

Intégrales

La parabole considérée par Thabit Ibn Qurra est définie par une propriété que nous traduisons aujourd'hui par l'équation $y^2=px$ et la quadrature de la parabole

est équivalente à notre calcul de l'intégrale $\int_0^a \sqrt{px} \, dx$.

Mais le calcul immédiat d'une telle intégrale, [...], aurait exigé la sommation de [...] $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}$.

Ibn Qurra étudia cette difficulté en recourant à un artifice astucieux. [...].

(AP. Youschkevitch,
Les mathématiques arabes, 1976).



Thabit Ibn Qurra est un
mathématicien arabe qui
vécut au Xe siècle

I. Définition

I.1 Intégrale d'une fonction continue et positive

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x < -2, \\ 1 & \text{si } -2 \leq x \leq 1, \\ 3x - 2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Le plan étant muni d'un repère orthogonal. (O, \vec{i}, \vec{j}) , l'unité d'aire, notée par u.a est l'aire du rectangle de dimensions $\|\vec{i}\|$ et $\|\vec{j}\|$.

1. Tracer la courbe représentative de g .
2. Hachurer la partie \mathcal{P} du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe de g et les droites d'équations $x = -3$ et $x = 3.5$.
3. Calculer l'aire de \mathcal{P} .

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit f la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

On désigne par \mathcal{A} l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe C_f de f et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$.

1. Représenter la courbe C_f .
2. Calculer \mathcal{A} .

Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.

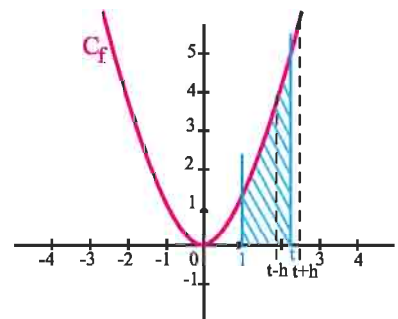
On a tracé ci-contre la courbe C_f de f .

Soit $t \in [1, +\infty[$ et $\mathcal{A}(t)$ l'aire de la partie limitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = t$.

On se propose de déterminer $\mathcal{A}(t)$ pour tout $t \in [1, +\infty[$.

On désigne par \mathcal{A} la fonction $t \mapsto \mathcal{A}(t)$.

1. Que vaut $\mathcal{A}(1)$?
2. Soit $h > 0$.
 - a. Montrer que $hf(t) \leq \mathcal{A}(t+h) - \mathcal{A}(t) \leq hf(t+h)$.



- b. En déduire que la fonction \mathcal{A} est dérivable à droite en t et que $\mathcal{A}'_d(t) = f(t)$.
3. Soit $t \in]1, +\infty[$ et $1 < t-h < t$.
- Montrer que $hf(t-h) \leq \mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(t-h) \leq hf(t)$.
 - En déduire que la fonction \mathcal{A} est dérivable à gauche en t et que $\mathcal{A}'_g(t) = f(t)$.
4. a. Montrer que $\mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(1) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}$, $t \geq 1$.
- b. Quelle est l'aire de la partie limitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$?
5. Soit F une primitive de f sur $[1, +\infty[$. Montrer que $F(t) - F(1) = \mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(1)$, $t \geq 1$.

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Si F et G sont deux primitives de f sur I alors pour tous a et b de I , $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

Démonstration

Les fonctions F et G étant des primitives de f sur I , la fonction $F - G$ est constante sur I . On en déduit que pour tous réels a et b de I , $F(b) - G(b) = F(a) - G(a)$. La propriété en découle.

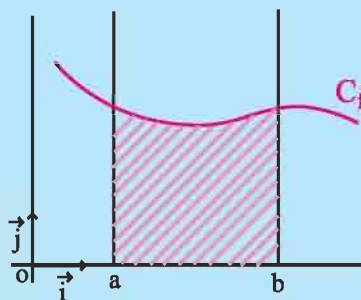
Définition

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ et F une primitive de f sur $[a, b]$.

L'aire (en u.a.) de la partie du plan limitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est le réel $F(b) - F(a)$.

Le réel $F(b) - F(a)$ est appelé intégrale de f de a à b et est noté $\int_a^b f(x) dx$.



Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 - x$.

- Représenter la partie \mathcal{P} du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.
- Calculer l'aire de \mathcal{P} .

I.2 Intégrale d'une fonction continue

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux réels de I et F une primitive de f sur I .

On appelle intégrale de f entre a et b le réel, noté $\int_a^b f(x) dx$, défini

$$\text{par } \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Vocabulaire et notations

- Le réel $\int_a^b f(x) dx$ est appelé intégrale de f sur $[a, b]$, ou encore de a à b , ou encore entre a et b .
- Dans l'écriture $\int_a^b f(x) dx$, on peut remplacer la lettre x par n'importe quelle lettre et on peut écrire $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(t) dt$. On dit que x est une variable muette.
- Pour toute primitive F de f , on écrit $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

L'expression $[F(x)]_a^b$ se lit « $F(x)$ pris entre a et b ».

Activité 1

Calculer $\int_{\frac{1}{2}}^1 (x^4 - 1) dx$, $\int_0^1 \sin(\pi x) dx$, $\int_{-1}^1 \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} dx$.

Activité 2

1. Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

2. Calculer l'aire de la partie limitée par la courbe de $-f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.
3. En déduire que l'aire de la partie limitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$ est égale à $\int_1^2 -f(x) dx$.

II. Propriétés algébriques de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a , b et c des réels de I . Alors

$$\int_a^a f(x) dx = 0 ; \quad \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx .$$

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad (\text{Relation de Chasles}).$$

Démonstration

Soit F une primitive de f sur I .

$$\int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0 .$$

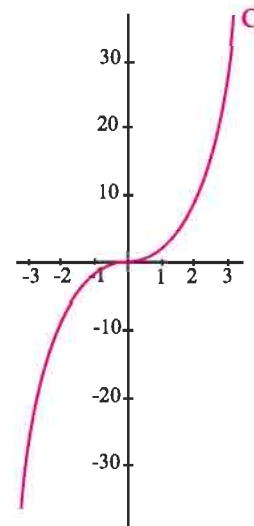
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x) dx .$$

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx .$$

Activité 1

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on a tracé la courbe C de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$.

1. Tracer la courbe C' représentative de $|f|$.
2. a. Représenter la partie P' du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe C' et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 3$.
b. Calculer l'aire de P' .
3. En déduire l'aire la partie P du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 3$.



