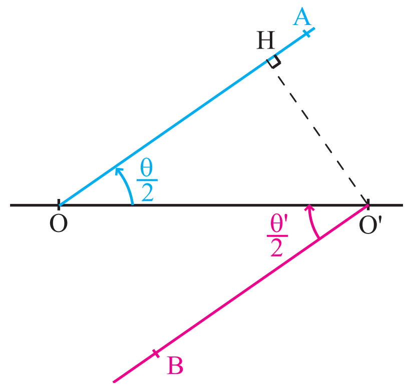
   Montrer que $r = S_{(OA)} \circ S_{(OO')}$ et $r' = S_{(OO')} \circ S_{(O'B)}$.

2. On suppose que $\theta + \theta' \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

   Justifier que (OA) et $(O'B)$ sont sécantes et montrer que $r \circ r'$ est une rotation dont on déterminera le centre.



3. On suppose que $\theta+\theta'=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
   a. Justifier que les droites (OA) et $(O'B)$ sont parallèles.
   b. Montrer que $r\circ r'$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{O'H}$, où H est le projeté orthogonal de O' sur (OA).



Théorème

La composée de deux rotations r et r' d'angles θ et θ' et de centres respectifs O et O' est soit une translation de vecteur non nul, soit une rotation d'angle non nul.
Si $\theta+\theta'\equiv 0\ [2\pi]$, il s'agit d'une translation de vecteur non nul.
Si $\theta+\theta'\neq 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, il s'agit d'une rotation d'angle $\theta+\theta'$.

• Composition d'une rotation et d'une translation

Théorème

La composée d'une translation et d'une rotation d'angle non nul θ est une rotation d'angle θ.

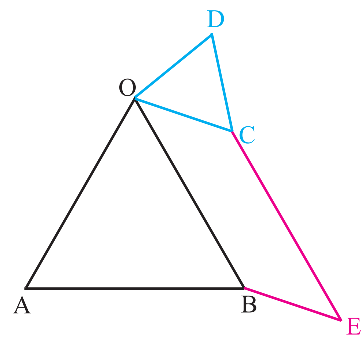
Démonstration

Le théorème découle du fait que la composée d'une translation et d'une rotation d'angle non nul θ est un déplacement d'angle non nul θ.

Activité 5

On considère deux triangles équilatéraux directs OAB et OCD et on désigne par E le quatrième sommet du parallélogramme BOCE.

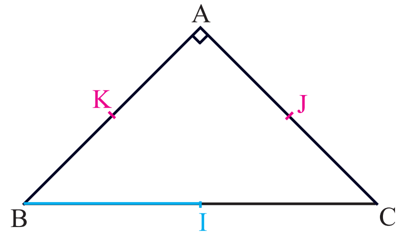
1. Soit $f=r\circ t$, où r désigne la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et t est la translation de vecteur $\overrightarrow{BO}$.
   a. Déterminer $f(B)$.
   b. Déterminer la nature de f et ses éléments caractéristiques.
2. Déterminer $f(E)$ et en déduire la nature du triangle AED.



Activité 6

Dans la figure ci-contre ABC est un triangle rectangle et isocèle tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Soit I le milieu de $[BC]$, J le milieu de $[AC]$ et K le milieu de $[AB]$.



On appelle R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et on désigne par T la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Soit $f = R \circ T$ et $g = T \circ R$.

1. Déterminer $f(K)$, $f(B)$, $g(J)$ et $g(I)$.
2. Identifier f et g.

III. 3 Déplacements et nombres complexes

Théorème

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f une application du plan dans lui- même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'. L'application f est une translation de vecteur $\vec{u}$, si et seulement si, il existe un nombre complexe b tel que $z' = z + b$ où b est l'affixe de $\vec{u}$.

Démonstration

Soit $\vec{u}$ un vecteur d'affixe b, M un point d'affixe z et M' le point d'affixe z' image de M par f.
L'application f est une translation de vecteur $\vec{u}$, si et seulement si, $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.
On en déduit que f est une translation de vecteur $\vec{u}$, si et seulement si, $z' = z + b$.

Théorème

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f une application du plan dans lui- même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'. L'application f est une rotation d'angle non nul θ et de centre I, si et seulement si, il existe deux nombres complexes a et b tels que

$z' = az + b$, avec $a = e^{i\theta}$, $a \neq 1$ et $z_I = \frac{b}{1-a}$ est l'affixe de I.

Démonstration

Soit f une application et M un point d'image M' par f.
On désigne par z et z' les affixes respectives des points M et M'.
L'application f est une rotation de centre I et d'angle non nul θ, si et seulement si, f fixe I et $IM' = IM$ et $(\widehat{\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}}) \equiv \theta\ [2\pi]$ pour tout point M distinct de I.

