Chapitre 1

Nombres complexes

A partir de la deuxième moitié du XVIIe, les géomètres utilisent de façon de plus en plus courante le symbole -1 dans les identités algébriques et les recherches relatives aux résolutions d'équations.
En 1740, Euler donne la formule $\cos x = \frac{1}{2}(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})$, et en 1748, la formule $e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\,\sin x$, x est réel.
Dontzig dit de cette dernière qu'elle contient "les symboles les plus importants, union mystérieuse dans laquelle l'arithmétique est représentée par 0 et 1, l'algèbre par -1 , la géométrie par p et l'analyse par e".
(Dalmedico et al, Une histoire des mathématiques, 1986).

Cauchy ne se ralliera explicitement à la représentation géométrique des nombres complexes qu'en 1874. [...] et s'est convaincu que la "notion de quantité géométrique [...] comprendra comme cas particulier la notion de quantité algébrique.

Chapitre 1

Nombres complexes

I. Rappels et compléments

I. 1 Définition et opérations sur les nombres complexes

Activité 1

Déterminer l'écriture cartésienne de chacun des nombres complexes ci-dessous.

$(2-2i)(1+i)^2$; $\left(-\sqrt{2}-i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+i\sqrt{3}\right)$; $(1+i)^4(1-i)^{20}$.

Théorème et définition (rappel)

Il existe un ensemble appelé ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$ et vérifiant les propriétés ci-dessous.

1. L'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.
2. Il existe un élément de $\mathbb{C}$, noté i, tel que $i^2=-1$.
3. L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.
4. Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de façon unique sous la forme $z=a+ib$, où a et b sont des réels.

Conséquences

Soit $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$, où a, a', b et b' sont des réels. Alors

$z=z'$, si et seulement si, $a=a'$ et $b=b'$.

$z=0$, si et seulement si, $a=b=0$.

z est réel, si et seulement si, $b=0$.

z est imaginaire, si et seulement si, $a=0$.

Activité 2

Soit les nombres complexes $z=1+2i$ et $z'=i$.

1. Donner l'écriture cartésienne de zz', $(zz')^2$, $(zz')^3$, $(zz')^4$, ainsi que de leurs conjugués.

2. Donner l'écriture cartésienne de $\frac{z}{z'}$, $\left(\frac{z}{z'}\right)^3$, ainsi que de leurs conjugués.

Soit $z=a+ib$, où a et b sont des réels.
Le conjugué de z est le nombre complexe $\bar{z}=a-ib$.

Propriétés

Pour tous nombres complexes z et z', $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$; $\overline{zz'}=\overline{z}\,\overline{z'}$; $\overline{\left(z^n\right)}=\left(\overline{z}\right)^n$; $n \in \mathbb{N}^*$

- Pour tout nombre complexe z et tout nombre complexe non nul z',

$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$; $\overline{\left(\frac{1}{z'^n}\right)}=\frac{1}{\left(\overline{z'}\right)^n}$, $n \in \mathbb{Z}$.

- $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)$; $z-\overline{z}=2i\operatorname{Im}(z)$; $z\overline{z}=\left(\operatorname{Re}(z)\right)^2+\left(\operatorname{Im}(z)\right)^2$.
- $z=\overline{z}$, si et seulement si, z est réel.
- $z=-\overline{z}$, si et seulement si, z est imaginaire.

I. 2 Affixe d'un point, affixe d'un vecteur

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

1. Placer les points A, B et C d'affixes respectives i, $2i$, $1+2i$.
2. Donner les affixes de leurs symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
3. Donner les affixes de leurs symétriques par rapport au point O.
4. Donner les affixes de leurs symétriques par rapport à l'axe des ordonnées

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

L'affixe d'un point $M(a,b)$ du plan est le nombre complexe $z=a+ib$ noté $\operatorname{Aff}(M)$ ou z_M.

On dit aussi que le point $M(a,b)$ est l'image de z.

Soit $\vec{w}$ un vecteur et M et N deux points tels que $\vec{w}=\overrightarrow{MN}$. Alors l'affixe du vecteur $\vec{w}$ est le nombre complexe z, noté $\operatorname{Aff}\left(\vec{w}\right)$, vérifiant $z=z_N-z_M$.

Pour tous vecteurs $\vec{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ et tous réels α et β,

$\operatorname{Aff}(\alpha\vec{w}+\beta\overrightarrow{w_1})=\alpha\operatorname{Aff}(\vec{w})+\beta\operatorname{Aff}(\overrightarrow{w_1})$.

5. Donner les affixes des vecteur $\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}$, $-\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.
6. Déterminer l'affixe du centre de gravité du triangle ABC.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soit A le point d'affixe $2-2i$ et M un point d'affixe z.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur z pour que M appartienne à la droite (OA).
2. En déduire l'ensemble des points M d'affixe $z=k(2-2i)$, $k \in \mathbb{R}$.

Propriété

Soit $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ deux vecteurs tels que $\overrightarrow{w_1}$ est non nul.

Les vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ sont colinéaires, si et seulement si, $\dfrac{z_{\overrightarrow{w}}}{z_{\overrightarrow{w_1}}}$ est réel.

Démonstration

Soit $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ deux vecteurs tels que $\overrightarrow{w_1}$ non nul.

Les vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ sont colinéaires, si et seulement si, il existe un réel α tel que $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{w_1}$.

La relation $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{w_1}$ équivaut à $\text{Aff}\left(\overrightarrow{w}\right) = \alpha\text{Aff}\left(\overrightarrow{w_1}\right)$, ou encore à $\dfrac{\text{Aff}\left(\overrightarrow{w}\right)}{\text{Aff}\left(\overrightarrow{w_1}\right)} = \alpha$.

Le théorème en découle.

Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = 2\left(z+\bar{z}\right) + i\bar{z}$.

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M', images des points M d'abscisse nulle.
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M', images des points M d'ordonnées nulles.

Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soit A le point d'affixe $1+2i$ et M un point d'affixe z.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur z pour que M appartienne à la perpendiculaire à la droite (OA) en O.
2. En déduire l'ensemble des points M d'affixe $z = ik(1+2i)$, $k \in \mathbb{R}$.

Propriété

Soit $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ deux vecteurs tels que $\overrightarrow{w_1}$ est non nul.

Les vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ sont orthogonaux , si et seulement si, $\dfrac{z_{\overrightarrow{w}}}{z_{\overrightarrow{w_1}}}$ est imaginaire.

Démonstration

Soit $\vec{w}$ et $\vec{w_1}$ deux vecteurs tels que $\vec{w_1}$ est non nul. On désigne par

$z_{\vec{w}} = a + bi$ et $z_{\vec{w_1}} = a' + b'i$ avec a, b, a′ et b′ réels, les affixes respectives de $\vec{w}$ et $\vec{w_1}$.

Les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w_1}$ sont orthogonaux, si et seulement si, $aa' + bb' = 0$.

Or, $\dfrac{z_{\vec{w}}}{z_{\vec{w_1}}} = \dfrac{a+bi}{a'+b'i} = \dfrac{(a+bi)(a'-b'i)}{a'^2+b'^2} = \dfrac{aa'+bb'+(a'b-ab')i}{a'^2+b'^2}$.

On en déduit que $\vec{w}$ et $\vec{w_1}$ sont orthogonaux, si et seulement si, $\dfrac{z_{\vec{w}}}{z_{\vec{w_1}}}$ est imaginaire.

Activité 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\dfrac{z-i}{z-1}$ soit imaginaire.

I. 3 Module d'un nombre complexe

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_B = 1 - i\sqrt{3}$.

1. Vérifier que le triangle OAB est isocèle en O.
2. On désigne par D le point tel que OADB soit un losange. Déterminer l'affixe de D.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit $z = a + ib$ et $M(a, b)$ le point d'affixe z.
On appelle module de z le réel positif, noté $|z|$, défini par $|z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Pour tous points M et N d'affixes z_M et z_N, $|z_N - z_M| = MN$.