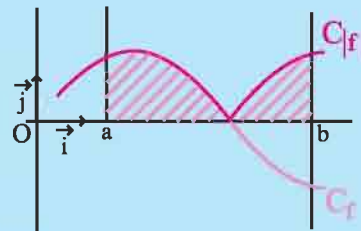
Définition

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

L'aire (en u.a.) de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe de f , les droites d'équations

$x = a$ et $x = b$ est le réel $\int_a^b |f(x)| dx$.



Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Calculer, dans chacun des cas ci-dessous, l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe de f , les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

1. $f : x \mapsto \sin(2x)$, $a = -\frac{\pi}{3}$ et $b = \frac{\pi}{4}$.

2. $f : x \mapsto \frac{x}{(x^2 + 1)^4}$, $a = -2$ et $b = 1$.

Théorème (linéarité)

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$.

$$\text{Pour tous réels } \alpha \text{ et } \beta, \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

Démonstration

Soit F et G deux primitives respectives de f et g sur $[a, b]$. Alors pour tous réels α et β , $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$ sur $[a, b]$. On peut écrire

$$\begin{aligned} \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx &= (\alpha F(b) + \beta G(b)) - (\alpha F(a) + \beta G(a)) \\ &= \alpha(F(b) - F(a)) + \beta(G(b) - G(a)) \\ &= \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

Activité 3

Calculer $\int_1^2 \frac{x^2}{(x+1)^2} dx + \int_1^2 \frac{2x+1}{(x+1)^2} dx$.

Activité 4

Soit les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{2} dx$

1. Calculer $I + 2J$ et $2J - I$.
2. En déduire les valeurs de I et J .

III. Intégrales et inégalités**Théorème (positivité)**

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Si f est positive sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Démonstration

Toute primitive sur $[a, b]$ d'une fonction positive est croissante sur $[a, b]$.

Le théorème en découle.

Corollaire

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ où $a < b$. Si f est positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de réels de $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x) dx > 0$.

Démonstration

Toute primitive sur $[a, b]$ d'une fonction positive qui ne s'annule qu'en un nombre fini de réels de $[a, b]$ est strictement croissante sur $[a, b]$. Le corollaire en découle.

Activité 1

1. Montrer que $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} > \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx$.

2. Montrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x+x^2+x^3+x^4) dx < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x}$.

Corollaire (comparaison)

Soit f, g et h trois fonctions continues sur $[a, b]$.

Si $h \leq f \leq g$, alors $\int_a^b h(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Démonstration

La fonction $f - h$ étant positive sur $[a, b]$, il résulte de la positivité de l'intégrale que

$$\int_a^b (f(x) - h(x)) dx \geq 0, \text{ ou encore que } \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b h(x) dx.$$

On montre de même que $\int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx$.

Corollaire

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, alors $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

Démonstration

La propriété découle du corollaire précédent et de la double inégalité $-|f| \leq f \leq |f|$.

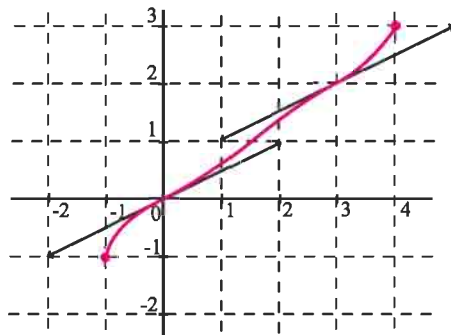
Activité 2

On a représenté une fonction f dérivable sur $[-1, 4]$, ainsi que les tangentes aux points d'abscisses 0 et 3.

1. Vérifier graphiquement que pour tout réel

$$x \text{ de } [0, 3], \quad \frac{x}{2} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{2}.$$

2. En déduire que $\frac{9}{4} \leq \int_0^3 f(x) dx \leq \frac{15}{4}$.



Activité 3

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2} dx$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que pour tout x de $[0, 1]$, $0 \leq \frac{x^{n+1}}{1+x^2} \leq x^{n+1}$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+2}$.

3. a. Donner une valeur approchée de u_{100} et préciser l'erreur commise.

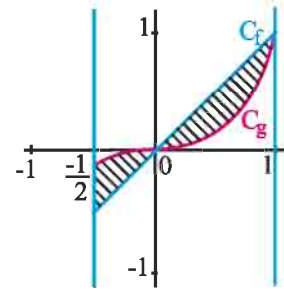
b. Donner une valeur approchée de u_{10000} et préciser l'erreur commise.

Activité 4

On a tracé ci-contre les courbes des fonctions

f et g définies sur $[-\frac{1}{2}, 1]$ par $f(x) = x$ et $g(x) = x^3$.

On se propose de calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 1$.



1. a. Calculer l'aire de la partie limitée par la courbe C_f ,

l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

b. Calculer l'aire de la partie limitée par la courbe C_g , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

c. En déduire l'aire de la partie limitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

2. Calculer l'aire de la partie limitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations

$$x = -\frac{1}{2} \text{ et } x = 0.$$

3. Conclure.

Définition

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$.

L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe de f , la courbe de g et les

droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le réel $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

Activité 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit f et g les fonctions définies sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \cos x$.

1. Représenter les courbes C_f et C_g de f et g sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Etudier le signe de $f - g$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
3. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations, $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

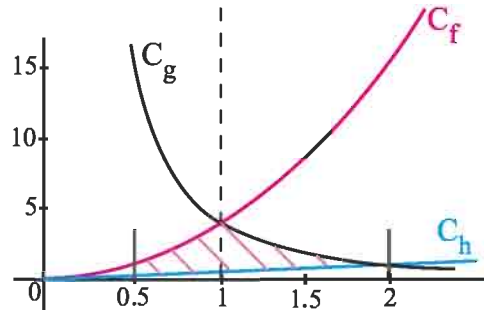
Activité 6

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on a représenté les courbes C_f et C_h des fonctions

f et h définies sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = 4x^2$

et $h(x) = \frac{x}{2}$ et la courbe C_g de la fonction g

définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \frac{4}{x^2}$.



On se propose de calculer l'aire de la partie \mathcal{D} limitée par ces trois courbes et les droites d'équations $x = 0.5$ et $x = 2$.

1. Résoudre les équations $f(x) = g(x)$ et $g(x) = h(x)$.
2. Calculer l'aire de la partie limitée par les courbes C_f et C_h et les droites d'équations $x = 0.5$ et $x = 1$.
3. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_g et C_h et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.
4. En déduire l'aire de \mathcal{D} .