On en déduit que f est une rotation de centre I et d'angle θ, si et seulement si,

$|z' - z_I| = |z - z_I|$ et $\arg\left(\frac{z' - z_I}{z - z_I}\right) \equiv \theta\ [2\pi]$, pour tout $z \neq z_I$.

Ce qui équivaut à, $z' - z_I = e^{i\theta}(z - z_I)$, $z \neq z_I$.
Le théorème en découle sachant que la relation précédente est vraie pour $M = I$.

Activité 1

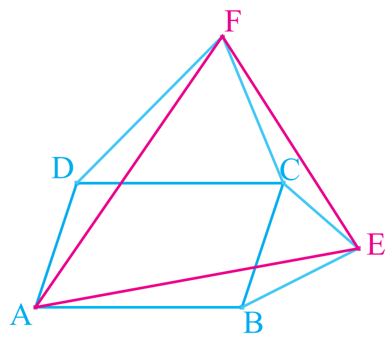
Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Caractériser, dans chaque cas, l'application f du plan dans lui-même.

1. $f : M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = z + 1 + i$.
2. $f : M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = -z + 1$.
3. $f : M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = e^{i\frac{\pi}{4}}z + i$.

Exercice résolu 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(A, \vec{u}, \vec{v}\right)$.



Dans la figure ci- contre ABCD est un parallélogramme et DCF et BEC sont des triangles isocèles de sommets respectifs D et B tels que $\left(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DF}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

Montrer que le triangle AEF est isocèle en A.

Solution

La rotation r' de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ envoie C sur E.

On en déduit que $z_E = e^{-i\frac{\pi}{4}}(z_C - z_B) + z_B\ \ (*)$.

La rotation r de centre D et d'angle $\frac{\pi}{4}$ envoie C sur F.

On en déduit que $z_F = z_D + e^{i\frac{\pi}{4}}(z_C - z_D)\ \ (**)$.

L'égalité $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ implique que $z_C - z_B = z_D$, ou encore que $z_C = z_B + z_D$.

Il résulte alors des relations $(*)$ et $(**)$ que $z_F = e^{i\frac{\pi}{4}}z_E$.

Ce qui prouve que le triangle AEF est isocèle de sommet principal A.

IV. Antidéplacements

Activité 1

Soit A et B deux points distincts et S la symétrie orthogonale d'axe (AB).

On considère un point C de (AB) et un point D n'appartenant pas à (AB).

On note A', B', C' et D' les images respectives de A, B, C et D par S.

Comparer $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'}}\right)$. Que peut-on conclure ?

Théorème

Une isométrie est un antidéplacement, si et seulement si, c'est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation.

Démonstration

Il est clair que la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation est un antidéplacement.

Réciproquement, soit f un antidéplacement, A un point et A' son image par f.
Alors l'antidéplacement $f \circ t_{\overrightarrow{A'A}}$ fixe le point A' et par suite $f \circ t_{\overrightarrow{A'A}}$ est une symétrie orthogonale. Le théorème en découle.

Activité 2

Soit un carré ABCD de centre I tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On désigne par S la symétrie orthogonale d'axe (AC) et R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et on pose $f = S \circ R$.

1. Montrer que f est un antidéplacement
2. Déterminer $f(B)$ et en déduire la nature de f.
3. Soit Δ la parallèle à (AD) passant par I et on pose $g = t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{\Delta}$ .Quelle est la nature de g ?

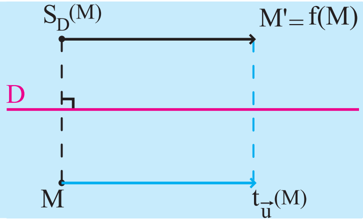
Activité 3

Soit une droite D de vecteur directeur $\vec{u}$.
On désigne par S_D la symétrie orthogonale d'axe D et par $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$.

1. Montrer que $t_{\vec{u}} \circ S_D \circ t_{\vec{u}} \circ S_D = t_{2\vec{u}}$.
2. En déduire que $t_{\vec{u}} \circ S_D = S_D \circ t_{\vec{u}}$.
3. Soit D' une droite de vecteur directeur $\vec{u'}$, $S_{D'}$ la symétrie orthogonale d'axe D' et $t_{\vec{u'}}$ la translation de vecteur $\vec{u'}$.
   Montrer que si $t_{\vec{u}} \circ S_D = t_{\vec{u'}} \circ S_{D'}$ alors D et D' sont confondues et $\vec{u} = \vec{u'}$.

Théorème et définition

Soit f une symétrie glissante.
Il existe un unique vecteur non nul $\vec{u}$ et une droite D unique tels que $f = t_{\vec{u}} \circ S_D = S_D \circ t_{\vec{u}}$ où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D.
Cette décomposition est appelée forme réduite de f.



