Chapitre 4

# Fonctions réciproques

C'est le 29 novembre 1873 […] que Cantor écrit à Dedekind qu'il voudrait lui "soumettre une question qui a pour moi un certain intérêt théorique, mais à laquelle je ne puis répondre". Il s'agissait de savoir s'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. […] La lettre de Cantor du 7 décembre 1873 contient la première démonstration de la non-existence d'une bijection entre $\mathbb{N}$ et $]0, 1[$.
[…] C'est seulement trois ans plus tard, le 20 juin 1877, que Cantor envoie à Dedekind sa première démonstration […] de la bijection entre $[0, 1]$ et $[0, 1]\times[0, 1]$, […], écrit-il " […]. Tant que vous ne m'aurez pas approuvé, je ne puis que dire : je le vois, mais je ne le crois pas"

(J.Dieudonné, Abrégé d'Histoire des Mathématiques, 1978)

Chapitre 4

# Fonctions réciproques

## I. Définition

### Activité 1

Soit g la fonction définie sur $]-\infty,0]$ par $g(x)=2x^2-3$.

1.a. Déterminer $g(]-\infty, 0])$.

b. Montrer que pour tout réel y de $[-3, +\infty[$, l'équation $g(x)=y$ admet une unique solution dans $]-\infty,0]$ que l'on déterminera.

2. Soit h la fonction définie sur $[-3, +\infty[$ par $h(x)=-\sqrt{\dfrac{x+3}{2}}$.

Montrer que pour tout réel y de $]-\infty, 0]$, l'équation $h(x)=y$ admet une unique solution dans $[-3, +\infty[$.

3. Déterminer $g\circ h$ et $h\circ g$.

### Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.
On dit que f réalise une bijection de I sur $f(I)$ (ou que f est une bijection de I sur $f(I)$), si pour tout y de $f(I)$, l'équation $f(x)=y$ admet une unique solution dans I.

### Théorème

Si f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I, alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

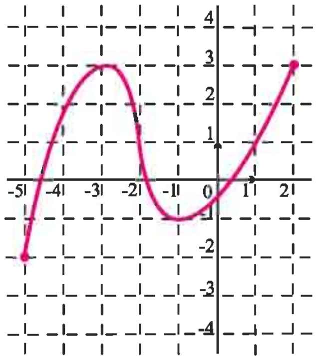
**Démonstration**

Soit y un réel de $f(I)$. Par définition de $f(I)$, il existe un réel x de I tel que $f(x)=y$.
L'unicité résulte de la stricte monotonie de f.

### Activité 2

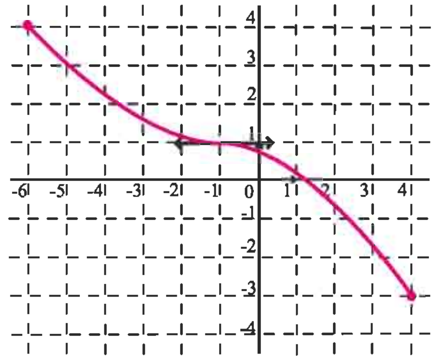
Parmi les fonctions $f_i$, $i\in\{1, 2, 3, 4\}$ représentées ci-après, identifier celles qui réalisent une bijection de I sur $f_i(I)$.

①



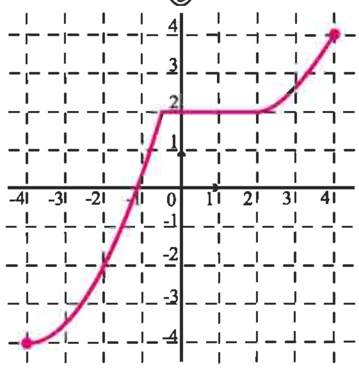
$I=[-5,2]$ $\quad f_1(I)=[-2,3]$

②



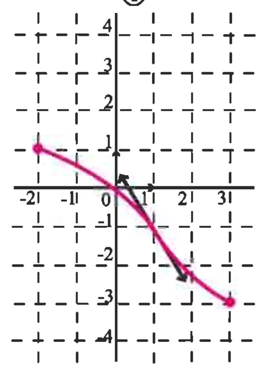
$I=[-6,4]$ $\quad f_2(I)=[-3,4]$

③



$I=]-4,4[$ $\quad f_3(I)=]-4,4[$

④



$I=[-2,3[$ $\quad f_4(I)=]-3,1]$

## Définition

Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$. On appelle fonction réciproque de f et on note $f^{-1}$ la fonction définie sur $f(I)$ qui à tout y de $f(I)$ associe l'unique solution dans I de l'équation $f(x)=y$.

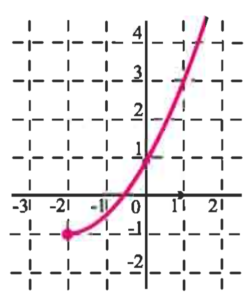
## Conséquence

Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$ et $f^{-1}$ sa fonction réciproque.

Pour tout x de I et tout y de $f(I)$, $f(x)=y$, si et seulement si, $f^{-1}(y)=x$ .

$f^{-1}\circ f(x)=x$ , pour tout x de I et $f\circ f^{-1}(y)=y$ , pour tout y de $f(I)$.

## Activité 3



Dans la figure ci-contre on a représenté dans un repère orthonormé une bijection de $[-2,+\infty[$ sur $[-1,+\infty[$.