IV. Calculs d'intégrales

IV. 1 Calcul au moyen d'une primitive

Activité 1

Calculer les intégrales suivantes.

$$\int_0^3 (5x^4 - x^3 - 2) dx ; \int_{-2}^{-1} \frac{1}{t^2} dt ; \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx ; \int_{-1}^2 (3x^2 + 1)(x^3 + x - 2) dx ;$$

$$\int_0^1 \frac{-2u}{(u^2 + 2)^3} du ; \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t}{\sin^3 t} dt, \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + 1}} dx .$$

Activité 2

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$, $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \tan^2 x}{\tan^4 x} dx$.

IV. 2 Intégration par parties

Théorème d'intégration par parties

Soit f et g deux fonctions dérivables sur $[a, b]$ et telles que leurs dérivées f' et g' sont continues sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt.$$

Démonstration

On sait que $(fg)' = f'g + g'f$. La continuité des fonctions f' et g' sur $[a, b]$ nous permet

d'écrire que $\int_a^b (fg)'(x)dx = \int_a^b (f'(x)g(x) + g'(x)f(x))dx = [f(x)g(x)]_a^b$.

Le théorème en résulte.

Activité

Calculer les intégrales suivantes.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx ; \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx ; \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx.$$

IV. 3 Calcul approché d'intégrales (Méthode des rectangles)

Activité

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on a tracé la courbe \mathcal{C} de la fonction

$$f \text{ définie sur }]0, +\infty[\text{ par } f(x) = \frac{1}{x}.$$

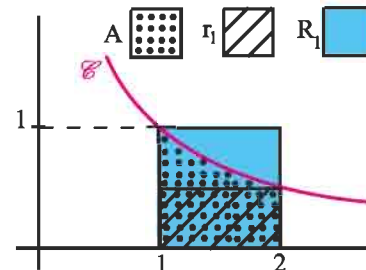
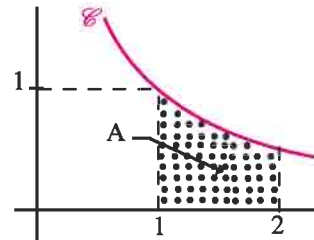
On désigne par A l'aire (en u.a) de la partie limitée par l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C} et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

1. Vérifier que $A = \int_1^2 \frac{dx}{x}$.

On se propose de donner des encadrements de A .

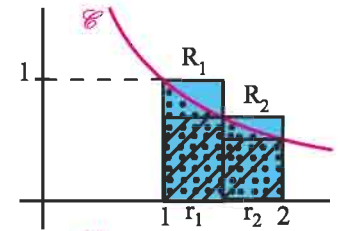
2. On trace les rectangles r_1 et R_1 comme l'indique le schéma ci-contre.

Vérifier que $\frac{1}{2} \leq A \leq 1$.



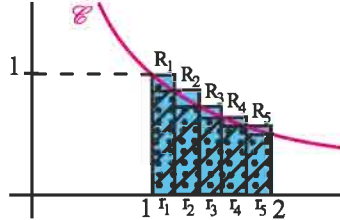
3. On partage l'intervalle $[1,2]$ en deux intervalles de longueur 0.5.

On trace les rectangles r_1, r_2 et R_1, R_2 Comme l'indique la figure ci-contre. Vérifier que $\frac{7}{12} \leq A \leq \frac{5}{6}$.



4. On partage l'intervalle $[1,2]$ en 5 intervalles, de longueur $\frac{1}{5}$.

On trace les rectangles r_i et les rectangles $R_i, 1 \leq i \leq 5$ comme l'indique la figure ci-contre. Donner un nouvel encadrement de A.



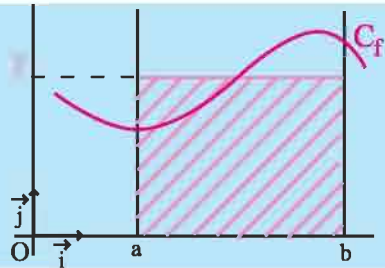
IV. 4 Valeur moyenne et inégalité de la moyenne

Définition

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ ($a < b$). On appelle valeur moyenne de f sur $[a, b]$ le réel, noté \bar{f} , défini par $\bar{f} = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx$.

Interprétation géométrique de la valeur moyenne

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$.
L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe de f , les droites d'équations, $x = a, x = b$ et $y = 0$ est égale à celle du rectangle de côtés $(b-a)$ et \bar{f} .



Activité 1

Soit la fonction définie sur $[0,2]$, par $f(x) = 3x - 1$.

Calculer la valeur moyenne de f sur $[0,2]$, puis la comparer à $f(1)$.

Activité 2

Calculer la valeur moyenne de la fonction f définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, par $f(x) = \cos x$.

Activité 3

1. Tracer dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) la parabole P d'équation $y = -x^2 + 2x$.

On notera A le point d'intersection de P avec l'axe des abscisses, distinct de O .

2. Déterminer la largeur du rectangle dont un côté est $[OA]$ et dont l'aire est la même que celle de la partie D limitée par P et l'axe des abscisses.

Théorème (Inégalité de la moyenne)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ ($a < b$). Soit m et M deux réels.

Si pour tout x de $[a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors $m \leq \bar{f} \leq M$.

Démonstration

L'hypothèse $m \leq f(x) \leq M$, pour tout x de $[a, b]$ implique que

$$\int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx.$$

Le théorème découle alors des égalités $\int_a^b m \, dx = m(b-a)$ et $\int_a^b M \, dx = M(b-a)$,

sachant que $b-a > 0$.

Corollaire

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ ($a < b$). Il existe $c \in [a, b]$, tel que $\bar{f} = f(c)$.

Démonstration

La fonction f étant continue sur $[a, b]$, on en déduit qu'il existe deux réels m et M tels que

$f([a, b]) = [m, M]$. Le corollaire en découle, sachant que $m \leq \bar{f} \leq M$.

Activité 4

Montrer les inégalités ci-dessous

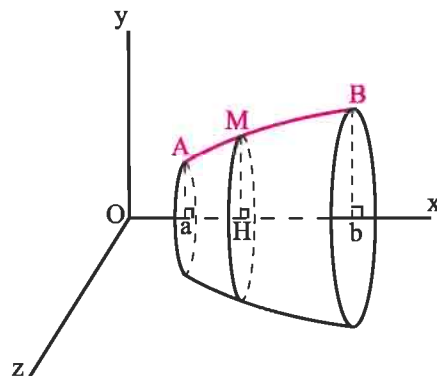
$$0.5 \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx \leq 1, \quad \frac{1}{2} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \leq \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

V. Calcul de volumes de solides de révolution

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère dans le plan (Oxy) , un arc \widehat{AB} d'une courbe d'équation $y = f(x)$ et dont les extrémités A et B ont pour coordonnées dans ce plan $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.