Activité 2

Soit $z = 2 - i$ et $z' = -3 + 4i$.

Calculer les modules de $z + z'$; zz' ; $\dfrac{z}{z'}$; z^4 ; $(\overline{z}z')^2$.

Propriétés

Soit deux nombres complexes z et z′.

$|z| = 0$, si et seulement si, $z = 0$; $|z + z'| \leq |z| + |z'|$; $|kz| = |k||z|$, $k \in \mathbb{R}$.

$|zz'| = |z||z'|$; $|\overline{z}| = |z|$; $|z|^2 = z\overline{z}$; $|z^n| = |z|^n$, $n \in \mathbb{N}^*$;

$\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$, $z \neq 0$; $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$, $z \neq 0$; $\left|\dfrac{1}{z^n}\right| = \dfrac{1}{|z|^n}$, $z \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-1+2i| = 2$.
2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z+2-i| = |\bar{z}-2+2i|$.
3. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|2z+2-i| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
4. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|iz+2+i| = 2$.

I. 4 Argument d'un nombre complexe non nul

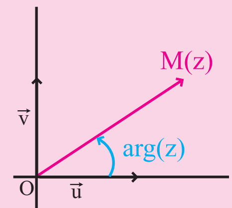
Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. Placer les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -i$, $z_B = 4$, $z_C = 2+2i$ et $z_D = -1+i$.
2. Soit A_1, B_1, C_1 et D_1 les symétriques respectifs de A, B, C et D par rapport à l'axe des abscisses.
Déterminer un argument de chacun de leurs affixes.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soit z un nombre complexe non nul et M son image.
On appelle argument de z et on note $\arg(z)$ toute mesure de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$.



4. Reprendre la question précédente pour les symétriques respectifs de A, B, C et D par rapport à O.
5. Reprendre la question précédente pour les symétriques respectifs de A, B, C et D par rapport à l'axe des ordonnées.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = 2\left(z-\bar{z}\right)+2iz$.

1. a. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\arg(z) \equiv 0 \ [2\pi]$.
   b. Déterminer et construire l'ensemble des points M', images par f des points M tels que $\arg(z) \equiv 0 \ [2\pi]$.
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M', images par f des points M tels que $\arg(z) \equiv \pi \ [2\pi]$.
3. Déterminer et construire l'ensemble des points M', images par f des points M tels que $\arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2} \ [2\pi]$.

Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soit M un point distinct de O tel que $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}\right) \equiv \theta\ [2\pi]$.

On désigne par M_1, M_2 et M_3 les symétriques respectifs de M par rapport à l'axe des abscisses, au point O et à l'axe des ordonnées.

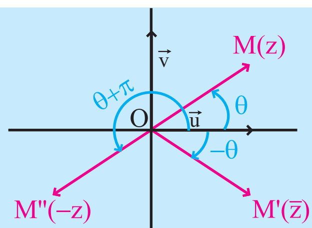
Déterminer $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}}\right)$; $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM_2}}\right)$; $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM_3}}\right)$ à l'aide de θ.

Propriétés

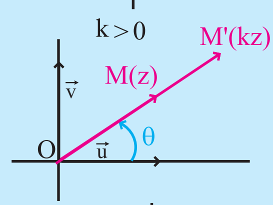
Soit z un nombre complexe non nul et k un réel non nul.

$\arg\left(\bar{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$.

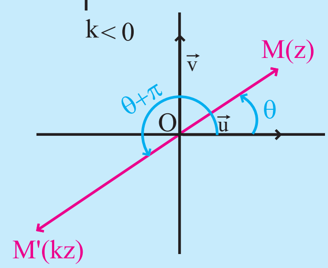
$\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)\ [2\pi]$.



Si $k > 0$ alors $\arg(kz) \equiv \arg(z)\ [2\pi]$.



Si $k < 0$ alors $\arg(kz) \equiv \pi + \arg(z)\ [2\pi]$.



I. 5 Ecriture trigonométrique

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Soit $z = -2\sqrt{3} + 2i$.

Déterminer l'écriture trigonométrique de z et placer le point d'affixe z.

En déduire l'écriture trigonométrique de chacun des nombres complexes $\bar{z}, -z, \frac{1}{2}z$ et $-\frac{3}{2}z$, puis placer leurs points images.

Soit z un nombre complexe non nul tel que $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$.

Alors $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.

L'écriture précédente est appelée écriture trigonométrique de z.

Si M est l'image de z dans le repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ alors M appartient au cercle de centre O et de rayon $|z|$ et à la demi droite $[OB)$ telle que $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OB}}\right) \equiv \theta\ [2\pi]$.

Activité 2

Soit les nombres complexes $z = \dfrac{\sqrt{3} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z' = \dfrac{1 - i\sqrt{2}}{2}$.

Donner une valeur approchée de leurs arguments à 10^{-2} près.

Soit z un nombre complexe non nul tel $z = a + ib$, a et b des réels.
Alors $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$, si et seulement si,
$\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soit A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 4$, $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

1. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
2. Donner les écritures trigonométriques de z_A, z_B et z_C.
3. Soit D le point tel que OABD est un parallélogramme.
   Donner l'écriture trigonométrique de l'affixe z_D de D.
4. Soit K l'image de C par le quart de tour direct de centre O.
   Donner l'écriture trigonométrique de l'affixe z_K de K.

I. 6 Propriétés d'un argument d'un nombre complexe non nul

Activité 1

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls tels que $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = |z'|(\cos\theta' + i\sin\theta')$.

1. Donner les écritures trigonométriques de zz', $\dfrac{1}{z}$ et $\dfrac{z'}{z}$.
2. a. Montrer par récurrence, sur l'entier naturel n, que $z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

   b. En déduire que pour tout entier naturel n, $z^{-n} = |z|^{-n}\left(\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)\right)$.

Propriétés

Soit deux nombres complexes non nuls z et z'.

$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$.

$\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$.

$\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) \equiv \arg(z') - \arg(z)\ [2\pi]$.

$\arg(z^n) \equiv n\arg(z)\ [2\pi]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Pour tout nombre complexe non nul z et tout entier n, $z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

La formule précédente est appelée formule de Moivre.

Activité 2

Donner l'écriture trigonométrique de chacun des nombres complexes ci-dessous.

$$(1+i)^6 \;;\; (1-i)^9 \frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^5}{\left(\sqrt{3}-i\right)^8} \;;\; \left(2\sqrt{3}-2i\right)^6\left(1+i\sqrt{3}\right)^3.$$

Exercice résolu 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soit M_1 le point d'affixe $z=1-i$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par M_n le point d'affixe z^n.

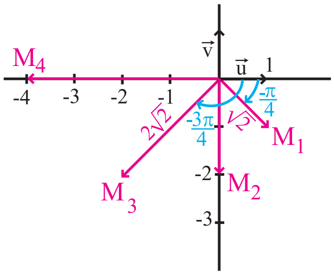
1. Donner l'écriture trigonométrique de z^n , $n\geq 1$.
2. Construire les points M_1, M_2 , M_3 et M_4.
3. Déterminer les entiers naturels n tels que les points M_n soient sur la droite d'équation $y=x$. Le point M_{2071} appartient-il à la droite d'équation $y=x$?

Solution

1. On peut écrire $1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

   On déduit alors de la formule de Moivre que $z^n=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right)\right)$.

2. Le point M_1 a pour affixe $z=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.



Par suite M_1 est le point d'intersection du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$ avec la demi-droite $\left[OA_1\right)$ telle que $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OA_1}}\right)\equiv -\frac{\pi}{4}\;[2\pi]$.

Le point M_2 a pour affixe $z^2=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

Par suite M_2 est le point d'intersection du cercle de centre O et de rayon 2 avec la demi-droite $\left[OA_2\right)$ telle que $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OA_2}}\right)\equiv -\frac{\pi}{2}\;[2\pi]$.