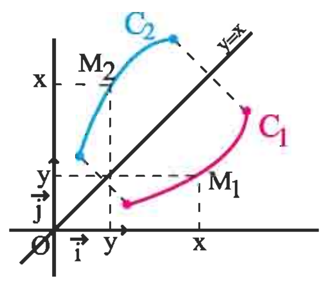
Déterminer $f^{-1}(-1)$, $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(3)$.

### Activité 4

1. Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
   a. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   b. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout réel x de $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit la fonction $g : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$.
   a. Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$.
   b. Déterminer $g^{-1}$.

### Représentation graphique de $f^{-1}$.

Soit f une bijection de I sur $f(I)$ et $C_1$ et $C_2$ les courbes respectives de f et $f^{-1}$ dans un repère orthonormé.
Soit $M_1(x,y)$ un point du plan et $M_2(y,x)$ son symétrique par rapport à la droite $\Delta : y = x$.



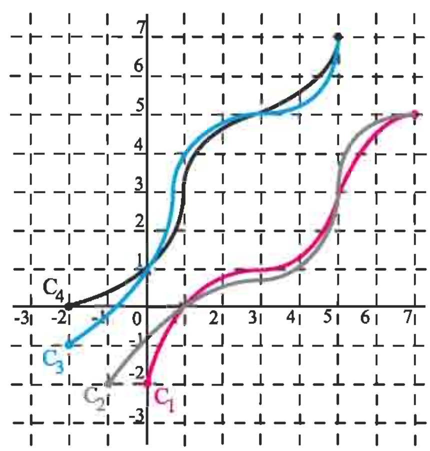

$$M_1(x,y) \in C_1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in f(I) \end{cases} \Leftrightarrow M_2 \in C_2.$$

### Conséquence

Les courbes respectives d'une bijection f et de sa réciproque $f^{-1}$ dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

### Activité 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Dans la figure ci-contre, on a représenté les courbes de deux bijections f et g définies respectivement sur $[0,7]$ et $[-2,5]$, ainsi que les courbes de leurs fonctions réciproques.
Identifier la courbe de chacune des fonctions $f$, $f^{-1}$, g et $g^{-1}$.




## II. Fonction réciproque d'une fonction strictement monotone

### Théorème

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors sa réciproque $f^{-1}$ est continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$ et varie dans le même sens que f.

**Démonstration**

- La continuité de $f^{-1}$ est admise.
- Supposons, par exemple que f est strictement croissante sur I.

Soit $y_1 < y_2$ deux réels de $f(I)$ et soit $x_1$ et $x_2$ les réels de I tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Si l'on avait $x_1 \geq x_2$, on en déduirait que $f(x_1) \geq f(x_2)$, c'est à dire $y_1 \geq y_2$.

Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $y_1 < y_2$. Par suite $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ et $f^{-1}$est strictement croissante sur $f(I)$.

## Activité 1

Soit f la fonction définie sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \sin x$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque $f^{-1}$, continue sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Donner les valeurs de $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ ; $f^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ; $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ; $f^{-1}(1)$.

## Activité 2

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ .

1. a. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

   b. Expliciter $f^{-1}(y)$, pour $y \in J$.
2. En utilisant la relation $f \circ f^{-1}(y) = y$, pour tout $y \in ]0, \frac{1}{2}[$, montrer que

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

## Théorème

Soit f une fonction strictement monotone d'un intervalle I sur $f(I)$, a un réel de I et $b = f(a)$.

Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors $f^{-1}$ est dérivable en b et $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Ce résultat reste valable lorsqu'il s'agit de dérivée à droite ou à gauche en a.

**Démonstration**

Soit y un réel de $f(I)$ différent de b et soit $x = f^{-1}(y)$. Alors x est distinct de a et appartient à I.

On peut alors écrire $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \dfrac{x - a}{f(x) - f(a)} = \dfrac{1}{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}$.

Lorsque y tend vers b, $x = f^{-1}(y)$ tend vers $a = f^{-1}(b)$ car $f^{-1}$ est continue en b.

On en déduit que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$. Le théorème en découle.

### Corollaire

Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$.

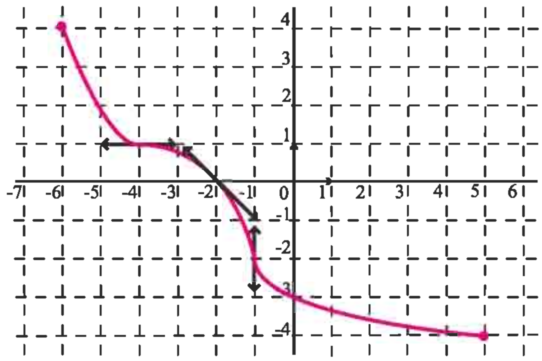
Si f est dérivable sur I et $f'(x) \neq 0$ pour tout x de I, alors $f^{-1}$ est dérivable sur $f(I)$ et

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(y)\right]},$$ pour tout y de $f(I)$.

### Activité 3

Dans la figure ci-contre on a représenté dans un repère orthonormé une bijection f de $[-6, 5]$ sur $[-4, 4]$ ainsi que les tangentes au points d'abscisses $-4$, $-2$ et $-1$.

Etudier la dérivabilité de la fonction $f^{-1}$ aux points d'abscisses $-2$, 0 et 1.