La rotation de l'arc \widehat{AB} autour de l'axe (Ox) engendre une surface appelée surface de révolution (S) . (voir figure ci-contre).



En particulier chaque point $M(x, f(x))$ de l'arc \widehat{AB} décrit un cercle d'axe (Ox) , de centre H le projeté orthogonal de M sur (Ox) et de rayon $HM = |f(x)|$.

La partie de l'espace limitée par la surface (S) et les plans d'équations $x = a$ et $x = b$ est appelée solide de révolution de surface (S) .

La section du solide par le plan passant par M et perpendiculaire à l'axe (O, \vec{i}) est le disque de centre H et de rayon HM .

L'aire de ce disque est $S(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x)$.

Nous donnons ci-dessous la formule donnant le volume du solide de révolution engendré par la rotation d'un arc de courbe autour de l'axe (O, \vec{i}) .

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
 Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. Le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc $\widehat{AB} = \{M(x, y) \text{ tels que } y = f(x) \text{ et } a \leq x \leq b\}$ autour de l'axe (O, \vec{i}) est le réel $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Activité 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit R un réel strictement positif.

On considère dans le plan (Oxy) , le demi-cercle \widehat{AB} d'équation $y = f(x)$ et dont les extrémités A et B ont pour coordonnées dans ce plan

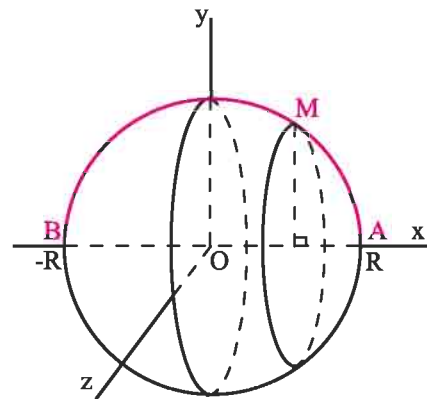
$$A \begin{cases} x = R \\ y = 0 \end{cases}, \quad B \begin{cases} x = -R \\ y = 0 \end{cases}.$$

La rotation de l'arc \widehat{AB} au tour de l'axe (Ox) engendre une sphère de rayon R et de centre O .

Si $M(x, f(x))$ est un point de l'arc \widehat{AB} , alors M décrit un cercle de rayon $|f(x)|$.

Déterminer $f(x)$.

Retrouver alors le volume de la sphère de centre O et de rayon R .

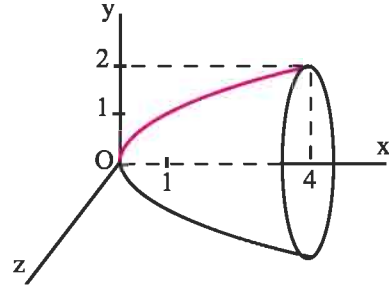


Activité 2

Le solide de révolution S est obtenu en faisant tourner la portion de la parabole d'équation $y = \sqrt{x}$, ($0 \leq x \leq 4$) au tour de son axe (Ox)

(voir figure).

Déterminer le volume du solide S .



VI. Fonctions définies par une intégrale

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel de I . Alors la fonction F

définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f qui s'annule en a .

Démonstration

Pour toute primitive G de f sur I et pour tout x de I , $\int_a^x f(t) dt = G(x) - G(a)$.

On en déduit que la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur I et $F' = f$.

Le théorème en découle sachant que $F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$.

Conséquence

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel de I . Alors la fonction

$F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur I et $F'(x) = f(x)$, pour tout x de I .

Activité 1

Justifier, dans chacun des cas, la dérivabilité de la fonction F sur I et calculer sa fonction dérivée.

$$1. F(x) = \int_1^x \sqrt{1-t^2} dt, I = [-1, 1].$$

$$3. F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt, I =]0, +\infty[.$$

$$2. F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt, I = \mathbb{R}.$$

$$4. F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, I =]-1, 1[.$$

Exercice résolu 1

Soit F la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$.

1. a. Montrer que F est croissante sur $[1, +\infty[$.
- b. Montrer que F est majorée par 2.
- c. En déduire que F admet une limite finie L au voisinage de $+\infty$.

2. Soit G la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $G(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$.

Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $G(x) = F(x) + \frac{1 - \cos x}{x} + \cos 1 - 1$.

En déduire que G possède une limite finie en $+\infty$.

Solution

Sur $[1, +\infty[$, la fonction F est la primitive qui s'annule en 1 de la fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$.

De plus, la fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$ est positive sur $[1, +\infty[$ car $0 \leq \cos t \leq 1$.

On en déduit que pour tout $x \geq 1$, $F'(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ et par suite F est croissante sur $[1, +\infty[$.

b. Pour tout $t \geq 1$, $\left| \frac{1 - \cos t}{t^2} \right| \leq \frac{2}{t^2}$. Il en résulte que $\left| \int_1^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt \right| \leq 2 \int_1^x \frac{1}{t^2} dt$, $x \geq 1$.

Le résultat découle alors de l'égalité $2 \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = 2 \left[-\frac{1}{t} \right]_1^x = 2 - \frac{2}{x} \leq 2$.

c. La fonction F est croissante et majorée sur $[1, +\infty[$. On en déduit qu'elle admet une limite finie L en $+\infty$.

$$\begin{aligned} 2. \text{ Posons } u(t) &= \frac{1}{t} & u'(t) &= -\frac{1}{t^2} \\ v'(t) &= \sin t & v(t) &= 1 - \cos t \end{aligned}$$

On peut alors écrire $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{1 - \cos t}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$.

On en déduit que $G(x) = F(x) + \frac{1 - \cos x}{x} + \cos 1 - 1$, pour tout x de $[1, +\infty[$.

On sait que F admet une limite finie L en $+\infty$.

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1 - \cos x}{x} \right| = 0$ car $0 \leq \left| \frac{1 - \cos x}{x} \right| \leq \frac{2}{x}$, pour tout $x \geq 1$.

Le résultat en découle.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , u une fonction dérivable sur un intervalle J telle que $u(J) \subset I$ et a un réel de I . Alors la fonction F définie sur J par

$F(x) = \int_a^{u(x)} f(t) dt$ est dérivable sur J et $F'(x) = f(u(x)) \cdot u'(x)$, pour tout x de J .