Vocabulaire

On dit que D est l'axe de la symétrie glissante et $\vec{u}$ son vecteur.
L'axe et le vecteur d'une symétrie glissante sont ses éléments caractéristiques.

Activité 4

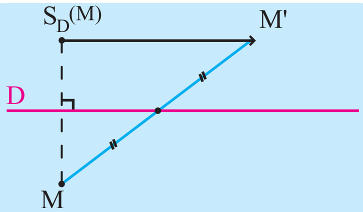
Soit f une symétrie glissante de vecteur $\vec{u}$ et d'axe D.

1. Montrer que pour tout point M d'image M' par f, le milieu I de $[MM']$ appartient à D.
2. Si M est un point de D d'image M' par f, alors $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$.

Propriété

Soit f une symétrie glissante de vecteur $\vec{u}$ et d'axe D,
M un point d'image M' par f.

- Le milieu de $[MM']$ appartient à D.
- Si M est un point de D , alors $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$.
- $f \circ f$ est la translation de vecteur $2\vec{u}$.



Activité 5

Soit ABC un triangle isocèle en A. On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$.

Soit f l'antidéplacement qui transforme A en C et B en A.
Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

Activité 6

On considère un rectangle ABCD. Soit I et J les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[BC]$.

1. Soit l'isométrie $f = t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AB)}$.

   a. Déterminer la droite Δ pour que $S_{\Delta} \circ S_{(AB)} = t_{\overrightarrow{AD}}$.

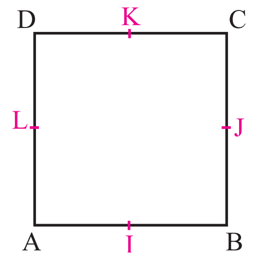
   b. En déduire que f est une symétrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur.
2. Soit l'isométrie $g = S_{(AB)} \circ t_{\overrightarrow{AC}}$.

   a. Soit Δ' l'image de la droite (IJ) par la symétrie orthogonale d'axe (AB).
   Caractériser l'isométrie $S_{(AB)} \circ S_{\Delta'}$.

   b. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g.

Exercice résolu 2

Dans la figure ci-contre ABCD est un carré direct et I, J, K et L sont les milieux des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.



Justifier l'existence de l'antidéplacement g et donner les éléments caractéristiques de g dans chacun des cas ci-dessous.

1. $g(J) = I$ et $g(K) = L$.
2. $g(B) = K$ et $g(K) = A$.
3. $g(A) = C$ et $g(D) = B$.

Solution

1. Il est clair que $JK = IL$ et que $IL \neq 0$.
On en déduit l'existence de g.
Les segments $[JI]$ et $[KL]$ ayant la même médiatrice (BD), on en déduit que g est la symétrie orthogonale d'axe (BD).
2. L'existence de g résulte des relations $BK = KA$ et $KA \neq 0$.
D'autre part les segments $[BK]$ et $[KA]$ ont des médiatrices distinctes, on en déduit que g est une symétrie glissante.
L'axe Δ de g passe par les milieux des segments $[BK]$ et $[KA]$, ce qui prouve que $\Delta = (LJ)$.
De plus, $g \circ g(B) = A$. On en déduit que g est de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.
3. L'existence de g résulte des relations $AD = CB$ et $CB \neq 0$.
Soit f l'unique déplacement vérifiant $f(A) = C$ et $f(D) = B$ alors f est la symétrie centrale de centre O, centre du carré ABCD.
L'antidéplacement $f \circ S_{(AD)}$ transforme A en C et D en B.
Donc $g = f \circ S_{(AD)} = S_{(JL)} \circ S_{(KI)} \circ S_{(AD)} = S_{(JL)} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$.

Exercice résolu 3

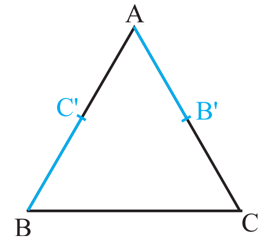
Soit ABC un triangle équilatéral tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

On désigne par B' et C' les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[AB]$.

On se propose de déterminer toutes les isométries f telles que $f(A) = B$ et $f(B') = C'$.

1. Montrer qu'il existe un unique déplacement r qui vérifie les conditions voulues.
2. Donner les éléments caractéristiques de r.
3. Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g qui vérifie les conditions voulues.
   Donner les éléments caractéristiques de g.
   Conclure.