### Activité 4

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \cos x$ et $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Tracer $C_f$.
2. Montrer que f réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.
3. a. Etudier la dérivabilité de $f^{-1}$ en 0 et calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

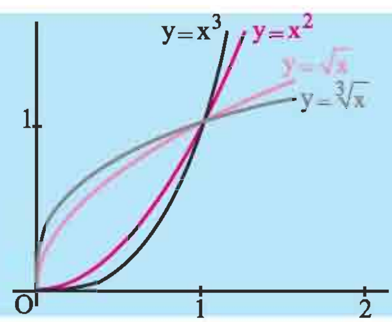
   b. Etudier la dérivabilité de $f^{-1}$ à droite en $-1$ et à gauche en 1.
4. Tracer la courbe de $f^{-1}$ dans le même repère orthonormé.

## III. Fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $n \geq 2$

### Théorème et définition

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

La fonction $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. Elle admet une fonction réciproque strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, appelée fonction racine $n^{\text{ème}}$.



**Notation**

L'image d'un réel positif x par la fonction racine $n^{\text{ème}}$ est noté $\sqrt[n]{x}$ et se lit « racine $n^{\text{ème}}$ de x ». Lorsque $n = 2$ et pour x positif $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$.

**Conséquence**

- Pour tous réels positifs x et y , $y = x^n$, si et seulement si, $x = \sqrt[n]{y}$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

Les opérations sur les radicaux découlent immédiatement de la définition de la fonction racine $n^{\text{ème}}$.

**Conséquence**

Soit deux entiers n et p tels que $n \geq 2$ et $p \geq 2$ et deux réels positifs a et b. Alors

$$\sqrt[n]{a^n} = a. \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a. \quad \sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}. \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ b \neq 0.$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}. \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}. \quad \sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}.$$

**Activité 1**

Ecrire plus simplement les réels $\sqrt[6]{64}$, $\sqrt[6]{2^{-12}}$, $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$, $\sqrt[3]{2^6.3^3}$, $\dfrac{\sqrt[8]{16}}{\sqrt[8]{81}}$, $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$.

**Activité 2**

1. Comparer $\sqrt[6]{2^4}$ et $\sqrt[4]{2^3}$.
2. Soit un réel $x \geq 0$. Comparer $\sqrt[6]{x^4}$ et $\sqrt[4]{x^3}$.

**Théorème**

Pour tout entier $n \geq 2$, la fonction $f : x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$. De plus, $f'(x) = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}\right)}$, pour tout $x > 0$.

**Démonstration**

La fonction $g : x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et admet une dérivée ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

On en déduit que sa fonction réciproque est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, $\left(g^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{g'\left(g^{-1}(x)\right)} = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}} = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}\right)}$, $x > 0$.

**Activité 3**

Etudier la dérivabilité à droite en 0 de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $n \geq 2$. Interpréter.

## IV. Fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$

### Théorème

Soit u une fonction dérivable et positive sur un intervalle I et un entier $n \geq 2$.
La fonction $f: x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est continue sur I et dérivable en tout réel x de I tel que $u(x) \neq 0$. De plus, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{n\left(\sqrt[n]{u(x)^{n-1}}\right)}$, pour tout x de I tel que $u(x) > 0$.

**Démonstration**

La fonction f est la composée de la fonction $x \mapsto u(x)$ et de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.
Le théorème découle des propriétés de la composée de deux fonctions.

### Exercice résolu 1

Soit la fonction $f: x \mapsto \sqrt[3]{x^2+1}$ et $C_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'(x)$, pour tout réel x.
2. Etudier les branches infinies de $C_f$.
3. Etudier les variations de f et construire $C_f$.
4. Soit g la restriction de f à $[0, +\infty[$.
   a. Montrer que g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   b. Construire dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes représentatives de f et $g^{-1}$.

### Solution

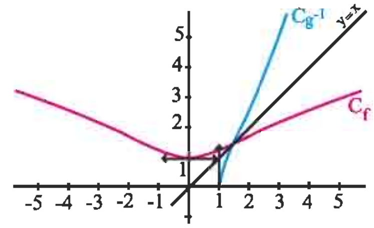
1. La fonction $x \mapsto x^2+1$ est strictement positive et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \dfrac{2x}{3\left(\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}\right)}$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Remarquons que la fonction f est paire. Il suffit donc d'étudier la branche infinie en $+\infty$.
On sait que $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left(x^2+1\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \mapsto +\infty} \sqrt[3]{X} = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
De plus, on peut écrire pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x} = \sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{x^3}}$.
Il en résulte que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.
Ainsi, $C_f$ admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction $(O, \vec{i})$.
La parité de f nous permet de déduire que $C_f$ admet, au voisinage de $-\infty$, une branche parabolique de direction $(O, \vec{i})$.

**Tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+$**

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**Courbes de f et $g^{-1}$**




4. La fonction g est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. On en déduit que g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $g([0,+\infty[)$.

De la continuité de g, on déduit que $g([0,+\infty[)=[1,+\infty[$.

## Exercice résolu 2

I. On considère la fonction k définie sur $[0,+\infty[$ par $k(x)=-2x^4+x^3+1$.

Dresser le tableau de variation de k. En déduire le signe de k.

II. On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{2x}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier les variations de f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1.
3. On se propose d'étudier la position de C et T.

   Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=f(x)-x+\dfrac{1}{2}$.

   a. Montrer que $g'(x)=\dfrac{k(\sqrt{x})}{2x^2}$, $x>0$.

   b. En déduire le tableau de variation de g. Conclure.
4. Tracer T et C.
5. a. Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

   b. On désigne par $C'$ la courbe représentative de $f^{-1}$ et par $T'$ la tangente à $C'$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$. Montrer que T et T' sont parallèles.

   c. Tracer dans le même repère $T'$ et $C'$.

## Solution

I. La fonction k est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x\geq 0$, $k'(x)=x^2(3-8x)$.

On donne ci-contre le tableau de variation de k.

| $x$ | $0$ | | $\frac{3}{8}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $k'(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $k$ | $1$ | $\nearrow$ | $1+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{8}\right)^3$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

En remarquant que $k(1)=0$ et en utilisant le tableau de variation de k, on obtient $k(x)>0$ si $x<1$, $k(x)=0$ si $x=1$ et $k(x)<0$ si $x>1$.

II. 1. La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables, et pour tout $x>0,\ f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2x^2}$ .

| x | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | |
| f | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

On en déduit le tableau de variation de f.

2. Le calcul donne $f(1)=\frac{1}{2}$ et $f'(1)=1$. On en déduit qu'une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1 est $y=x-\frac{1}{2}$.

3. a. La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables, et pour tout $x>0,\ g'(x)=f'(x)-1=\frac{k(\sqrt{x})}{2x^2}$.

b. On déduit de la question précédente que pour tout $x>0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $k(\sqrt{x})$.

La fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ étant positive et strictement croissante et en utilisant le signe de la fonction k, on déduit le tableau de variation de g. La fonction g admet le réel 0 pour maximum absolu, donc pour tout $x>0,\ g(x)\leq 0$ ou encore $f(x)\leq x-\frac{1}{2}$.

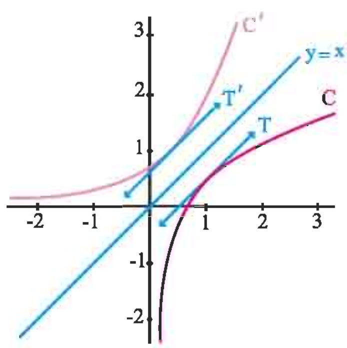
| x | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | + | 0 | − | |
| g | $-\infty$ | ↗ | 0 | ↘ | $-\infty$ |

On en déduit que la courbe C est au-dessous de la tangente T.

5. a. La fonction f étant continue strictement croissante, elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $f(]0,+\infty[)=\mathbb{R}$.

b. La tangente $T'$ à la courbe $C'$ est la symétrique de T par rapport à la droite $\Delta$ d'équation $y=x$.
Les droites $\Delta$ et T ont même coefficient directeur, elles sont donc parallèles.
On en déduit que T et $T'$ sont parallèles.

c. La courbe $C'$ est la symétrique de la courbe C par rapport à la droite d'équation $y=x$.



## QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$.

   f réalise une bijection de I sur $[-1, 1]$.

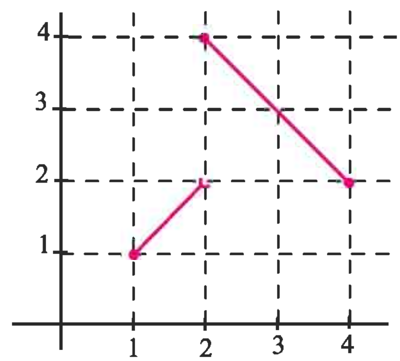
   ☐ $I = [0, 2\pi]$. ☐ $I = [0, \pi]$. ☐ $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \cos x$.

   $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}\right)$ est égal à

   ☐ $\frac{2}{\sqrt{3}}$. ☐ $-2$. ☐ $-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

3. Soit f une fonction dont la représentation graphique est ci-contre. f réalise une bijection de




   ☐ $[1, 4]$ sur $[1, 4]$.
   ☐ $[1, 2]$ sur $[1, 2]$.
   ☐ $[1, 3]$ sur $[1, 3]$.

4. La fonction $f : x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est dérivable sur

   ☐ $[0, +\infty[$. ☐ $]0, +\infty[$. ☐ $\mathbb{R}^*$.

## VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Soit f une fonction continue sur $[1, +\infty[$ telle que $f(1) = 2$ et $\lim\limits_{+\infty} f = 3$.

   Alors f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[2, 3[$.
2. Toute fonction affine réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
3. Pour tout réel $x > 0$, $\sqrt[4]{x} \geq \sqrt[3]{x}$.
4. La fonction réciproque de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt[n]{x}$ est dérivable à droite en 0.
5. Si f est strictement monotone et dérivable sur un intervalle I et si f garde un signe constant sur I, alors sa réciproque garde un signe constant sur $f(I)$.

**1** Montrer, dans chacun des cas, que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J que l'on précisera. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x$ de J.

1. $f(x)=1-4x$ ; $I=]-\infty,1]$.
2. $f(x)=x^2-4x+1$ ; $I=[2,+\infty[$.
3. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ ; $I=]-1,+\infty[$.
4. $f(x)=\sqrt{x-3}+x$ ; $I=[3,+\infty[$.

**2** Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=ax+b$ où a et b sont deux réels tels que $a\neq 0$.

1. Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer a et b pour que $g^{-1}=g$.

**3** Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par

$f(x)=\frac{1}{2}x^4-x^2$.

1. Etudier f et tracer sa courbe représentative $C_f$ dans un repère orthonormé.
2. a. Montrer que f réalise une bijection de $[0,1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
b. Tracer dans le même repère la courbe représentative de sa fonction réciproque $f^{-1}$.
c. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x$ de J.