Démonstration

Remarquons que $F = G \circ u$ avec $G : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ et $u : x \mapsto u(x)$.

On en déduit, d'après les hypothèses faites sur f et u que F est dérivable et que l'on a $F'(x) = f(u(x)) \cdot u'(x)$.

Activité 2

On considère la fonction f définie sur $[0, 1[$ par $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $[0, 1[$ et déterminer sa fonction dérivée f' .

2. Soit g la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par $g(x) = \int_0^{\sin x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

a. Montrer que g est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et déterminer sa fonction dérivée.

b. En déduire que $g(x) = x$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

3. Calculer les intégrales $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$; $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

4. a. Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$ il existe un unique $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$ vérifiant $\sin t = x$.

b. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

5. Représenter la fonction f .

Activité 3

Soit f une fonction continue sur un intervalle I centré en 0.

On considère la fonction g définie sur I par $g(x) = \int_{-x}^x f(t) dt$.

1. Montrer que g est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
2. On suppose que f est impaire.
 - a. Montrer que pour tout $x \in I$, $g(x) = 0$.
 - b. En déduire que pour tout $x \in I$, $\int_{-x}^0 f(t) dt = -\int_0^x f(t) dt$.
3. On suppose que f est paire.
 - a. Montrer que g est la primitive sur I qui s'annule en 0, de la fonction $t \mapsto 2f(t)$.
 - b. En déduire que $\int_{-x}^x f(t) dt = 2 \int_0^x f(t) dt$ et que $\int_{-x}^0 f(t) dt = \int_0^x f(t) dt$.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I centré en 0 et soit a un réel de I .

- Si f est impaire alors $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.
- Si f est paire alors $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

Activité 4

Calculer les intégrales suivantes

$$\int_{-5\pi}^{5\pi} x^5 \sin^6(x) dx, \int_{-1}^1 \frac{t^5}{t^6 + 1} dt, \int_{-5\pi}^{5\pi} x^{1001} \cos^{100}(x) dx, \int_{-1}^1 |t^3 + t| dt.$$

Activité 5

Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} , périodique de période T .

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \int_x^{x+T} f(t) dt$.

Montrer que pour tout réel x , $g(x) = \int_0^T f(t) dt$.

Théorème

Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} , périodique de période T .

Pour tout réel a , $\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$.

Activité 6

Calculer les intégrales $\int_0^{20\pi} |\sin x| dx$; $\int_{-10\pi}^{10\pi} |\cos x| dx$.

VII. Exemples de suites définies par une intégrale

Activité 1

1. On pose $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$ et $J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$. Montrer que $I_1 = 1$ et $J_1 = \frac{\pi}{2} - 1$.

2. On pose pour tout $n \geq 2$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x dx$.

a. Calculer I_2 et J_2 .

b. Montrer que $I_n = nJ_{n-1}$ et que $J_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - nI_{n-1}$.

c. Calculer I_3, J_3, I_4 et J_4 .

Exercice résolu 2

On pose pour tout entier $n \geq 1$, $I_n = \int_0^2 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+4}} dx$.

1. Calculer I_1 .

2. Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, $I_n = \int_0^2 x^{n-2} \sqrt{x^2+4} dx - 4I_{n-2}$.

3. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que $nI_n = 2^n \sqrt{2} - 4(n-1)I_{n-2}$, pour tout entier $n \geq 3$.

En déduire les valeurs de I_3 et I_5 .

Solution

1. La fonction $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ est la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+4}$.

On en déduit que $I_1 = 2\sqrt{2} - 2$.

2. Remarquons que l'on peut écrire que pour tout entier $n \geq 3$ et tout réel x ,

$$\frac{x^n}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{x^{n-2}(x^2+4) - 4x^{n-2}}{\sqrt{x^2+4}}. \text{ On en déduit que } I_n = \int_0^2 x^{n-2} \sqrt{x^2+4} dx - 4I_{n-2}. (*)$$

3. Intégrons par parties l'intégrale $\int_0^2 x^{n-2} \sqrt{x^2+4} dx$.

En posant $u(x) = \sqrt{x^2+4}$ et $v'(x) = x^{n-2}$, il vient que

$$\int_0^2 x^{n-2} \sqrt{x^2+4} dx = \left[\frac{x^{n-1}}{n-1} \sqrt{x^2+4} \right]_0^2 - \frac{1}{n-1} \int_0^2 x^{n-1} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx.$$

$$\text{On en déduit que } \int_0^2 x^{n-2} \sqrt{x^2+4} dx = \frac{2^n \sqrt{2}}{n-1} - \frac{1}{n-1} I_n.$$

En reportant la formule obtenue dans (*), on obtient le résultat.

$$\text{D'après ce qui précède, } I_3 = \frac{16-8\sqrt{2}}{3} \text{ et } I_5 = \frac{224\sqrt{2}-256}{15}.$$

Problème résolu

On pose $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$.

1. Calculer I_0 , I_1 et I_2 .

2. a. Montrer que pour tout entier n , $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

b. En déduire I_3 , I_4 , I_5 et I_6 .

c. Montrer que pour tout entier naturel n , $0 < I_{n+1} \leq I_n$.

3. a. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $1 \leq \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leq \frac{I_n}{I_{n+2}}$.

b. Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1$.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = (n+1)I_n I_{n+1}$.

Montrer que la suite (u_n) est constante et que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{\pi}{2}$.

Montrer que $\frac{\pi}{2(n+1)} \leq I_n^2 \leq \frac{\pi}{2n}$. Donner un encadrement de I_{1000} .

Solution

1. a. Le calcul donne immédiatement que $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

$$\text{D'autre part, } I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(\cos 2t + 1) dt = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{b. } I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(t) dt$$

Pour $n \geq 1$, on pose

$$\begin{aligned} u(t) &= \cos^{n+1}(t) & u'(t) &= -(n+1)\cos^n(t)\sin t \\ v'(t) &= \cos t & v(t) &= \sin t \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$I_{n+2} = \left[\cos^{n+1}(t)\sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\sin^2(t) dt,$$

$$\text{ou encore que, } I_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)(1 - \cos^2(t)) dt = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}.$$

On en déduit que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$, pour tout entier $n \geq 1$.