Solution



1. Le triangle ABC étant équilatéral et les points B' et C' étant les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[AB]$, il en résulte que $AB' = BC'$.
On en déduit qu'il existe un unique déplacement r qui envoie A sur B et B' sur C'.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB'}$ et $\overrightarrow{BC'}$ étant distincts, il en résulte que r est la rotation de centre le point d'intersection des médiatrices de $[AB]$ et $[B'C']$ et d'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{BC'}}\right)$.
Par suite r est la rotation de centre le point G, centre de gravité du triangle ABC et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
3. L'égalité $AB' = BC'$ implique l'existence d'un unique antidéplacement g qui envoie A sur B et B sur C'. Les médiatrices de $[AB]$ et $[B'C']$ étant distinctes, il en résulte que g est une symétrie glissante d'axe passant par les milieux de $[AB]$ et de $[B'C']$.
On en déduit que l'axe de g est la droite $(B'C')$ et de vecteur $\overrightarrow{B'C'}$.
Les seules isométries qui envoient A sur B et B' sur C' sont la rotation de centre G et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et la symétrie glissante d'axe $(B'C')$ et de vecteur $\overrightarrow{B'C'}$.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et A un point quelconque. L'application $t_{\vec{u}} \circ S_A$ est

☐ une translation. ☐ une symétrie centrale. ☐ une symétrie glissante.

2. Un déplacement qui fixe deux points distincts est

☐ une translation de vecteur non nul. ☐ une rotation d'angle non nul. ☐ l'identité.

3. La composée de deux symétries glissantes est

☐ une symétrie glissante. ☐ un déplacement. ☐ Une symétrie orthogonale.

4. Soit D une droite et O un point de D.

L'application $S_D \circ R\left(O, \frac{\pi}{3}\right)$ est

☐ une symétrie orthogonale. ☐ une rotation. ☐ Une symétrie glissante.

5. Soit A et B deux points distincts.

L'application $S_A \circ S_B$ est

☐ la translation $t_{2\overrightarrow{AB}}$. ☐ l'identité. ☐ la translation $t_{2\overrightarrow{BA}}$.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. La composée de trois symétries orthogonales est soit une symétrie orthogonale, soit une symétrie glissante.
2. Un antidéplacement qui fixe un point est une symétrie orthogonale.
3. Soit I et J deux points distincts, f un déplacement qui envoie I sur J et g un antidéplacement qui envoie J sur I. Alors $g \circ f$ est une symétrie glissante.
4. La réciproque d'une symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$ est la symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur $-\vec{u}$.
5. Soit ABCD un carré direct et f le déplacement qui envoie A sur C et B sur D. Alors f est une translation.

Dans tous les exercices le plan est orienté dans le sens direct.

1 Soit OAB Un triangle isocèle en O.
Montrer qu'il existe deux isométries qui fixent O et qui envoient A en B.

2 Soit ABCD un parallélogramme de centre O et I le milieu de [CD].
1.Montrer qu'il existe quatre isométries qui transforment le segment [AD] en le segment [BC].
2.Existe-t-il une isométrie qui transforme le triangle BCO en le triangle ADI ?

3 Soit ABCD un rectangle.
On désigne par S_1, S_2 et S_3 les symétries d'axes respectifs (AD), (AB) et (AC).
1. Donner la nature de l'isométrie $S_3 \circ S_2 \circ S_1$.
2. Construire le point E, image de B par $S_3 \circ S_2 \circ S_1$.
3. Caractériser alors $S_3 \circ S_2 \circ S_1$.

4 On considère un triangle ABC isocèle en A et tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$ et on désigne par r la rotation de centre A qui envoie B sur C. Soit D, E et F les images respectives de C, D et E par r.
1. Montrer que F est l'image de B par une rotation r' de centre A, que l'on précisera.
2. Soit G le symétrique de A par rapport à D.
A-t-on $S_{(AC)} \circ S_{(AE)} = S_{(AD)} \circ S_{(AG)}$?

5 Soit A, B, C et D des points tels que $AB = CD$ et $AB \neq 0$.
Montrer qu'il existe deux déplacements f et g qui envoient le segment [AB] sur le segment [CD].
2. Définir f et g dans chacun des cas ci-dessous.
a. La droite (CD) est parallèle à la droite (AB).
b. Les droites (CD) et (AB) sont sécantes.

6 On considère deux cercles isométriques $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de centre O et O'se coupant en deux points A et B.
1. Montrer qu'il existe une unique rotation de centre A qui transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$. Préciser son angle.
2. Soit M' l'image par cette rotation d'un point quelconque M du cercle $\mathscr{C}$.Montrer que les points M, B et M' sont alignés.

7 Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et $AB < AC$.
On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC et O son centre. Soit E le milieu du segment $[BC]$ et P le point du segment $[AC]$ tel que $AB = CP$. La droite (OE) coupe $\mathscr{C}$ en I et J tels que J et A soient sur le même arc orienté BC du cercle $\mathscr{C}$.
1. a. Faire une figure.
b. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $\left(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.
c. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $\left(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et $MB < MC$.
2. a. Justifier qu'il existe une rotation R telle que $R(A) = P$ et $R(B) = C$. Déterminer son angle.
b. Démontrer que le centre de R est un point de $\mathscr{C}$ que l'on précisera.
c. Quelle est la nature du triangle JAP ?