**4** Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par

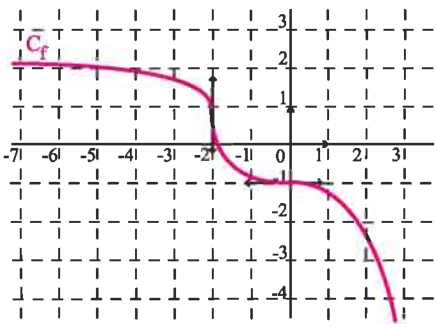
$f(x)=\cos(\pi x)$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0,1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Tracer dans le même repère les courbes représentatives de chacune des fonctions f et $f^{-1}$.
3. Montrer que pour tout x de J,
$f^{-1}(x)+f^{-1}(-x)=1$. Interpréter graphiquement.

**5** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{4+x}$ et $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier la dérivabilité de f en 0.
2. a. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J que l'on précisera.
Etudier la dérivabilité de $f^{-1}$ sur J.
b. Tracer $C_f$ et $C_{f^{-1}}$ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

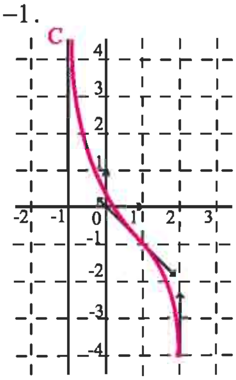
**6** Le graphique ci-dessous représente la courbe d'une fonction f bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.




On désigne par g la fonction réciproque de f.

1. Que peut-on dire de la dérivabilité de g en $-1$ et en 1 ?
2. Dresser le tableau de variation de g.
3. Reproduire la courbe de f et représenter dans le même repère la courbe de g.

**7** Le graphique ci-dessous représente la courbe C d'une fonction f bijective de $]-1,2]$ sur $[-4,-\infty[$.
La courbe C admet une asymptote verticale d'équation $x=-1$.




On désigne par g la fonction réciproque de f.

1. Que peut-on dire de la dérivabilité de g en $-1$ et en $-4$ ?
2. Dresser le tableau de variation de g.
3. Reproduire la courbe de f et représenter dans le même repère la courbe de g.

**8** A/ Soit g la fonction définie sur $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ par $g(x)=\sin(2x)-x$.

1. Etudier les variations de g.
2. Montrer que l'équation $\sin(2x)=x$ admet une unique solution $\alpha$ dans $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$.

B/ Soit f la fonction définie sur $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ par $f(x)=\sin(2x)$ et $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Ecrire une équation de la tangente à la courbe $C_f$ au point d'abscisse 0.
b. Montrer que l'origine du repère est un point d'inflexion de la courbe $C_f$.
2. Etudier f et tracer $C_f$.
3. a. Montrer que f réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ sur $[-1, 1]$.
On notera $f^{-1}$ la fonction réciproque de f et $C_{f^{-1}}$ la courbe représentative de $f^{-1}$.
b. Tracer $C_{f^{-1}}$ dans le même repère.
4. Montrer que la fonction $f^{-1}$ est dérivable sur $]-1, 1[$ et calculer $(f^{-1})'(x)$.

**9** Soit la fonction f définie sur $[0, 1[$ par

$$f(x)=\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}.$$

1. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement.
b. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
c. Tracer $C_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
2. Montrer que f réalise une bijection de $[0,1[$ sur un intervalle I à préciser.
On notera $f^{-1}$ la fonction réciproque de f et $C_{f^{-1}}$ la courbe représentative de $f^{-1}$.
3. a. La fonction $f^{-1}$ est-elle dérivable à droite en 0 ?
b. Calculer $f^{-1}(x)$, pour tout réel x de I.
c. Tracer $C_{f^{-1}}$ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

**10** Soit f la fonction définie sur $[-1, 1[$ par

$$f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

On désigne par $C_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Montrer que f est dérivable sur $]-1, 1[$ et calculer $f'(x)$.
b. Etudier la dérivabilité de f à droite en $-1$ et interpréter graphiquement.
c. Déterminer $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ et interpréter graphiquement.
d. Dresser le tableau de variation de f.
2. a. Ecrire une équation de la tangente T à $C_f$ en son point A d'abscisse 0.
b. Etudier la position relative la position relative de $C_f$ et T. Construire $C_f$ et T.
3. a. Montrer que f réalise une bijection de $[-1, 1[$ sur un intervalle J.
On notera $f^{-1}$ la fonction réciproque de f et $C_{f^{-1}}$ sa représentation graphique.
b. Tracer $C_{f^{-1}}$ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

**11** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

On désigne par $C_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier les variations de f.
2. a. Montrer que le point $I(-1, 0)$ est un centre de symétrie de $C_f$.
b. Montrer que I est un point d'inflexion de $C_f$.
3. a. Montrer que la droite $\Delta: y=x$ coupe $C_f$ en un seul point d'abscisse $\alpha$ et que $0<\alpha<1$.
b. Déterminer la position relative de la courbe $C_f$ et la droite $\Delta$.

4. Construire $C_f$ et sa tangente T au point I.

5. a. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

On notera $f^{-1}$ la fonction réciproque de f et $C_{f^{-1}}$ sa représentation graphique.

b. Tracer $C_f$ et $C_{f^{-1}}$ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

**12** Soit g la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ par $g(x)=\tan(\pi x)$.

1. Etudier g et tracer sa courbe $C_g$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2. Montrer que g réalise une bijection de I sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que $g^{-1}$ est dérivable sur $]-\infty,0[$ .