Le point M_3 a pour affixe $z^3=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

Par suite M_3 est le point d'intersection du cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$ avec la demi-droite $[OA_3)$ telle que $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OA_3}}\right) \equiv -\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

Le point M_4 a pour affixe $z^4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi) = -4$.

3. Un point M_n appartient à la droite d'équation $y = x$, si et seulement si,

$\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM_n}}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM_n}}\right) = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

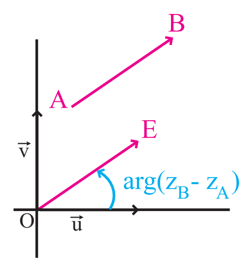
Par suite M_n appartient à $D : y = x$, si et seulement si,

$-\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $-\frac{n\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

On en déduit que M_n appartient à D, si et seulement si, $(n+1)$ est multiple de 8 ou $(n+5)$ est multiple de 8. L'entier 2072 étant divisible par 8, on en déduit que M_{2071} appartient à D.

I. 7 Angles orientés et nombres complexes

Activité 1



Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit A et B deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B.

1. En considérant le point E tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OE}$, montrer que $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AB}}\right) \equiv \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$.

2. Soit C et D deux points distincts.

   a. Vérifier que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{CD}}\right) - \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AB}}\right)\ [2\pi]$

   b. En déduire que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]$.

Théorème

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit A , B, C et D des points d'affixes respectives z_A , z_B, z_C et z_D et tels que $AB \neq 0$ et $CD \neq 0$.

Alors $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AB}}\right) \equiv \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]$.

Conséquence

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \frac{CD}{AB}(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ avec } \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) \equiv \theta \ [2\pi].$$

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soit A le point d'affixe 1, B le point d'affixe i.

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\arg(z - i) \equiv \frac{\pi}{3} \ [2\pi]$.
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\arg\left(\frac{z-i}{z-1}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$.

Exercice résolu 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Soit A le point d'affixe $2 - i$.

Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que

$\arg\left((z-2+i)^3\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$.

Solution

On sait qu'un argument n'est défini que pour un nombre complexe non nul.

Par suite la relation $\arg\left((z-2+i)^3\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$ n'a de sens que si M est distinct de A.

De plus, $\arg\left((z-2+i)^3\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$, si et seulement si, $3\arg(z-2+i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

On en déduit que

$\arg\left((z-2+i)^3\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$, si et seulement si, $\arg(z-2+i) = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$.

Remarquons que

$\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{6} \ [2\pi]$, si $k = 3n,\ n \in \mathbb{Z}$.

$\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \ [2\pi]$, si $k = 3n+1,\ n \in \mathbb{Z}$.

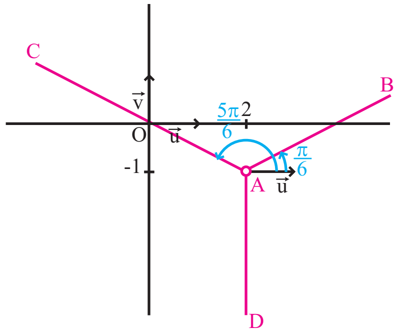
$\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} \ [2\pi]$, si $k = 3n+2,\ n \in \mathbb{Z}$.

On en déduit que, $\arg\left((z-2+i)^3\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$, si et seulement si, $\arg(z-2+i) \equiv \frac{\pi}{6} \ [2\pi]$ ou

$\arg(z-2+i) \equiv \frac{5\pi}{6} \ [2\pi]$ ou $\arg(z-2+i) \equiv \frac{3\pi}{2} \ [2\pi]$.

De plus, $\arg(z-2+i) \equiv \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AM}}\right) \ [2\pi]$.

L'ensemble cherché est donc la réunion de trois demi droites $[AB)$, $[AC)$ et $[AD)$ privées de A telles que $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$, $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$ et $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{3\pi}{2}\ [2\pi]$.



Exercice résolu 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

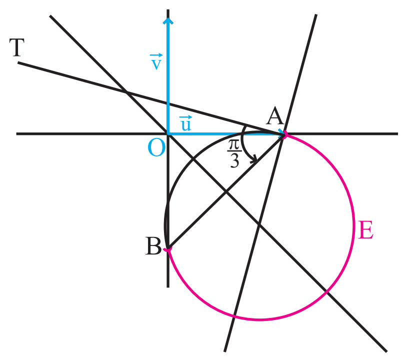
Déterminer et construire l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $\arg\left(\frac{z-1}{z+i}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Solution

Soit M un point d'affixe z tel que $z \neq 1$ et $z \neq -i$, alors $\arg\left(\frac{z+i}{z-1}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right)\ [2\pi]$ où A et B sont les points d'affixes respectives 1 et $-i$.

Par suite, M est un point de l'ensemble E, si et seulement si, $\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Ainsi, l'ensemble E est l'arc $\overset{\frown}{BA}$, privé des points A et B, du cercle $\mathscr{C}$ passant par A et B et tangent en A à la demi-droite $[AT)$ définie par $\left(\widehat{\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.



II. Ecriture exponentielle d'un nombre complexe non nul

Activité 1

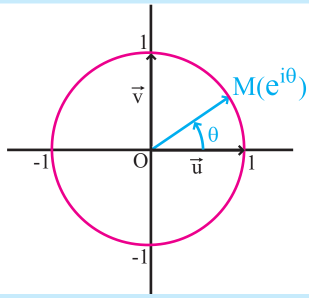
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Soit les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + i\right)$ et $z_C = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$.
   a. Donner les écritures trigonométriques de z_A, z_B et z_C.
   b. En déduire que les points A, B et C appartiennent au cercle trigonométrique.
2. Soit les points E, F et G du cercle trigonométrique tels que $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OE}}\right) \equiv -\frac{3\pi}{2}\ [2\pi]$, $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OF}}\right) \equiv \frac{5\pi}{4}\ [2\pi]$ et $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OG}}\right) \equiv -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.
   Donner les écritures trigonométriques de leurs affixes.

Notation

Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $\cos\theta + i\sin\theta$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, un point M appartient au cercle trigonométrique, si et seulement si, il a pour affixe $z = e^{i\theta}$, où $\theta \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)\ [2\pi]$.



Conséquences

$e^{i0} = 1,\ e^{i\frac{\pi}{2}} = i,\ e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i,\ e^{i\pi} = -1.$

Pour tout réel θ et tout entier k, $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)}$.

Pour tout réel θ, $\left|e^{i\theta}\right| = 1$ et $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ et $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On donne les nombres complexes $z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z' = e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

1. Donner le module et un argument de chacun des nombres complexes $-z,\ \bar{z},\ zz',\ \frac{1}{z},\ \frac{z}{z'}$ et z^n, $n \in \mathbb{Z}$.
2. Ecrire sous la forme $e^{i\theta}$ les nombres complexes zz', $\bar{z}$, $\frac{z}{z'}$, z^n, $n \in \mathbb{Z}$.

Les propriétés ci-dessous découlent des propriétés de l'argument du produit, de l'inverse ou du quotient de deux nombres complexes non nuls.

Propriétés

Soit deux réels θ et θ'.

$e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$; $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$; $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}$.

Exercice résolu 4

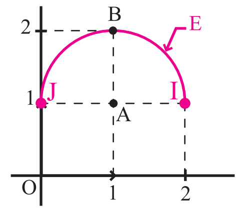
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On considère le nombre complexe $z = 1 + i + e^{i\theta}$, $\theta \in [0,\pi]$ et on désigne par E l'ensemble des points M du plan d'affixe z.