8 On considère un carré ABCD de sens direct et de centre I tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au carré ABCD.
Soit R la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et T la translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$ et $f = T \circ R$.
1. Déterminer $f(D)$ et $f(A)$.
2. Identifier f.

9 Soit un parallélogramme ABCD.
1. Préciser la nature des transformations ci-dessous.
a. $f = S_{(AB)} \circ S_{(CD)} \circ S_{(AD)} \circ S_{(CB)}$.
b. $g = S_{(AB)} \circ S_{(AD)} \circ S_{(CB)} \circ S_{(CD)}$.
c. $h = S_{(AB)} \circ S_{(AD)} \circ S_{(CD)} \circ S_{(CB)}$.
2. Déterminer les éléments caractéristiques de f, g et h lorsque ABCD est un rectangle.

10 Soit un parallélogramme direct ABCD.
On considère le triangle direct IBA rectangle et isocèle en I et les triangles directs ACC' et ADD' rectangles et isocèles en A.

R_A désigne la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre A et T désigne la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

1. On pose $f = R_A \circ T$.

a. Déterminer $f(B)$. En déduire que f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre I.

b. Montrer que le triangle ICD' est rectangle isocèle.

2. Soit J le milieu de $[CC']$ et on désigne par R_J la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre J

a. Montrer que $C = R_J(A)$.

b. Que vaut $(\widehat{\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{CB}})$?

c. Montrer que le triangle BDD' est rectangle isocèle.

3. Soit $g = R_J \circ f$.

a. Déterminer $g(B)$.

b. Soit $K = R_J(I)$. Montrer que K est le symétrique de I par rapport au milieu A' de $[BC]$.

11 On considère des triangles équilatéraux directs OAA', OBB' et OCC'.

On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments $[A'B]$, $[B'C]$ et $[C'A]$.

On note E, F et G les symétriques respectifs du point O par rapport à I, J et K.

1. Soit r_1 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre B' et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Identifier $f_1 = r_1 \circ r_2$.

2. a. Evaluer $(\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{OA}})$.

b. En déduire que le triangle $EB'A$ est équilatéral.

3. Soit t_1 la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ et t_2 la translation de vecteur $\overrightarrow{B'O}$.

a. Préciser la nature de $f_2 = t_1 \circ r_1 \circ t_2$.

b. Déterminer $f_2(B')$ puis identifier f_2.

c. Déterminer $f_2(F)$.

Quelle est alors la nature du triangle EFG ?

d. Quelle est la nature du triangle IJK ? Justifier.

12 On considère un triangle direct OAB, rectangle et isocèle en O.

On note r_A et r_B les rotations de centres respectifs A et B et de même angle $\frac{\pi}{2}$ et S_O la symétrie de centre O.

On place un point C, non situé sur la droite (AB) et on construit les carrés directs BEDC et ACFG

1. a. Déterminer $S_{(AO)} \circ S_{(AB)}$.

b. Montrer que $S_O = r_A \circ r_B$.

2. a. Déterminer l'image de E par $r_A \circ r_B$.

b. En déduire que O est le milieu du segment $[EG]$.

c. On note r_F et r_D les rotations de centres respectifs F et D et de même angle $\frac{\pi}{2}$.

Déterminer $r_F \circ S_O \circ r_D(C)$ puis identifier l'isométrie $r_F \circ S_O \circ r_D$.

d. Soit H le symétrique de D par rapport à O

Démontrer que $r_F(H) = D$, en déduire que le triangle FOD est rectangle et isocèle.

13 On considère un triangle ABC tel que

$AB = AC$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Soit I, J et K les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. On appelle R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et T la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

On pose $f = R \circ T$ et $g = T \circ R$.

1. a. Déterminer l'image de K par f et l'image de J par g.

b. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f et de g.

2. a. Déterminer la nature de $g \circ f^{-1}$.

b. Chercher l'image de A par $g \circ f^{-1}$ et caractériser alors $g \circ f^{-1}$.

c. Soit M un point du plan, n'appartenant pas à la droite (IJ), M_1 est l'image de M par f et M_2 est l'image de M par g.

Montrer que le quadrilatère ACM_2M_1 est un parallélogramme ?

14 Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soit $D = r(C)$ et $E = r^{-1}(B)$.

On désigne par I le milieu du segment $[CD]$.

1. a. Montrer qu'il existe un unique déplacement tel que $f(A) = D$ et $f(C) = A$.

b. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f.