4. Soit G la fonction définie sur $]-\infty,0[$ par $G(x)=g^{-1}(x)+g^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$.

a. Montrer que G est dérivable sur $]-\infty,0[$ et déterminer $G'(x)$.

b. En déduire que pour tout x de $]-\infty,0[$, $g^{-1}(x)=-\frac{1}{2}-g^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$.

**13** Soit h la fonction définie sur $]0,\pi]$ par $h(x)=\text{cotan}\left(\frac{x}{2}\right)$.

1. Montrer que h réalise une bijection de $]0,\pi]$ sur $\mathbb{R}_+$.

On note $\varphi$ sa fonction réciproque.

2. a. Montrer que $\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $\varphi'(x)=\frac{-2}{1+x^2}$.

b. On désigne par $\Psi$, la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $\psi(x)=\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$.

Calculer la dérivée de la fonction $\Psi$ sur $]0,+\infty[$.

c. Calculer $\varphi(1)$ et en déduire que pour tout $x>0$, $\varphi(x)+\psi(x)=\pi$.

**14** A/ Soit la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ et $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2. On désigne par g la restriction de f à $[0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$.

a. Montrer que g réalise une bijection de $[0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$ sur I que l'on déterminera.

On notera $g^{-1}$ la fonction réciproque de g.

b. Donner les propriété de $g^{-1}$ et déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de I.

3. Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0=\frac{1}{2}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Montrer que pour tout entier naturel n, $0\le u_n\le\frac{1}{2}$.

b. Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.

c. En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente et calculer sa limite.

**15** Pour tout entier naturel $n\ge 2$, on considère la fonction $f_n$ définie sur $[0,1]$ par $f_n(x)=x^n+x^{n-1}+\ldots+x-1$.

1. Montrer que $f_n$ réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[-1,n-1]$.

2. a. En déduire que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution $\alpha_n$ dans $]0,1[$.

b. Montrer que pour tout $n\ge1$, $(\alpha_n)^{n+1}=2\alpha_n-1$.

3. a. Montrer que la suite $(\alpha_n)$ est décroissante.

b. En déduire que la suite $(\alpha_n)$ est convergente et calculer sa limite.

**16** A/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x)=-x+\sqrt{x^2+8}$ et $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+2x$.

b. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. Etudier les variations de f.

3. Monter que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

On notera $f^{-1}$ la fonction réciproque de f et $C_{f^{-1}}$ sa représentation graphique.

4. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x)=x$.

b. Préciser les coordonnées des points d'intersection de $C_f$ et $C_{f^{-1}}$.

5. Tracer $C_f$ et $C_{f^{-1}}$ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

B/ 1. Montrer que $f([1,2])\subset[1,2]$.

2. Montrer que $|f'(x)|\le\frac{2}{3}$, pour tout x de $[1,2]$.

3. Soit $(u_n)$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0=1, \\ u_{n+1}=f(u_n),\ n\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

a. Montrer que pour tout entier naturel n, $1\le u_n\le 2$.

b. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$\left|u_{n+1}-\sqrt{\frac{8}{3}}\right|\le\frac{2}{3}\left|u_n-\sqrt{\frac{8}{3}}\right|.$$

c. En déduire que la suite $(u_n)$ converge vers $\sqrt{\frac{8}{3}}$.

**17** 1. Simplifier les nombres ci-dessous.

$$x=\frac{\sqrt[3]{3}.\sqrt{27}.\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{81}}\ ;\ y=\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{32}}\ ;\ t=\sqrt[3]{8^2}.$$

2. Montrer que $\frac{\sqrt[3]{1024}.\sqrt{\sqrt{64}}.\sqrt[5]{7776}}{\sqrt{18}\sqrt{\sqrt[3]{256}}}=16$.

3. a. Développer $\left(2+\sqrt{5}\right)^3$.

b. Simplifier $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}-\sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}$.

**18** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous.

1. $\sqrt[3]{x}=\sqrt[4]{2}$.
2. $\sqrt[5]{x^2}=\sqrt[3]{3}$.
3. $\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x}+2=0$.
4. $\left(1-\sqrt[4]{x}\right)^3+8=0$.

**19** Calculer les limites ci-dessous.

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2-x+1}\ ;\ \lim_{x\to0}\sqrt[3]{\frac{x^2+x}{\sin x}}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}x-\sqrt[3]{x}\ ;$$

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}\ ;\ \lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{x}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}.$$

**20** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$f(x)=x^2+\sqrt[4]{x}$.

1. Etudier les variations de f.

2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J que l'on précisera.

On notera $f^{-1}$ la fonction réciproque de f.

3. Tracer les courbes de f et de $f^{-1}$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

**21** Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$f(x)=x\sqrt[3]{x}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

2. a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $f'(x)=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$.

3. Etudier les variations de f.

4. Ecrire une équation de la tangente à C au point d'abscisse 1. Tracer C.

5. a. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. On désigne par h la fonction réciproque de f.

b. Montrer que h est dérivable en 1 et calculer $h'(1)$.

c. Déterminer les abscisses des points d'intersection de la droite $\Delta : y=x$ et de C.

d. Tracer la courbe de h.