1. Vérifier que le point B d'affixe $z_B = 1+2i$ appartient à E.
2. Déterminer l'ensemble E.

Solution

1. On sait que $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. On peut alors écrire $z_B = 1 + 2i = 1 + i + e^{i\frac{\pi}{2}}$.
Ce qui prouve que B appartient à l'ensemble E.
2. Soit A le point d'affixe $z_A = 1 + i$ et M un point du plan complexe d'affixe z.
M appartient à E, si et seulement si, $z - z_A = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$.
On déduit alors, des relations $|z - z_A| = AM$ et $\arg(z - z_A) \equiv \widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{AM})}\ [2\pi]$,
que M appartient à E si, et seulement si, $AM = 1$ et $\widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{AM})} \equiv \theta\ [2\pi]$, où θ est un réel de $[0, \pi]$.
L'ensemble E est donc le demi-cercle de diamètre [IJ] avec I(2, 1), J(0, 1) et contenant le point B.



Activité 3

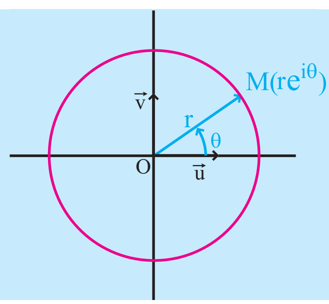
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
1. Donner l'écriture trigonométrique des nombres complexes

$$z_1 = 2i,\ z_2 = -3i,\ z_3 = -\frac{5}{2},\ z_4 = \sqrt{3}(1+i) \text{ et } z_5 = \frac{-2\sqrt{3} + 2i}{5}.$$

2. Ecrire chacun des nombres complexes précédents sous la forme $re^{i\theta}$, avec $r > 0$.

Théorème et définition

Tout nombre complexe non nul z, s'écrit sous la forme
$z = re^{i\theta}$, où $r = |z|$ et $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$.
L'écriture $z = re^{i\theta}$, $r > 0$ est appelée écriture exponentielle de z.



Activité 4

On considère les deux nombres complexes $z = \sqrt{3} + i$ et $z' = -1 + i$.
Donner l'écriture exponentielle des nombres complexes z, $\bar{z}$, z', $\bar{z'}$, zz', $\frac{1}{z}$, z^5, $\frac{z}{z'}$ et z'^2.

Activité 5

1. Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes $z = \sqrt{3} - i$ et $z' = 1 + i$.
2. En déduire l'écriture cartésienne de $\dfrac{(1+i)^{14}}{(\sqrt{3} - i)^8}$.

Activité 6

1. Vérifier que pour tout réel θ, $1+e^{i\theta}=(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}})e^{i\frac{\theta}{2}}$.

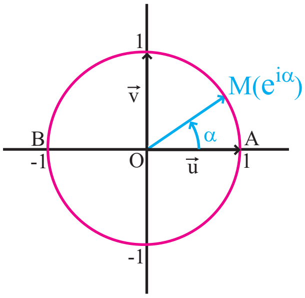
2. Donner l'écriture exponentielle des nombres complexes $z=1+e^{i\frac{2\pi}{5}}$ et $z'=1+e^{i\frac{3\pi}{5}}$.

Activité 7

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit A et B les points d'affixes respectives 1 et -1.

On considère un point M d'affixe $z=e^{i\alpha}$, avec $\alpha\in\,]0,\,\pi[$.



1. Donner, à l'aide de α, la mesure principale de $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM}})$ et l'expression de AM.
2. Donner, à l'aide de α, la mesure principale de $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM}})$ et l'expression de BM.
3. En déduire le module et un argument de chacun des nombres complexes $Z_1=1+z$ et $Z_2=1-z$.

III. Equation $z^n=a,\ n\geq 1,\ a\in\mathbb{C}^*$

Activité 1

1. Soit z un nombre complexe non nul d'argument $\frac{2k\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$. Montrer que

   a. si $k=3n$, alors $\arg(z)\equiv 0\ [2\pi]$,

   b. si $k=3n+1$, alors $\arg(z)\equiv\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$,

   c. si $k=3n+2$, alors $\arg(z)\equiv\frac{4\pi}{3}\ [2\pi]$.

2. Dans cette question, on se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^3=1$.

   a. Montrer que z est une solution de (E), si et seulement si, $z=e^{\frac{2ik\pi}{3}}$, $k\in\mathbb{Z}$.

   b. Déduire de la première question que (E) possède exactement trois solutions distinctes.

3. Soit n un entier naturel non nul. Donner les solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^n=1$.

Théorème et définition

Pour tout entier naturel non nul n, l'équation $z^n=1$ admet dans $\mathbb{C}$ n solutions distinctes définies par $z_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, l'entier k appartenant à $\{0, 1,\dots, (n-1)\}$.

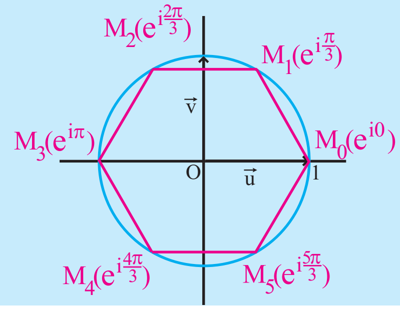
Les solutions de l'équation $z^n=1$ sont appelées racines nièmes de l'unité.

Conséquence

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Lorsque $n \geq 3$, les points images des racines nièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

Les points images des racines sixièmes de l'unité



Activité 2

On pose $j = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

1. Vérifier que j est une racine cubique de l'unité.
2. Vérifier les égalités suivantes $j^3 = 1$, $j^2 = \bar{j}$ et $1 + j + j^2 = 0$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, $j^{3n} = 1$, $j^{3n+1} = j$ et $j^{3n+2} = \bar{j}$.

Exercice résolu 5

1. Vérifier que pour tout nombre complexe z, $(z-1)\left(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1\right) = z^5 - 1$.
2. En déduire les solutions z_1, z_2, z_3 et z_4 de l'équation $(E): z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
3. a. Ecrire z_2, z_3 et z_4 à l'aide de z_1.

   b. En déduire les valeurs de $z_1 + z_2 + z_3 + z_4$ et $\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + \dfrac{1}{z_3} + \dfrac{1}{z_4}$.

Solution

1. Il suffit de développer le premier membre.
2. Pour $z \neq 1$, $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \dfrac{z^5 - 1}{z - 1}$.

   L'équation (E) équivaut à $z^5 - 1 = 0$ et $z \neq 1$.

   Il en résulte que les solutions de (E) sont les racines $5^{\text{ème}}$ de l'unité autres que 1, à savoir

   $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{5}}$, $z_3 = e^{i\frac{6\pi}{5}}$ et $z_4 = e^{i\frac{8\pi}{5}}$.
3. a. Il découle de la question précédente que $z_2 = z_1^2$, $z_3 = z_1^3$ et $z_4 = z_1^4$.

   b. En remarquant que $z_1 + z_1^2 + z_1^3 + z_1^4 = -1$, on déduit de la question précédente que $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -1$.

Il est facile de vérifier, compte tenu de la question 3.a, que

$$z_1^5\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}+\frac{1}{z_4}\right)=z_1+z_1^2+z_1^3+z_1^4.$$

Les égalités $z_1{}^5=1$ et $z_1+z_1^2+z_1^3+z_1^4=-1$ impliquent que $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}+\frac{1}{z_4}=-1$.

Activité 3

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $\left(\frac{z}{1+i}\right)^2=1$.

En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^2=2i$.

Activité 4

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^3=8i$.

1. Montrer que z est une solution de (E), si et seulement si, $\frac{z}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}$ est une racine cubique de l'unité.
2. En déduire que l'équation (E) possède exactement trois solutions.

   Vérifier que les solutions de (E) sont $z_k=2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$,

   où k est un entier appartenant à $\{0,\ 1,\ 2\}$.

Théorème et définition

Soit a un nombre complexe non nul d'argument θ et n un entier naturel non nul.