2. Soit $g = f \circ r$.

a. Montrer que g est une translation.

b. Soit $F = g(E)$. Montrer que $f(B) = F$ et en déduire la nature du triangle BIF.

c. Montrer que les points C, A et F sont alignés.

15 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 8, b = 6j$ et $c = 8j^2$.

Soit A' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$, B' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et C' l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1. a. Placer les points A, B, C, A', B' et C'.

b. On note a', b', c' les affixes respectives des points A', B' et C'. Déterminer a', b', c'

c. Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en O.

2. a. Calculer la distance $OA + OB + OC$.

b. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.

3. Soit M un point du plan d'affixe z.

a. Montrer que

$$\left|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j\right| = \left|a+bj^2+cj\right| = 22.$$

b. Montrer que $|z+z'+z''| \leq |z|+|z'|+|z''|$, pour tous nombres complexes z, z', z''.

c. En déduire une condition sur M pour que la distance $MA + MB + MC$ soit minimale.

16 On considère deux triangles équilatéraux directs ABC et DEF.

On note G et H les points tels que EDBG et CDFH sont des parallélogrammes.

Le but de l'exercice est de démontrer de deux manières (l'une utilisant les nombres complexes, l'autre utilisant les composées de déplacements) que le triangle AGH est équilatéral.

I/ Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct, on note a, b, c, d, e, f, g et h les affixes respectives des points A, B, C, D, E, F, G et H

1. Montrer que $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$.

Exprimer $(f-d)$ à l'aide de $(e-d)$.

2. Exprimer g à l'aide de b, d et e.

Exprimer h en fonction de c, d et f.

3. Montrer que $h - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(g-a)$.

En déduire que le triangle AGH est équilatéral.

II/ On note t_1 la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$, t_2 la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$.

R la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On pose $f = t_2 \circ R \circ t_1$.

1. a. Justifier que f est une rotation et préciser son angle.

b. Déterminer l'image de B par f et en déduire le centre de la rotation f.

2. Déterminer l'image de G par f et montrer que le triangle AGH est équilatéral.

17 Soit ABCD un carré direct et de centre O du plan. Soit f l'antidéplacement qui transforme A en D et D en C.

1. Montrer que f est une symétrie glissante et déterminer ses éléments caractéristiques.

2. Soit $E = f(C)$.

a. Montrer que DCE est un triangle isocèle, rectangle en C et direct.

b. Construire le point E.

c. Déterminer et construire l'image F du point B par f.

3. Déterminer et caractériser l'application $f \circ S_{(AD)}$.

18 On considère un rectangle ABCD et on désigne par O, I, J et K les milieux respectifs des segments $[AD]$, $[BC]$, $[OB]$ et $[OC]$.

1. a. Déterminer les images respectives des points B et I par $t_{\overrightarrow{JK}} \circ S_{(JK)}$.

b. Déterminer toutes les isométries qui transforment B en O et I en D.

2. Soit Δ la médiatrice du segment $[IC]$.

a. Construire le point E image de B par la symétrie orthogonale S_{Δ} .

b. Soit L le milieu du segment [CD]
Déterminer l'image de D par la symétrie centrale S_L .

c. En déduire la nature de $S_L \circ t_{\overrightarrow{JK}} \circ S_{(JK)}$.

19 Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Déterminer les expressions analytiques, la nature et les éléments caractéristiques de f dans chacun des cas ci-dessous.

a. $A(1, 2)$ et $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ et $f = R_{(A, \frac{\pi}{3})} \circ t_{\vec{u}}$.

b. $D : 2x - 3y + 1 = 0$, $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ et $f = t_{\vec{u}} \circ S_D$.

c. $D_1 : y - 1 = 0$, $D_2 : x - y - 1 = 0$ et $f = S_{D_1} \circ S_{D_2}$.

20 Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Soit r l'application de $P \to P$ qui a tout point $M(x, y)$ associé $M'(x', y')$ tel que

$$\begin{cases} x' = 1 - y \\ y' = x \end{cases}.$$

1. Montrer que r est une rotation dont on précisera le centre A et une mesure de son angle.

2. Soit $f = r \circ S_{(O, \vec{j})}$. Montrer que f est une symétrie glissante que l'on caractérisera.

21 Soit l'équation

$(E) : z^3 - (2 + 4i)z^2 - (9 - 10i)z + 18 + 6i = 0$

1. a. Vérifier que 3 est une racine de (E).

b. En déduire les deux autres solutions z_1 et z_2 (z_1 étant la racine ayant la partie réelle positive).

1. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, A, B et C sont trois points d'affixes respectives 3, z_1 et z_2 .

a. Montrer que OABC est un parallélogramme.

b. Montrer qu'il existe un unique déplacement f et un unique antidéplacement g transformant O en B et A en C.