**22** Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt[4]{x^2-1}$ et $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Vérifier que f est une fonction paire.

2. a. Montrer que pour tout $x \geq 1$, $f(x)=\sqrt{x}\sqrt[4]{1-\dfrac{1}{x^2}}$.

b. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

3. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 1.

b. Montrer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

c. Etudier les variations de la fonction f.

4. a. On désigne par $\Delta$ la droite d'équation $y=x$.
Etudier la position relative de la courbe $C_f$ et de la droite $\Delta$.

b. Tracer la courbe $C_f$.

5. a. Montrer que la fonction f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $\mathbb{R}_+$.

b. Montrer que la fonction $f^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

c. Tracer la courbe C' de $f^{-1}$ dans un même repère.

**23** A/ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\sqrt[3]{x}-\dfrac{x}{3}+3$ et $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Monter que pour tout réel $x>0$,
$$f(x)=x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{3}\right)+3.$$

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

c. Etudier la nature de la branche infinie de $C_f$.

2. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

b. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$.

c. Etudier les variations de la fonction f.

d. Montrer que l'équation $f(x)=0$, admet une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}_+^*$.
Donner une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-1}$ près.

e. Tracer la courbe $C_f$.

**24** A/ Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction $f_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=x^{2n+1}+3x-2$.
On note $C_n$ la courbe de $f_n$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Dresser le tableau de variation de $f_n$.

b. Montrer que le point $I(0,-2)$ est un centre de symétrie de $C_n$.

c. Déterminer le point d'inflexion de $C_n$.

2. a. Etudier la position relative de $C_n$ et $C_{n+1}$.

b. En déduire que toutes les courbes $C_n$ passent par trois points fixes I, A et B que l'on déterminera.

3. a. Montrer que $f_n$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b. Etudier la dérivabilité de $f_n^{-1}$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $\left(f_n^{-1}\right)'(-6)$, $\left(f_n^{-1}\right)'(-2)$ et $\left(f_n^{-1}\right)'(2)$.

4. a. Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution $x_n$ et que $0<x_n<\dfrac{2}{3}$.

b. Montrer que pour tout entier naturel non nul n,
$$x_n=\frac{2-x_n^{2n+1}}{3}.$$

c. Montrer que pour tout entier naturel non nul n,
$$0\leq x_n^{2n+1}\leq\left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1}.$$

d. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^{2n+1}$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

B/ On suppose que $n=1$.
On désigne par f la fonction $f_1$ et par $\alpha$ le réel $x_1$.

1. Soit la fonction $\varphi$ définie sur $[0,\dfrac{2}{3}]$ par
$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

a. Montrer que $\varphi\left([0,\dfrac{2}{3}]\right)\subset[0,\dfrac{2}{3}]$.

b. Montrer que pour tout x de $[0,\dfrac{2}{3}]$,
$$\varphi(x)-\alpha=(x-\alpha)^2\frac{(2x+\alpha)}{3\left(x^2+1\right)}.$$

c. Montrer que pour tout x de $[0, \frac{2}{3}]$,

$$\frac{(2x+\alpha)|x-\alpha|}{3(x^2+1)} \leq \frac{2}{3}.$$

d. En déduire que pour tout x de $[0, \frac{2}{3}]$, $|\varphi(x)-\alpha| \leq \frac{2}{3}|x-\alpha|$.

2. Soit la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

a. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $0 \leq u_n \leq \frac{2}{3}$.

b. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n-\alpha|$.

c. En déduire que la suite $(u_n)$ converge vers $\alpha$ et vérifier que $\alpha = \sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$.

**25** A/ Soit f la fonction définie sur $[0, 1[$ par

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}.$$

On désigne par $C_1$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.
b. Etudier les variations de f.
c. Ecrire une équation de la tangente T à $C_1$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.
d. Tracer $C_1$ et T.
2. Sur le même graphique, tracer $C_2$ la courbe représentative de la fonction $(-f)$.
3. Soit $C = C_1 \cup C_2$. Montrer que C a pour équation cartésienne $x(x^2+y^2) - y^2 = 0$.

B/ Soit A le point de coordonnées $(1, 0)$, $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[OA]$ et $\Delta$ la tangente à $\mathscr{C}$ au point A.
Une droite D passant par O, recoupe le cercle $\mathscr{C}$ en N et la tangente $\Delta$ en Q. On désigne par M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NQ}$. On désigne par $\Gamma$ l'ensemble des points M lorsque la droite D varie.
1. Donner une équation cartésienne de $\Delta$ et $\mathscr{C}$.
2. On désigne par m le coefficient directeur de la droite D. Ecrire une équation cartésienne de D.
3. a. Montrer que les coordonnées de N sont $\left(\frac{1}{1+m^2}, \frac{m}{1+m^2}\right)$.
b. En déduire que les coordonnées de M sont $\left(\frac{m^2}{1+m^2}, \frac{m^3}{1+m^2}\right)$.
c) Vérifier que M appartient à la courbe C.
4. Soit $M(x, y)$ un point de C.
a) Montrer que si $x = 0$ alors $M \in \Gamma$.
b) On suppose que x est non nul et on pose $m = \frac{y}{x}$.
Exprimer x et y en fonction de m.
En déduire que M appartient à $\Gamma$.
c. Montrer que $\Gamma = C$.