L'équation $z^n=a$ admet dans $\mathbb{C}$, n solutions distinctes définies par

$z_k=r\,e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k\in\{0,\ 1,...,\ n-1\}$, où r est le réel strictement positif tel que $r^n=|a|$.

Ces solutions sont appelées les racines nièmes du nombre complexe a.

Démonstration

Posons $a=|a|\ e^{i\theta}$. Considérons le réel $r>0$ tel que $r^n=|a|$.

On peut alors écrire $a=r^n\left(e^{i\frac{\theta}{n}}\right)^n$.

Il en résulte que l'équation $z^n=a$ est équivalente à l'équation $\left(\frac{z}{re^{i\frac{\theta}{n}}}\right)^n=1$.

On en déduit que z est solution de l'équation $z^n = a$, si et seulement si, $\frac{z}{re^{i\frac{\theta}{n}}}$ est une racine nième de l'unité.

Par conséquent, l'équation $z^n = a$ admet n solutions distinctes de la forme

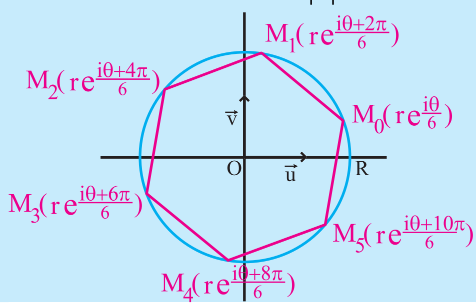
$z_k = re^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, où r est le réel tel que $r^n = |a|$.

Conséquence

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Lorsque $n \geq 3$, les points images des racines nièmes d'un nombre complexe non nul sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon r tel que $r^n = |a|$.

Les points images des solutions de l'équation $z^6 = |a|e^{i\theta}$



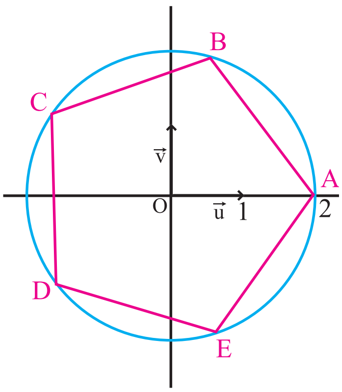
Activité 5

Déterminer les racines carrées, puis les racines quatrièmes du nombre complexe $u = -1 + i\sqrt{3}$.

Activité 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Dans la figure ci-contre ABCDE est un pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 2 et A(2, 0).



1. Donner les affixes des points B, C, D et E.
2. Déterminer dans chacun des cas ci-dessous l'ensemble des points d'affixe z tels que

   a. $\arg(z) \equiv \frac{4\pi}{5}\ [2\pi]$;

   b. $\arg(\bar{z}) \equiv \frac{2\pi}{5}\ [2\pi]$;

   c. $\arg(-2z) \equiv \frac{3\pi}{5}\ [2\pi]$.

Activité 7

Soit le nombre complexe $z = \sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

1. Déterminer le module et un argument de z^2.
2. En déduire l'écriture trigonométrique de z.

IV. Résolution dans $\mathbb{C}$, de l'équation $az^2 + bz + c = 0, \ a \neq 0$

Activité 1 **Recherche des racines carrées d'un nombre complexe par une méthode algébrique**

Soit le nombre complexe $u = 3 - 4i$.
On se propose de déterminer les racines carrées de u.
Remarquons d'abord que la recherche d'un argument du nombre complexe u ne conduit pas à un angle "remarquable".

Déterminons alors, sous forme algébrique, les solutions de l'équation $z^2 = u$.
On pose $z = x + iy$ avec x et y deux nombres réels.

1. Montrer que l'équation $z^2 = u$ équivaut à $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$.
2. Vérifier que les couples (x, y) solutions de ce système sont $(2, -1)$ et $(-2, 1)$.
3. Conclure.

Activité 2

Déterminer, dans chaque cas, les racines carrées de $u = -8 + 6i$ et $u = 1 - 2\sqrt{2}i$.

Activité 3

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E): z^2 + 2iz - \frac{7}{4} - i = 0$.

1. Montrer que $z^2 + 2iz - \frac{7}{4} - i = 0$, si et seulement si, $(z + i)^2 = \frac{3 + 4i}{4}$.
2. Vérifier que $\left(\frac{2 + i}{2}\right)^2 = \frac{3 + 4i}{4}$.
3. En déduire les solutions de l'équation (E).

Activité 4

Soit a, b et c des nombres complexes tels que $a \neq 0$.

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E): az^2 + bz + c = 0$.

1. Montrer que l'équation $az^2 + bz + c = 0$ est équivalente à l'équation

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

2. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

a. Montrer que si $\Delta = 0$, alors l'équation (E) admet une unique solution que l'on déterminera.

b. On suppose que $\Delta \neq 0$.

Dans ce cas, le nombre complexe Δ admet deux racines carrées opposées δ et $-\delta$.

Montrer que l'équation $az^2+bz+c=0$ est équivalente à l'équation

$\left(z+\frac{b-\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b+\delta}{2a}\right)=0$. En déduire les solutions de (E).

Cette activité nous permet d'énoncer le théorème suivant.

Théorème

Soit a, b et c des nombres complexes tels que $a \neq 0$.
L'équation $az^2+bz+c=0$, admet dans $\mathbb{C}$, deux solutions (éventuellement confondues) définies par $z_1=\frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2=\frac{-b-\delta}{2a}$, où δ est une racine carrée du discriminant $\Delta=b^2-4ac$.

Conséquences

Si z_1 et z_2 sont les solutions de $az^2+bz+c=0$, $a \neq 0$, alors
$az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$, $z_1+z_2=\frac{-b}{a}$ et $z_1 z_2=\frac{c}{a}$.

Méthode de résolution, dans $\mathbb{C}$, de l'équation (E) : $az^2+bz+c=0$, $a \neq 0$

- Si $c=0$, (E) s'écrit $z(az+b)=0$ et admet comme solutions $z_1=0$ et $z_2=\frac{-b}{a}$.
- Si $b=0$, (E) s'écrit $z^2=\frac{-c}{a}$ et la résolution de (E) se ramène à la recherche des racines carrées du nombre complexe $\frac{-c}{a}$.
- Si $bc \neq 0$, on détermine une racine carrée δ du discriminant $\Delta=b^2-4ac$.
  Les solutions de (E) sont $z_1=\frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2=\frac{-b-\delta}{2a}$.

Activité 5

Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations ci-dessous.

a. $z^2-(1-i)z+2-2i=0$.

b. $1+z+z^2=0$.

c. $1-z+z^2=0$.

Activité 6

Déterminer les nombres complexes z_1 et z_2 vérifiant $\begin{cases} z_1+z_2=1+2i, \\ z_1 z_2=-1+i. \end{cases}$

V. Exemples d'équations de degré supérieur ou égal à 3

Activité 1

Soit $a_1, a_2, ..., a_n$ des nombres complexes tels que $a_n \neq 0,\ n \geq 2$.

Soit $f : z \mapsto a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0,\ z \in \mathbb{C}$.

Soit (E) l'équation $f(z) = 0$.

1. Montrer que si z_0 est une solution de (E), alors pour tout nombre complexe z, $f(z) = 0$ équivaut à $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z = a_n z_0^n + a_{n-1}z_0^{n-1} + ... + a_1 z_0$.
2. En déduire que si z_0 est une solution de (E), alors (E) est équivalente à l'équation $(z - z_0)g(z) = 0$, où g(z) est de la forme $a_n z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + ... + b_0$, avec $b_0, b_1, ..., b_{n-2}$ complexes.

Théorème

Soit $a_1, a_2, ..., a_n$ des nombres complexes tels que $a_n \neq 0,\ n \geq 2$.

Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$.