2. Identifier f.

3. Soit S la symétrie orthogonale d'axe (OA).
Montrer que $g = f \circ S$.

22 Soit A, B, C et A' quatre points distincts d'un cercle Γ de centre O.

1. Faire une figure et placer les points B' et C' tels que les droites (AB') et $(A'B)$ soient respectivement parallèles aux droites (BC') et $(B'C)$.

2. On note Δ_1, Δ_2 et Δ_3 les médiatrices respectives des segments $[AB']$, $[CB']$ et $[CA']$. On désigne par S_1, S_2 et S_3 les symétries orthogonales d'axes respectifs Δ_1, Δ_2 et Δ_3 .

a. Montrer que $f = S_3 \circ S_2 \circ S_1$ est une symétrie orthogonale.

b. Identifier $f \circ f$.

c. Montrer que $S_3(C') = A$ et en déduire que les droites (AC') et $(A'C)$ sont parallèles.

23 On considère un carré ABCD de centre I tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

A/ On désigne par J et K les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[CD]$, par C' le symétrique du point C par rapport à D.

Soit R_D et R_B les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs D et B, S_I la symétrie centrale de centre I et S_K la symétrie centrale de centre K

1. Soit $f = R_D \circ S_I \circ R_B$.

a. Déterminer $f(B)$.

b. Montrer que f est une translation que l'on caractérisera.

2. On pose $g = f \circ S_{(IJ)}$.

a. Déterminer $g(C)$ et $g(D)$.

b. En déduire que g est une symétrie glissante et déterminer ses éléments caractéristiques.

3. a. Montrer que $S_{(AD)} \circ S_{(CD)} \circ S_{(IK)} \circ S_{(IJ)} = f$

b. En déduire que $S_K \circ S_{(IJ)} = S_{(AD)} \circ f$

c. Montrer que $S_{(AD)} \circ f$ est une symétrie glissante et déterminer ses éléments caractéristiques.

B/ Soit Ω le point d'intersection des bissectrices intérieures du triangle ABD.

On désigne par r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

et r' la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

1. Construire le point A' image de A par r'.
2. Identifier $r' \circ r$.
3. Montrer que les droites $(\Omega A')$ et (AB) sont parallèles.

24 Soit ABC un triangle direct et A' le milieu du segment $[BC]$.

Soit P et Q les deux points définis

par $\begin{cases} PA = PC \\ \left(\widehat{\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$ et $\begin{cases} QB = QA \\ \left(\widehat{\overrightarrow{QB}, \overrightarrow{QA}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$.

On désigne par Ω le milieu du segment $[PQ]$, I le milieu du segment $[QA']$, J le milieu du segment $[PA']$ et P' le symétrique de P par rapport à A'.

On désigne par R_P et R_Q et les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs P et Q.

On pose $f = R_Q \circ S_{A'} \circ R_P$.

1. a. Déterminer $f(A)$. Caractériser alors f.

b. Montrer que $R_Q(P') = P$.

2. a. Montrer qu'il existe un unique déplacement φ tel que $\varphi(A') = Q$ et $\varphi(P) = A'$.

b. Caractériser φ.

c. Donner la nature et les éléments caractéristiques de $h = \varphi \circ S_{(A'Q)}$.

3. Soit ψ l'antidéplacement qui envoie A' sur Q et P sur A'.

a. Montrer que $\psi(J) = I$.

b. Montrer que ψ est une symétrie glissante.

c. Déterminer les éléments caractéristiques de ψ.

4. Soit M un point du plan.

On pose $\psi(M) = M_1$ et $\varphi(M) = M_2$.

Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à une droite fixe que l'on déterminera.

25 On considère un carré ABCD de centre I tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Soit E le point du plan tel que DCE est un triangle équilatéral direct.

On désigne par J, K et L les milieux respectifs des segments $[DC]$, $[AD]$ et $[DE]$ et par O le centre du cercle circonscrit au triangle DCE.

1. On pose $\varphi = R_{\left(D, \frac{\pi}{3}\right)} \circ S_{(IJ)}$.

a. Déterminer $\varphi(C)$ et $\varphi(D)$.

b. Montrer alors que φ est une symétrie glissante dont on déterminera les éléments caractéristiques.

2. a. Caractériser l'application $t_{\overrightarrow{AD}} \circ S_{(AB)}$.

b. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'application $\psi = t_{\overrightarrow{BD}} \circ S_{(AB)}$.

3. Pour tout point N du plan on considère les points $N_1 = R_{\left(D, \frac{\pi}{3}\right)}(N)$ et $N_2 = R_{\left(O, -\frac{2\pi}{3}\right)}(N)$.

Montrer que le milieu du segment $[N_1N_2]$ est un point fixe que l'on précisera.