D'autre part, il résulte de a) que $I_2 = \frac{1}{2}I_0 = \frac{\pi}{4}$. Le résultat en découle.

c. En appliquant la relation $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$, $n \geq 0$, on obtient que

$$\bullet I_3 = \frac{2}{3}I_1 = \frac{2}{3}, \bullet I_4 = \frac{3}{4}I_2 = \frac{3\pi}{16}, \bullet I_5 = \frac{4}{5}I_3 = \frac{8}{15}, \bullet I_6 = \frac{5}{6}I_4 = \frac{5\pi}{32}.$$

2. Pour tout $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \cos t \leq 1$. On en déduit que pour tout entier naturel n et tout

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \cos^{n+1} t \leq \cos^n t. \text{ De plus, } \cos t > 0 \text{ pour tout réel } t \text{ de } [0, \frac{\pi}{2}[.$$

Il en résulte que pour tout entier naturel n , $0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t \, dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$, ou encore

$$\text{que } 0 < I_{n+1} \leq I_n.$$

3. a. D'après la question précédente, la suite (I_n) est strictement positive et décroissante.

On en déduit que pour tout entier naturel n , $0 < I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$. Ce qui implique que

$$1 \leq \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leq \frac{I_n}{I_{n+2}}, \text{ pour tout entier naturel } n. (*)$$

b. D'après la première question, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$, $n \geq 0$. On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{I_{n+2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1. \text{ Par passage à la limite dans } (*), \text{ on obtient } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} = 1.$$

4. Pour $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n = I_{n+1} [(n+2)I_{n+2} - (n+1)I_n]$

D'après la question 1. b. $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$, ou encore, $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.

Il en résulte que $u_{n+1} - u_n = 0$ pour tout entier naturel n , c'est à dire que la suite (u_n) est

constante. On déduit de l'égalité $u_0 = I_0 \cdot I_1 = \frac{\pi}{2}$ que $u_n = \frac{\pi}{2}$ pour tout entier naturel n .

La suite (I_n) étant décroissante, on peut écrire pour tout entier non nul n

$$nI_n I_{n+1} \leq nI_n^2 \leq nI_n I_{n-1}, \text{ ou encore que } \frac{n}{n+1} (n+1)I_n I_{n+1} \leq nI_n^2 \leq nI_n I_{n-1}.$$

Il en résulte que $\left(\frac{n}{n+1}\right) \frac{\pi}{2} \leq nI_n^2 \leq \frac{\pi}{2}$, pour tout entier non nul n . Ce qui implique que

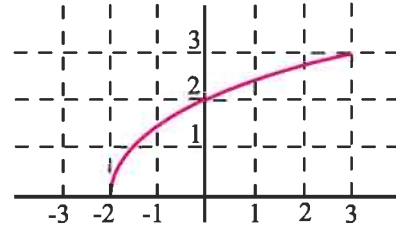
$$\frac{\pi}{2(n+1)} \leq I_n^2 \leq \frac{\pi}{2n}, \text{ pour tout entier non nul } n.$$

On déduit de l'inégalité précédente que $\sqrt{\frac{\pi}{2002}} \leq I_{1000} \leq \sqrt{\frac{\pi}{2000}}$.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. D'après la représentation graphique ci-contre, l'aire de la partie limitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 3$ est encadrée par



- 7 et 13. 15 et 20. 14 et 21.

2. $I = \int_0^1 t \cos^2(\pi t) dt$ et $J = \int_0^1 t \sin^2(\pi t) dt$. Alors $I + J$ est égal à

1. $\frac{1}{2}$. 0.

3. Soit $I = \left| \int_{-1}^1 \frac{-3x^5 + 5x}{x^4 + 1} dx \right|$ et $J = \int_{-1}^1 \left| \frac{-3x^5 + 5x}{x^4 + 1} \right| dx$. Alors

- $I \leq J$. $I = J$. $I \geq J$.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \int_{4\pi}^{\frac{9\pi}{2}} \sin x dx$.

2. $\int_{-1}^1 |x| dx = 1$.

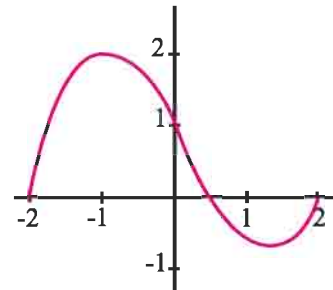
3. Si f est une fonction dérivable sur $[a, b]$ et sa dérivée est continue sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x) dx = [xf(x)]_a^b - \int_a^b x f'(x) dx.$$

4. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$.

Si $f \leq 1$ alors $\int_0^1 f(x) dx \leq 1$.

5. D'après la représentation graphique ci-contre $\int_{-2}^2 f(x) dx \geq 0$.



6. Si $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ alors $f \geq 0$ sur $[a, b]$.

7. La fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ est définie sur \mathbb{R} .

1 Calculer les intégrales ci-dessous.

$$\int_{-1}^3 \left(\frac{x^2}{2} - x \right) dx ; \int_1^2 t(t+1)^3 dt ;$$

$$\int_{-1}^1 (2x+1)(x^2+x-5)^3 dx ; \int_1^2 \sqrt{2x+1} dx ;$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(1+x)^2} ; \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} ; \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 t \sin t dt ;$$

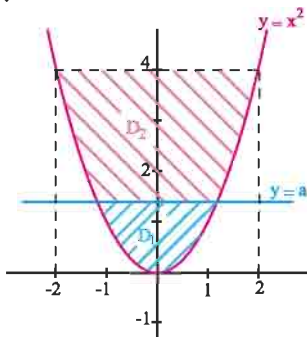
$$\int_{-2}^1 |x(x+1)| dx ; \int_{-3}^3 |x^3+x| dx ; \int_0^3 |2t-1| dt ,$$

$$\int_0^{2\pi} |\sin x| dx .$$

2 le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit $a > 0$.

Pour quelle valeur de a , les parties D_1 et D_2 ont-elles la même aire ?



3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par

$$f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^3} .$$

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Etudier f et tracer C_f .

2. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x-1)^3} \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R} \setminus \{1\} .$$

3. Soit $\lambda < \frac{1}{2}$. On pose $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = \frac{1}{2}$.

a. Déterminer $\mathcal{A}(\lambda)$.

b. Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

4 1. On considère la fonction h définie sur

$$]0, +\infty[\text{ par } h(x) = x^2 - 4x + 6 - 3\sqrt{x} .$$

a. Calculer $h''(x)$, $x > 0$.

b. Montrer que l'équation $h'(x) = 0$ possède une unique solution α appartenant à $]2, 3[$.

c. Déterminer le signe de h' et dresser le tableau de variation de h .

d. Calculer $h(1)$ et $h(4)$. En déduire que 1 et 4 sont les uniques solutions de l'équation $h(x) = 0$.