Si z_0 est un zéro de P, alors $P(z) = (z - z_0)g(z)$, où g(z) est de la forme $a_n z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + ... + b_0$, avec $b_0, b_1, ..., b_{n-2}$ complexes.

Exercice résolu 6

On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E) : z^3 + (1 - 4i)z^2 - (7 + 3i)z + 6i - 2 = 0$.

1. Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire et la déterminer.
2. Résoudre l'équation (E).

Solution

1. Posons $z_0 = iy$ avec y réel.

z_0 est solution de (E) si, et seulement si, $(iy)^3 + (1 - 4i)(iy)^2 - (7 + 3i)iy + 6i - 2 = 0$.

Il suit que, z_0 est solution de (E) si, et seulement si,

$-y^2 + 3y - 2 + i(-y^3 + 4y^2 - 7y + 6) = 0$.

On en déduit que z_0 est solution de (E), si et seulement si, $\begin{cases} -y^2 + 3y - 2 = 0 & (*), \\ -y^3 + 4y^2 - 7y + 6 = 0 & (**). \end{cases}$

L'équation $(*)$ admet deux solutions réelles qui sont 1 et 2. Seul le réel 2 vérifie l'équation $(**)$. Il en résulte que le réel 2 est l'unique solution du système précédent.

On en déduit que $z_0 = 2i$ est l'unique solution imaginaire pure de (E).

Il suit que $z^3 + (1-4i)z^2 - (7+3i)z + 6i - 2 = (z-2i)\left(z^2 + bz + c\right)$, avec b et c des nombres complexes.
Un développement et une identification terme à terme nous donnent $b = 1-2i$ et $c = -3-i$.
L'équation (E) s'écrit alors $(z-2i)\left(z^2 + (1-2i)z - 3 - i\right) = 0$,

ce qui équivaut à $z = 2i$ ou $z^2 + (1-2i)z - 3 - i = 0$.

Les solutions de l'équation $(E_1): z^2 + (1-2i)z - 3 - i = 0$ sont $z_1 = -2+i$ et $z_2 = 1+i$.

Il en résulte que l'équation (E) a pour ensemble de solutions $S = \{2i,\ -2+i,\ 1+i\}$.

Activité 2

Soit $f(z) = z^3 + (2+2i)z^2 + (2+i)z + 3 + i$, où $z \in \mathbb{C}$.

1. Vérifier que $f(i) = 0$.
2. En déduire les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $f(z) = 0$.

VI. Nombres complexes et trigonométrie

Théorème

Pour tout réel x et pour tout entier n,
$(\cos x + i\sin x)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$. (Formule de Moivre).
Pour tout réel x,
$\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$. (Formules d'Euler).

Les formules de Moivre et d'Euler permettent d'établir un grand nombre de formules trigonométriques.
Elles permettent aussi d'exprimer des puissances de $\cos x$ et $\sin x$ à l'aide de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$.

Activité 1

Soit k un entier. Montrer que pour tout réel x différent de $(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{1 + i\tan x}{1 - i\tan x} = e^{2ix}$.

Activité 2

1. En utilisant la formule de Moivre et la formule du binôme de Newton, montrer que $\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x$ et $\sin 3x = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x$.
2. Exprimer $\cos 4x$ et $\sin 4x$ en fonction de puissances de $\cos x$ et de $\sin x$.

Exercice résolu 7

Linéariser $\sin^5 x,\ x \in \mathbb{R}$.

En transformant une expression contenant une puissance de $\cos x$ ou de $\sin x$ sous une forme qui ne contient aucun produit de fonctions circulaires, on dit qu'on a linéarisé l'expression donnée.

Solution

En utilisant une formule d'Euler, on obtient $\sin^5 x = \frac{1}{(2i)^5}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^5$.

La formule du binôme de Newton, donne

$\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^5 = e^{5ix} - C_5^1\ e^{4ix}e^{-ix} + C_5^2\ e^{3ix}e^{-2ix} - C_5^3\ e^{2ix}e^{-3ix} + C_5^4\ e^{ix}e^{-4ix} - e^{-5ix}$.

On obtient alors, $\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^5 = \left(e^{5ix} - e^{-5ix}\right) - 5\left(e^{3ix} - e^{-3ix}\right) + 10\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$.

Il en résulte que $\sin^5 x = \frac{1}{16}\left(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x\right)$.

Activité 3

Linéariser $\cos^3 x$, $\sin^3 x$, $\sin^3 x.\cos^4 x$ où x est un réel.

QCM

Cocher la réponse exacte.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit les points $M(z)$ et $M'(z')$.

1. a. La distance MM' est égale à

☐ $|z-z'|$. ☐ $||z|-|z'||$. ☐ $|z+z'|$.

b. Si $\arg(z) \equiv \arg(z')\ [2\pi]$ alors

☐ O, M et M′ sont alignés. ☐ $z = z'$. ☐ $|z| = |z'|$.

2. A, B et C sont trois points d'affixes respectives z_A, z_B et z_C tels que $z_B - z_A = 4i(z_C - z_A)$. Alors

☐ ABC est isocèle. ☐ (AB) et (AC) sont perpendiculaires. ☐ (AB) et (AC) sont parallèles.

3. L'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$ a pour solutions

☐ $z_1 = 1-i$ et $z_2 = 1+i$ ☐ $z_1 = 2i$ et $z_2 = -i$ ☐ $z_1 = 1-i$ et $z_2 = 2+i$

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Une équation du second degrés dans $\mathbb{C}$ admet toujours deux racines opposées.
2. Soit z et a deux nombres complexes non nuls.

   $z^4 = a^4$, si et seulement si, $z = a$ ou $z = -a$.
3. Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes non réels.

   Le conjugué du nombre complexe $Z = z_1 + iz_2$ est $\overline{Z} = z_1 - iz_2$.
4. Deux nombres complexes non nuls ayant même argument et même partie réelle sont égaux.
5. Soit z un nombre complexe. Si z^3 est réel alors nécessairement z est réel.
6. Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.

   Si $|z| = |z'|$ alors nécessairement $z = z'$ ou $z = -z'$.

1 Déterminer dans chacun des cas ci-dessous, les nombres complexes z sous forme algébrique.

a. $\frac{z-i}{z+i}=2i.$

b. $\frac{z+i}{2z}=1-i.$

c. $\frac{2z+i}{iz}=\frac{2iz}{1-z}.$

2 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Représenter, dans chacun des cas ci-dessous, les points A, B, S, P, I et J d'affixes respectives

$z_A,\ z_B,\ z_A+z_B\ ,\ z_Az_B,\ \frac{1}{z_A}$ et $\frac{1}{z_B}$.

a. $|z_A|=3,\ \arg(z_A)\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi],$

$|z_B|=1$ et $\arg(z_B)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi].$

b. $|z_A|=2,\ \arg(z_A)\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi],$

$|z_B|=4$ et $\arg(z_B)\equiv\pi\ [2\pi].$

3 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit $z\neq -i$ et M le point d'affixe z.

On considère le nombre complexe $Z=\frac{z-i}{z+i}$.

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que Z soit réel.
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que Z soit imaginaire.

4 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit z un nombre complexe non nul et M le point d'affixe z.

On considère le nombre complexe $Z=\frac{z+1}{z}$.

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que Z soit réel.
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que Z soit imaginaire.

5 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit z un nombre complexe.

1. Déterminer et construire l'ensemble

$E=\left\{M(z)\in P \text{ tel que } \left|\frac{z-1}{z-i}\right|=1\right\}.$

2. En déduire l'ensemble

$F=\left\{M(z)\in P \text{ tel que } \left|\frac{2\bar{z}-2}{z-i}\right|=2\right\}.$

6 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\arg(z)-\arg(z-1)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi], z\in\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$.