4. Soit M_0 un point du plan. On considère la suite des points (M_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(M_n) = M_{n+1}$.

a. Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\overrightarrow{M_0M_{2n}} = (2n)\overrightarrow{IL}$.

b. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, M_{2n} appartient à une droite fixe que l'on précisera.

26 On considère un rectangle ABCD tel que

$AB = 2BC$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On désigne par I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.

1. a. Montrer qu'il existe un unique déplacement f du plan tel que $f(A) = C$ et $f(I) = J$.

b. Caractériser f puis en déduire que $f(B) = D$.

2. Déterminer la droite Δ telle que $f = S_{(IJ)} \circ S_{\Delta}$.

3. Soit r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a. Déterminer $r(B)$, $r(C)$ et $r(J)$.

b. Soit M un point de $[CJ]$, la perpendiculaire à (IM) issue de I coupe la perpendiculaire à (BM) issue de J en M'. Quel est l'ensemble des points M' lorsque M décrit $[CJ]$?

4. On pose $g = r \circ f$.

a. Montrer que g est une rotation dont on précisera l'angle.

b. Déterminer $g(A)$.

c. Déduire la construction du centre de g.

5. a. Montrer qu'il existe un unique antidéplacement h tel que $h(A)=C$ et $h(I)=J$.

b. Montrer que h est une symétrie glissante.

c. Montrer que $h(B)=D$.

6. On propose de déterminer les éléments caractéristiques de h en utilisant deux méthodes.

Première méthode

a. Déterminer $h\circ S_{(AB)}(A)$ et $h\circ S_{(AB)}(B)$.

En déduire $h\circ S_{(AB)}$.

b. Déterminer les éléments caractéristiques de h.

Deuxième méthode

a. On pose $D'=h(D)$.

Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CD'}}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $CD'=AD$.

En déduire que D' est le symétrique de B par rapport à C.

b. En déduire les éléments caractéristiques de h.

c. Construire le point $C'=h(C)$.

7. Le cercle de diamètre $[AB]$ recoupe $[AC]$ en E.

Le cercle de diamètre $[CD]$ recoupe $[CC']$ en E'.

Soit F le symétrique de E' par rapport à (IJ).

Montrer que (EF) est parallèle à (AD).

27 On considère AFED un carré de coté 4 cm tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AD}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et O son centre.

On désigne par B et O_1 les symétriques respectifs de A et O par rapport à la droite (EF).

1. a. Soit r la rotation définie par $r(F)=E$ et $r(E)=D$. préciser l'angle et le centre de r.

b. Soit $f=r\circ S_{(OO_1)}$ où $S_{(OO_1)}$ désigne la symétrie orthogonale d'axe (OO_1). Montrer que f est la symétrie orthogonale d'axe (OE).

2. Soit $r'=t_{\overrightarrow{OO_1}}\circ r^{-1}$ où $t_{\overrightarrow{OO_1}}$ désigne la translation de vecteur $\overrightarrow{OO_1}$ et r^{-1} la rotation réciproque de r

a. Montrer que r' est une rotation dont on précisera l'angle.

b. Déterminer $r'(O)$. En déduire que F est le centre de r'.

3. On désigne par g l'antidéplacement défini par $g(D)=F$ et $g(O)=O_1$.

a. Montrer que g est une symétrie glissante et déterminer sa forme réduite.

b. Soit M un point du plan. Montrer que $g(M)=r'(M)$, si et seulement si, $f(M)=M$.

c. En déduire l'ensemble des points M tels que $g(M)=r'(M)$.

28 Soit ABC un triangle tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, O est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC et I est le point d'intersection des bissectrices intérieures de ce triangle.

Les points P et Q appartiennent respectivement aux demi-droites $[CA)$ et $[BA)$ et vérifient $CP=BQ=BC$.

1. a. Montrer que la droite (CI) est la médiatrice du segment $[PB]$ et que la droite (BI) est la médiatrice du segment $[CQ]$.

b. Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{CP},\overrightarrow{QB}}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

2. Soit f la rotation qui transforme C en Q et P en B.

a. Montrer que f a pour centre I et pour angle $\frac{2\pi}{3}$.

b. Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC}}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

c. Montrer que les points I, P et Q sont alignés.

3. On pose $O_1=f(O)$ et $O_2=f(O_1)$.

a. Montrer que $O=f(O_2)$.

b. En déduire que le triangle OO_1O_2 est équilatéral et que la droite (OI) est la médiatrice du segment $[O_1O_2]$.

4. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et $g=f\circ r\circ f$.

a. Montrer que g est une translation.

Vérifier que $g(O_2)=O_1$. En déduire le vecteur de translation.

b. Montrer que $r(B)=C$. En déduire que $g(P)=Q$.

c. Montrer alors que les droites (OI) et (PQ) sont perpendiculaires.