2. a. Représenter dans un repère orthonormé, les fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 4x + 6 \text{ et } g(x) = 3\sqrt{x} .$$

b. Calculer l'aire de la partie limitée par ces deux courbes.

5 Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On considère les fonctions f et g définies sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

définies par $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \sin^2 x$.

1. Etudier les fonctions f et g .

2. Etudier la position des courbes C_f et C_g de f et g .

3. Représenter C_f et C_g .

4. Calculer l'aire de la partie limitée par ces deux courbes.

6 Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On considère la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par

$$f(x) = x + \sin x .$$

1. Etudier les variations de f sur $[0, \pi]$.

2. Etudier la position de la courbe C_f de f et de la droite D d'équation $y = x$.

3. Représenter C_f et D .

4. Calculer l'aire de la partie limitée par C_f et D .

7 1. Représenter dans un repère orthonormé, les

fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = 3x^2 + \frac{2}{x^3} \text{ et } g(x) = 3x^2 .$$

2. Soit $\lambda > 0$. On pose $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes de f et g et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$.

a. Vérifier que $A(\lambda) = \left| \int_1^\lambda \frac{2dx}{x^3} \right|$. Calculer $A(\lambda)$.

b. Etudier et représenter la fonction $A : \lambda \mapsto A(\lambda)$.

c. Déterminer suivant les valeurs de m , le nombre de solutions de l'équation $A(\lambda) = m$.

8 1. Représenter dans un repère orthonormé, les fonctions f et g définies sur $]2, +\infty[$ par

$$f(x) = x + 1 + \frac{4}{(x-2)^2} \text{ et } g(x) = x + 1.$$

2. Soit $\lambda > 2$. On pose $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes de f et g et les droites d'équations $x = 3$ et $x = \lambda$.

a. Vérifier que $A(\lambda) = \left| \int_3^\lambda \frac{4dx}{(x-2)^2} \right|$.

b. Calculer $A(\lambda)$.

c. Etudier et représenter la fonction $A : \lambda \mapsto A(\lambda)$.

d. Déterminer suivant les valeurs de m , le nombre de solutions de l'équation $A(\lambda) = m$.

9 On considère les intégrales $A = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3} dx$

et $B = \int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^3} dx$.

1. Calculer A .
2. Calculer $A + B$.
3. En déduire la valeur de B .

10 1. Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$.

2. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$.

11 1. A l'aide d'une intégration par parties

calculer l'intégrale $\int_0^\pi x \cos 2x \, dx$.

2. Soit les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x \, dx$ et

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x \, dx.$$

a. Calculer $I + J$ et $I - J$.

b. En déduire les valeurs de I et J .

12 1. Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

2. Soit la fonction f définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}. \text{ Montrer que pour tout } x \in [0, \frac{\pi}{4}],$$

$$f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}.$$

3. Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x}$.

13 Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par

$$f(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

1. Montrer que pour tout réel x de $[0, \frac{\pi}{4}]$,

$$1 \leq f(x) \leq \sqrt{2}.$$

2. En déduire que $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos t} \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

14 On pose $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\sin x}{1+x^2} dx$.

1. a. Vérifier que pour tout

$$x \in [\frac{\pi}{2}, \pi], 0 \leq \frac{\sin x}{1+x^2} \leq \frac{1}{1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}.$$

b. En déduire un encadrement de I .

2. a. Vérifier que pour tout $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$,

$$\frac{\sin x}{1+\pi^2} \leq \frac{\sin x}{1+x^2} \leq \frac{\sin x}{1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}.$$

b. En déduire un nouvel encadrement de I .

15 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \text{ et on pose } I = \int_{100}^{1000} f(t) dt.$$

1. a. Vérifier que pour tout $x > 0$, $f(x) \leq \frac{1}{x^2}$.
 - b. Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis que pour tout $x > 0$ $1 - \frac{x}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.
 - c. En déduire que pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^6} \leq f(x)$.
2. Déterminer un encadrement de I .

16 On considère la fonction f définie sur $] \frac{\pi}{2}, \pi[$ par $f(x) = \frac{1}{\sin x}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $] \frac{\pi}{2}, \pi[$ sur un intervalle I que l'on précisera.
2. Montrer que la réciproque f^{-1} de f est dérivable sur I et que $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, pour tout x de I .
3. En déduire l'intégrale $\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$.

17 1. Représenter dans un repère orthonormé, la

fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$.

2. Soit \mathcal{A} l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.
- a. Vérifier que $\frac{1}{2} \leq \mathcal{A} \leq 1$.
- b. Utiliser la méthode des rectangles, en partageant l'intervalle $[1,2]$ en cinq intervalles d'amplitude 0.2, pour donner un nouvel encadrement de \mathcal{A} .

18 Soit la suite (u_n) définie par

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(x^2+1)^2} dx, n \geq 1.$$

1. Montrer que $0 \leq \frac{x^{2n+1}}{(x^2+1)^2} \leq x^{2n+1}$,

pour tout entier $n \geq 1$ et tout $0 \leq x \leq 1$.

2. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

19 Soit la suite (u_n) définie par

$$u_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx \text{ et } u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \cos 2x dx, n \geq 1.$$

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
2. Comparer u_n et $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n dx$, $n \geq 1$.
3. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
4. a. Calculer u_0 et u_1 .
- b. Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n .
- c. Calculer u_2 et u_3 .

20 Soit la suite (u_n) définie par

$$u_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx \text{ et } u_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx, n \geq 1.$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$.
2. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
3. a. Calculer u_0 et u_1 .
- b. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $(3+2n)u_n = 2nu_{n-1}$.
- c. Calculer u_2 et u_3 .

21 Soit la suite (u_n) définie par

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx, n \geq 1.$$

1. Calculer u_1 .
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$.
3. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

22 Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par

$$f(x) = \tan^3 x + \tan x.$$

1. Étudier les variations de f .
2. Montrer que la fonction f réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{4}]$ sur $[0, 2]$.

3. a. Représenter dans un repère orthonormé, les fonctions f et f^{-1} en précisant les demi tangentes aux extrémités des deux courbes.

b. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$. En déduire $\int_0^2 f^{-1}(x) dx$.