7 Donner l'écriture algébrique des nombres complexes $2e^{\frac{3i\pi}{2}}$, $-e^{\frac{3i\pi}{4}}$ et $3e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

8 Donner l'écriture exponentielle des nombres complexes

a. $\left(3e^{-\frac{i\pi}{5}}\right)^3$, $\frac{2e^{\frac{i\pi}{5}}}{3e^{i\pi}}$, $\left(e^{\frac{3i\pi}{8}}\right)^4$ $\left(e^{-i\pi}\right)^3$.

b. $-3+3i$, $2\sqrt{3}-2i$, $(1-i)^5$, $\frac{1-i+\sqrt{2}}{1+i+\sqrt{2}}$.

9 Soit le nombre complexe

$a=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.$

1. Donner l'écriture exponentielle de a^2.
En déduire l'écriture exponentielle de a.
2. Donner les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.
3. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

a. Construire les points A et B d'affixes respectives a et ia^2.

b. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixes z tels que $\arg\left(\frac{iz+a^2}{z-a}\right)=-\frac{11\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

Vérifier que O appartient à E. Tracer E.

10 On considère les nombres complexes

$z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_3 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Donner l'écriture exponentielle de

iz_1, $\frac{z_2}{1+i}$, z_1z_2, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1z_2z_3$, ${z_3}^4$, $\frac{{z_2}^3}{{z_1}^6}$ et $\frac{\overline{z_2}}{z_3}$.

11 Déterminer les racines cubiques de $4\sqrt{2}(i+1)$.

12 Déterminer les racines quatrièmes de $8\sqrt{2}(-1-i)$.

13 Déterminer les racines cinquièmes de $32\,i$.

14 Déterminer les racines sixièmes de $32(i-\sqrt{3})$.

15 Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations ci-dessous.

a. $z^2+18z+1681=0$.

b. $z^2-(5-i)z+8-i=0$.

c. $z^2+4(i-1)z+2(4-i)=0$.

d. $z^2+(1-3i)z-2(1+i)=0$.

16 Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations ci-dessous.

a. $z^4+6z^2+25=0$.

b. $z^4+4z^2-77=0$.

17 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$(E): z^3-8z^2+24z-32=0$.

Vérifier que $z_0=4$ est une solution de (E).

2. Résoudre (E).

On notera z_1 la solution de (E) ayant une partie imaginaire positive et z_2 sa solution ayant une partie imaginaire négative.

Déterminer la forme exponentielle de z_1 et z_2.

18 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$(E): z^3-(3+4i)z^2-4(1-3i)z+12=0$.

1. Montrer que l'équation admet une racine réelle que l'on déterminera.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

19 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$(E): z^3=2+11\,i$.

1. Vérifier que $z_0=2+i$ est une solution de (E).
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

20 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z\overline{z}+3(z-\overline{z})=13+18i$, on notera z_1 et z_2 les solutions avec $\mathrm{Re}(z_1)<0$.
2. Représenter les points A et B d'affixes respectives z_1 et z_2.
3. Déterminer l'affixe du point G centre de gravité du triangle OAB.
4. Déterminer l'affixe du point C pour que OABC soit un parallélogramme.

21 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4=0$.

a. Montrer que l'équation (E) admet une racine réelle que l'on déterminera.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2. a. Représenter les points A, B et C d'affixes respectives 1, $2+2i$ et $1-i$.

b. Déterminer le module et un argument de $\frac{2+2i}{1-i}$.

En déduire la nature du triangle OBC.

c. Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ?

d. Soit D le point tel que CD = CO et $\widehat{(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CD})} \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

Quelle est la nature de OCDB ?

22 1. Déterminer les racines quatrièmes de l'unité.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)+1=0$.

23 Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation
$1+z+z^2+...+z^6=0$.
Calculer $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$.

24 1. Montrer que pour tout entier $n>0$ et tout nombre complexe z,
$1-z^{n+1}=(1-z)\left(1+z+z^2+...+z^n\right)$.
2. Montrer que pour tout réel θ,
$1-e^{i\theta}=-2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$.
3. Soit un entier $n\geq 1$ et un réel
$\theta\neq 2k\pi,\ k$ un entier relatif.
On pose $S=1+\cos\theta+\cos 2\theta+...+\cos n\theta$
et $S'=\sin\theta+\sin 2\theta+...+\sin n\theta$.
a. Montrer que $S+iS'=\frac{1-e^{i\theta(n+1)}}{1-e^{i\theta}}$.
b. En déduire que $S=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\cos n\frac{\theta}{2}$

et $S'=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin n\frac{\theta}{2}$.

25 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
On considère l'application f du plan dans lui même, qui à tout point d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=z^2-4z$. On désigne par A et B les points d'affixes respectives $1-i$ et $3+i$.
1. a. Calculer les affixes des points A' et B' images des points A et B par f.
b. On suppose que deux points ont la même image par f. Montrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.
2. Soit I le point d'affixe -3.
a. Montrer que $OMIM'$ est un parallélogramme, si et seulement si, $z^2-3z+3=0$.
b. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2-3z+3=0$.
3. a. Exprimer $(z'+4)$ en fonction de $(z-2)$.
En déduire une relation entre $|z'+4|$ et $|z-2|$ puis entre $\arg(z'+4)$ et $\arg(z-2)$.
b. On considère les points J et K d'affixes respectives 2 et -4.
Montrer que l'image de tout point M du cercle de centre J et de rayon 2 appartient à un même cercle que l'on déterminera.
c. Soit E le point d'affixe $z_E=-4-3i$.
Donner la forme trigonométrique de z_E+4 et montrer qu'il existe deux points dont l'image par f est le point E.
Préciser l'écriture algébrique de l'affixe de ces deux points.

26 Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives 2i, -1 et i.
On considère l'application f de $P\setminus\{A\}$ dans P qui, à tout point M de $P\setminus\{A\}$ d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=\frac{z+1}{z-2i}$.
1. a. On désigne par C', l'image de C par l'application f.
Quelle est la nature du quadrilatère $ACBC'$?
b. Montrer que le point C admet un unique antécédent par l'application f que l'on notera C''. Quelle est la nature du triangle BCC'' ?
2. Donner une interprétation géométrique du module et d'un argument de z'.
3. a. Déterminer l'ensemble E des points M tels que z' soit un réel strictement négatif.
b. Déterminer l'ensemble F des points M tels que z' soit un nombre imaginaire non nul.
c. Déterminer l'ensemble G des points M tels que M' appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

27 Soit le nombre complexe $z = e^{i\theta} - i$ avec $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. On désigne par M et M' les points images respectives de z et $\bar{z}$ dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Déterminer l'affixe du point N pour que $OMNM'$ soit un losange.

2. a. Montrer que $z = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$.
b. Mettre $\frac{z}{\bar{z}}$ sous la forme exponentielle.
c. En déduire la valeur de θ pour que $OMNM'$ soit un carré.
d. Construire le carré $OMNM'$ pour la valeur de θ trouvée.

28 Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit A le point d'affixe 1.
On considère l'application f de $P \setminus \{A\}$ dans P qui, à tout point M de $P \setminus \{A\}$ d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{\bar{z} + 3}{\bar{z} - 1}$.

1. Soit B le point d'affixe $1 - i$.
a. Déterminer l'affixe du point B' image de B par f.
b. Placer les points B et B' dans le plan P.

2. Soit C le point d'affixe $1 + 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.
a. Calculer AC.
b. Déterminer $\widehat{\left(\vec{u}, \overrightarrow{AC}\right)}$.
c. En déduire la construction du point C.
d. Montrer que $f(C) = C$.

3. a. Calculer $(\bar{z} - 1)(z' - 1)$.
b. En déduire que $AM.AM' = 4$.
c. Déterminer l'image par f du cercle de centre A et de rayon 2.

29 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit $a = \frac{\sqrt{3} + 1}{4} + i\frac{\sqrt{3} - 1}{4}$.
On désigne par A_0 le point d'affixe $z_0 = 6 + 6i$ et pour tout entier naturel n, on désigne par A_n le point d'affixe $z_n = a^n z_0$.