C/ Soit t un réel strictement positif et $D_t$ la droite d'équation $y = tx$.
La droite $D_t$ coupe $\Gamma$ en M et $\Delta$ en Q.
La droite $(AM)$ coupe l'axe des ordonnées en P.
1. a. Montrer que les coordonnées de P sont $(0, t^3)$.
b. Vérifier que $AQ = t$.
2. En déduire une construction d'un segment de longueur $\sqrt[3]{t}$, en utilisant la courbe $\Gamma$.

**26** A/ Soit la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

1. a. Montrer que f réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$.
On notera $f^{-1}$, la fonction réciproque de f.
b. Calculer $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
2. a. Montrer que $f^{-1}$ est dérivable sur $[0, 1[$.
b. Calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}\right)$.
c. Montrer que pour tout x de $[0, 1[$,

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}.$$

3. Tracer dans un repère orthonormé $C_f$ et $C_{f^{-1}}$.

4. Soit la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

a. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $f\left(\frac{1}{n^2}\right) \leq v_n \leq f\left(\frac{1}{n}\right)$.

b) En déduire que la suite $(v_n)$ est convergente et calculer sa limite.

5. Montrer que l'équation $\frac{1}{f(x)} = \frac{\pi}{2}x$ admet une unique solution $\alpha$ dans $]0, 1[$. Vérifier que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

B/ 1. Soit la fonction g définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $g(x) = f^{-1}(\sin x) + f^{-1}(\cos x)$.

a. Montrer que g est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et calculer $g'(x)$.

b. Montrer que pour tout x de $[0, \frac{\pi}{2}]$, $f^{-1}(\sin x) + f^{-1}(\cos x) = 1$.

2. Soit h la fonction définie sur $[0, \frac{1}{2}]$ par $h(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

a. Etudier les variations de h et dresser son tableau de variation.

b. En déduire $h\left([0, \frac{1}{2}]\right)$.

3. Soit la fonction k définie sur $[0, \frac{1}{2}]$ par $k(x) = f^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.

Montrer que k est dérivable sur $[0, \frac{1}{2}]$ et calculer $k'(x)$. En déduire que pour tout x de $[0, \frac{1}{2}]$, $f^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2f^{-1}(x)$.

**27** A/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On désigne par $C_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Montrer que f est continue à droite en 0.
b. Montrer que f est dérivable à droite en 0.
c. Etudier la position de $C_f$ par rapport à sa demi-tangente au point d'abscisse 0.
d. Etudier les variations de f.
e. Etudier la nature de la branche infinie de $C_f$ au voisinage de $+\infty$ puis construire $C_f$.

2. a. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J à déterminer.
b. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.
c. Construire la courbe $C'$ de la fonction $f^{-1}$ dans le même repère.

B/ On désigne par g la restriction de f à l'intervalle $[0, 1]$.

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$, $n \geq 0$.

1. a. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leq 1$.
b. Vérifier que $g(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}, x \in ]0, 1]$.
Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.
c. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \leq \frac{1}{2^n}$, puis que $(u_n)$ est convergente.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{2u_{n+1}}{1-(u_{n+1})^2}.$$

b. En déduire que $u_n = \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$.

3. Soit la suite $(v_n)$ définie par $v_n = 2^n.u_n$, $n \in \mathbb{N}$..
Montrer que la suite $(v_n)$ est convergente et calculer sa limite.

**28** A/ Soit f la fonction définie sur $I=[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x)=\sqrt{1+\tan x}$.

On désigne par $C_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Montrer que f est dérivable sur $I=]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ et calculer $f'(x)$.

b. Etudier la dérivabilité de f à droite en $-\frac{\pi}{4}$ et interpréter graphiquement le résultat.

c. Dresser le tableau de variation de f et construire $C_f$.

2. a. Montrer que f réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J à préciser.

b. On désigne par g la bijection réciproque de f. Calculer $g(0)$, $g(1)$ et $g(\sqrt{2})$.

c. Construire la courbe $C_g$ de g dans le même repère.

3. Montrer que g est dérivable sur J et que pour tout x de J, $g'(x)=\frac{2x}{x^4-2x^2+2}$.

4. Soit la suite $(u_n)$ définie par

$$u_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} g(k),\ n\in\mathbb{N}.$$

a. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $g(n)\le u_n\le g(2n)$.

b. En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente et déterminer sa limite.

B/ Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$

$$\text{par } h(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}g\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) & \text{si } x>0,\\ \frac{\pi}{4} & \text{si } x=0.\end{cases}$$

1. a. Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b. Monter que h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $h'(x)=\frac{-1}{2(x^2+1)}$.

2. a. Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe un réel $c\in]0, x[$ tel que $h(x)-\frac{\pi}{4}=\frac{-x}{2(c^2+1)}$.

b. En déduire que h est dérivable à droite en 0 et que $h'_d(0)=-\frac{1}{2}$.

c. Dresser le tableau de variation de h.

3. a. Montrer que l'équation $h(x)=x$ admet dans $\mathbb{R}_+$ une solution unique $\alpha$ et que $\alpha\in]0,1[$.

b. Montrer que pour tout réel $x\in\mathbb{R}_+$, $|h'(x)|\le\frac{1}{2}$.

4. Soit la suite $(v_n)$ définie par

$$\begin{cases}v_0\in\mathbb{R}_+\setminus\{\alpha\},\\ \text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}=h(v_n).\end{cases}$$

a. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|v_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{2}|v_n-\alpha|$.

b. En déduire que la suite $(v_n)$ est convergente et donner sa limite.