23 On considère la fonction f définie sur $[0, 3]$

$$\text{par } f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1], \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x \in]1, 3]. \end{cases}$$

1. Vérifier que f est continue sur $[0, 3]$.
2. Soit F la fonction définie sur $[0, 3]$ par

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

- a. Expliciter $F(x)$, $x \in [0, 3]$.
- b. Représenter la fonction F dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

24 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

1. a. Étudier f .
- b. Vérifier que la courbe représentative C_f de f est un quart de cercle de centre O et de rayon 1.
- c. Tracer C_f .

2. Pour $x \in [0, 1]$ on pose $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

Représenter la partie du plan dont l'aire est égale à $F(1)$. En déduire $F(1)$.

3. Pour tout $a \in [0, 1]$, on désigne par θ le réel de $[0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\cos \theta = a$.

a. Montrer que $F(a) = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} + \frac{a\sqrt{1-a^2}}{2}$.

b. Calculer $F(\frac{1}{2})$, $F(\frac{\sqrt{3}}{2})$.

25 On pose pour tout entier naturel n ,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x dx.$$

1. a. Calculer I_0 .
- b. Vérifier que pour tout n , $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$.
- c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.

3. a. Montrer que pour tout n , $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+3}$.

b. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

26 On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$

par $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

1. Soit n un entier naturel non nul.

a. Calculer $\int_1^n f(x) dx$.

b. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_1^n f(x) dx \right)$.

2. Soit k un entier naturel non nul.

Calculer $\int_k^{k+1} f(x) dx$.

3. Montrer que la somme $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)}$ converge et déterminer sa limite.

27 On considère la fonction f définie sur

$[1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^3}$ et on pose pour tout entier

$$n \geq 1, S_n = \sum_{k=1}^n f(k).$$

- a. Vérifier que f est décroissante et positive.
- b. Montrer que la suite (S_n) est croissante.

2. a. Calculer $\int_1^n f(t) dt$, $n \geq 1$ et en déduire que

$$0 \leq \int_1^n f(t) dt \leq \frac{1}{2}.$$

b. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_1^n f(t) dt \right)$.

3. a. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt.$$

b. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\int_2^{n+1} f(t) dt \leq S_n - f(1) \leq \int_1^n f(t) dt.$$

c. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $1 \leq S_n \leq \frac{3}{2}$.

d. En déduire que la somme $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3}$

converge et de donner un encadrement de sa limite.

28 Dans chacun des cas, calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle I .

1. $f : x \mapsto x^4 - x^3 + 1$, $I = [-1, 3]$.

2. $f : x \mapsto \frac{1}{x^3} - 1$, $I = [2, 4]$.

3. $f : x \mapsto \sin(2x)$, $I = [0, \pi]$.

29 En utilisant l'inégalité de la moyenne donner

un encadrement de $\int_2^4 \frac{dx}{x^2 - x + 1}$.

30 En utilisant l'inégalité de la moyenne donner

un encadrement de $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{3 + \tan^2 x}$.

Dans les exercices 31, 32, 33, 34 et 35 L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

31 Soit $C = \{M(x, y) \text{ tels que } y = x^2, 0 \leq x \leq 2\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox) . Calculer le volume de S .

32 Soit $C = \{M(x, y) \text{ tels que } y = \frac{1}{x}, 1 \leq x \leq 3\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox) . Calculer le volume de S .

33 Soit

$C = \{M(x, y) \text{ tels que } y = \tan x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox) . Calculer le volume de S .

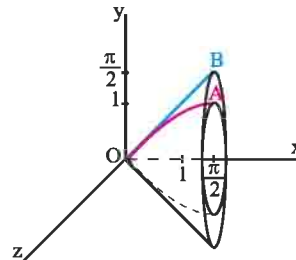
34 Soit

$C = \{M(x, y) \text{ tels que } y = \sin x + \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox) . Calculer le volume de S .

35 Soit $C = \{M(x, y) \text{ tels que } y = \sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$

et $C' = \{M(x, y) \text{ tels que } y = x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$.

On note S et S' les solides obtenus respectivement par rotation de C et C' autour de l'axe (Ox) .



Calculer le volume de la partie de l'espace comprise entre les solides S et S' .

36 I. On considère la fonction F définie sur

$$\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \text{ par } F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}.$$

1. Vérifier que F est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et déterminer sa fonction dérivée.

2. En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $F(x) = x$.

3. Calculer $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.

II. On considère la suite (I_n) définie par

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt, \quad n \geq 0.$$

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{2^n} + (2n-1)I_n \right).$$

3. Calculer I_2, I_3 et I_4 .

III. On considère la suite (J_n) définie par

$$J_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt, \quad n \geq 1.$$

1. a. Vérifier que pour tout $n, 0 \leq J_n \leq \frac{1}{1+2n}$.
 b. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.
- 2 a. Montrer que pour tout $n, J_{n+1} + J_n = \frac{1}{1+2n}$.
 b. Calculer J_1, J_2, J_3, J_4 et J_5 .

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{1+2n}.$$

- a. Montrer que pour tout $n, J_{n+1} = (-1)^n (u_n - J_0)$.
- b. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

37 Soit la suite (I_n) définie par

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2} dx, \quad n \geq 1.$$

1. a. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{3(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$
 b. En déduire que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.
2. a. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$I_n = \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{(1+2x)x^{n+1}}{(1+x+x^2)^2} dx.$$

- b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + \frac{1}{3(n+2)} \leq 3(n+1)I_n \leq 1 + \frac{3}{n+2}.$$

c. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$.

38 On considère la fonction F définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$\text{par } F(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{1-t^2} dt.$$

1. Vérifier que F est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et déterminer sa fonction dérivée.
2. En déduire que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x).$$
3. Calculer $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$.
4. Etudier les variations de F .
5. Tracer la courbe représentative de F dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

39 On considère la fonction f définie sur $[-2, 2]$

$$\text{par } f(x) = x + \sqrt{4-x^2}.$$

1. Etudier f et représenter sa courbe C dans un repère orthonormé.
2. Soit F la fonction définie sur $[0, \pi]$ par

$$F(x) = \int_0^{2\cos x} \sqrt{4-t^2} dt.$$
 - a. Montrer que F est dérivable sur $[0, \pi]$ et que

$$F'(x) = -4\sin^2 x, \quad x \in [0, \pi].$$
 - b. Calculer $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
 - c. En déduire que pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$F(x) = -2x + \sin(2x) + \pi.$$
3. Soit \mathcal{A} l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équations, $y = x, x = -2$ et $x = 2$.
 - a. Montrer que $\mathcal{A} = F(0) - F(\pi)$.
 - b. En déduire \mathcal{A} .