1. Ecrire z_1 et a^2 sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
2. Exprimer z_3 et z_7 à l'aide de z_1 et a^2.
3. En déduire l'écriture exponentielle de z_3 et z_7.
4. Placer les points A_0, A_1, A_3 et A_7.

30 Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère la transformation f du plan qui à tout point M d'affixe z non nulle associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{\bar{z}}$.

1. Déterminer l'ensemble des points fixes de f.
2. Démontrer que pour tout point M distinct de O, les points O, M et M' sont alignés et que $OM \,.\, OM' = 1$.
3. a. Montrer que les points A, B et C d'affixes respectives 4, $2 + 2i$, $2 - 2i$ appartiennent au cercle $\mathscr{C}$ de centre le point I d'affixe 2 et de rayon 2.
b. Calculer les affixes des points A', B' et C' images par f des points A, B et C.
Montrer que les points A', B' et C' appartiennent à une même droite dont on donnera une équation.
4. a. Montrer pour tout nombre complexe non nul z, $|z - 2| = 2$, si et seulement si, $\left|\frac{1}{2} - z'\right| = |z'|$.
b. En déduire l'image par f du cercle $\mathscr{C}$.

31 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On désigne par A, le point d'affixe $z_A = 1$, et par $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon 1.

I. Soit F le point d'affixe 2, B le point d'affixe $z_B = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$ et E le point d'affixe $\left(1 + z_B^2\right)$.

1.a. Montrer que le point B appartient à $\mathscr{C}$.
b. Déterminer une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}\right)$. Placer le point B.
2. a. Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes $(z_B - z_A)$ et $(z_E - z_A)$.
b. En déduire que les points A, B et E sont alignés.
3. Placer le point E.

II. Pour tout nombre complexe z différent de 1, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z' où $z' = 1 + z^2$.

1. Pour tout $z \neq 0$ et $z \neq 1$, donner à l'aide des points A, M et M', une interprétation géométrique d'un argument du nombre complexe $\dfrac{z'-1}{z-1}$.

2. En déduire que A, M et M' sont alignés, si et seulement si, $\dfrac{z^2}{z-1}$ est un réel.

32 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère la suite (α_n) de nombres réels définie par $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et pour tout entier naturel n,

$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \dfrac{5\pi}{6}$.

On désigne par M_n le point du cercle de centre O et de rayon 1 tel que $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM_n}}\right) \equiv \alpha_n \ [2\pi]$.

1. Placer les points M_n, pour $0 \leq n \leq 8$.
2. On note z_n l'affixe de M_n. Ecrire z_n sous forme exponentielle.
3. Montrer que pour tout entier n, les points M_n et M_{n+6} sont diamétralement opposés.
4. Montrer que pour tout entier n, les points M_n et M_{n+12} sont confondus.
5. Montrer que pour tout entier n, $z_{n+4} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} z_n$.

En déduire que pour tout entier n, le triangle $M_n M_{n+4} M_{n+8}$ est équilatéral.

33 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^4 = -1$.

2. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$.

Montrer que

$\dfrac{z+i}{z-i} = e^{i\theta}$ équivaut à $z = \dfrac{1}{\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$.

3. En déduire les solutions de l'équation $(z+i)^4 = -(z-i)^4$.

34 Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit A le point d'affixe $-i$.

On considère l'application f de $P \setminus \{A\}$ dans P qui, à tout point M de $P \setminus \{A\}$ d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{i\bar{z}}{i - \bar{z}}$.

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

2. a. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, $(z'+i)(\bar{z}-i) = 1$.

b. En déduire que $AM'.AM = 1$ et que $M' \in [AM)$.

3. a. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$,

Montrer que l'affixe de $f(M)$ est égale à $e^{i\theta}$, si et seulement si, $z = -\dfrac{1}{2}\left(\tan\left(\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) + i\right)$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$.

c. En déduire les solutions de l'équation $iz^3 = (-i - z)^3$.

35 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit a un réel et l'équation

$(E) : z^2 + a(1-i)z - ia^2 = 0$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).

On notera z_1 la solution réelle et z_2 l'autre solution.

2. On désigne par A et B les points d'affixes respectives $2 + z_1$ et z_2.

Soit le carré de sens direct ACBD.

a. Montrer que le point C est fixe.

b. Déterminer et construire l'ensemble des points D lorsque a varie dans $\mathbb{R}$.

36 1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 - 2\sqrt{3}\,Z + 4 = 0$.

b. Ecrire les solutions trouvées sous forme exponentielle.

2. On pose $U = \frac{1}{2}\left[(1-i)+\sqrt{3}(1+i)\right]$.

a. Calculer U^2.
b. Déterminer la forme trigonométrique de U.
c. En déduire alors les valeurs de

$\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

3. Pour tout $Z \in \mathbb{C}$, on pose
$P(Z) = Z^3 - 2(\sqrt{3}+i)Z^2 + 4(1+i\sqrt{3})Z - 8i$.
a. Montrer que l'équation $P(Z)=0$ admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.
b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z)=0$.
4. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on donne les points
$A(\sqrt{3}-i)$, $B(\sqrt{3}+i)$ et $C(2i)$.
a. Représenter les points A, B et C.
b. Montrer que le quadrilatère OABC est un losange.

37 Soit un réel α de $[0, \frac{\pi}{2}]$.

I. 1. Exprimer à l'aide de α,
$\left(e^{i2\alpha}+2e^{i\alpha}\right)^2 - \left(e^{i2\alpha}-2e^{i\alpha}\right)^2$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$z^2 - \left(e^{i2\alpha}+2e^{i\alpha}\right)z + 2e^{i3\alpha} = 0$.
II. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
On désigne par A, B, A′ et B′ les points d'affixes respectives $z_A = e^{i2\alpha}$, $z_B = 2e^{i\alpha}$,
$z_{A'} = iZ_A$ et $z_{B'} = -iZ_B$.
1. a. Mettre $z_{A'}$ et $z_{B'}$ sous la forme exponentielle.
b. Placer les points A, B, A' et B' pour $\alpha = \frac{\pi}{6}$.
2. Soit I le milieu du segment $[A'B']$.
a. Montrer que $\frac{z_I}{z_B - z_A} = -\frac{1}{2}i$.
b. En déduire que la médiane issue de O du triangle OA′B′ est une hauteur issue de O du triangle OAB et que $OI = \frac{1}{2}AB$.

38 I.1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$z^2 - 2e^{i\alpha}z + 2e^{2i\alpha} = 0$, α un réel de $[0,\pi]$.
2. Mettre les solutions sous la forme exponentielle.
II. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
On désigne par A et B les points d'affixes respectives $z_1 = (1-i)e^{i\alpha}$ et $z_2 = (1+i)e^{i\alpha}$.
1. a. Montrer que $\frac{z_2}{z_1} = i$.
b. En déduire que OAB est un triangle rectangle et isocèle en O.
2. a. Montrer que $\widehat{(\vec{u},\overrightarrow{AB})} \equiv \alpha + \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
b. Déterminer α pour que la droite (AB) soit parallèle à la droite d'équation $y = x$.
c. Construire A et B pour la valeur de α trouvée.

39 Soit un réel θ de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et l'équation
$(E): iz^2 + 6\sin\theta\, z - 9i = 0$.
1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
b. Ecrire sous la forme exponentielle les solutions de l'équation (E).
2. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
On désigne par A, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $3i$, $z_1 = 3(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z_2 = 3(-\cos\theta + i\sin\theta)$.
a. Vérifier que les points A, M_1 et M_2 sont sur un même cercle que l'on précisera.
b. Déterminer la valeur de θ pour laquelle le quadrilatère OM_1AM_2 soit un losange.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $iz^4 + 3\sqrt{3}z^2 - 9i = 0$.
Placer les points images des solutions.