Chapitre 7

Fonction logarithme népérien

M.Stifel (1544) met en évidence les deux suites

...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...	8
...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	1	4	8	16	...	256

Le passage de la ligne inférieure ("in inferiore ordine") à la ligne supérieure ("in superioreordine") transforme les produits en sommes. Par exemple, au lieu de multiplier 8 par 32 "in inferiore ordine", on peut prendre les "logarithmes" correspondants 3 et 5 "in superioreordine", calculer leur somme, qui est 8, retourner "in inferiore ordine", où l'on trouve le produit 8.32=256. Cette table plus détaillée, serait d'une grande utilité, car additionner est plus facile que multiplier. Les premières tables logarithmiques [...] ont été calculées par John Napier (1614, 1619), Henry Briggs (1624) et Jost Burgi (1620).

(E.Haier et al,L'analyse au fil de l'histoire, 2000).

Chapitre 7

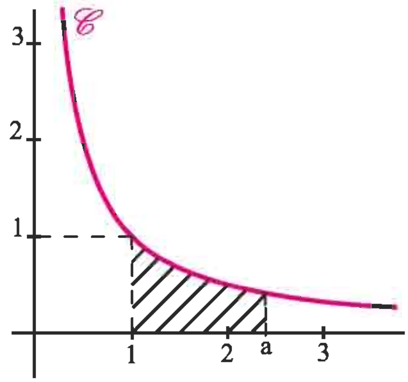
Fonction logarithme népérien

I. Introduction

Activité 1

A/ Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on a construit la courbe de la fonction

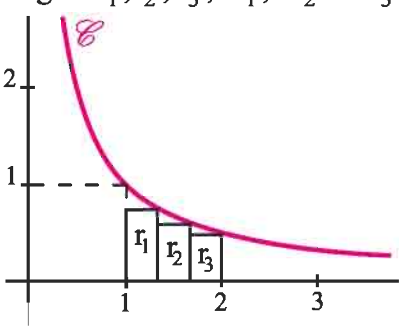
$$f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto \frac{1}{t}$$

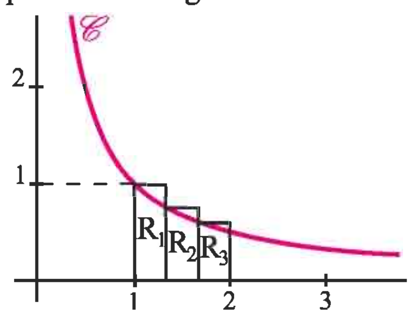


Pour tout réel $a > 0$, on désigne par $S(a)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = a$.

1. Que vaut $S(1)$?

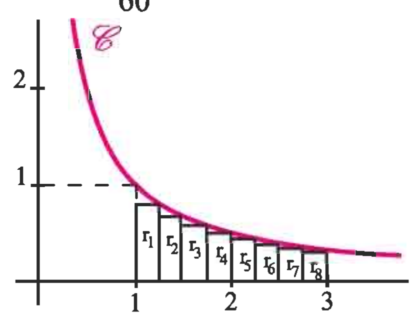
2. a. On partage l'intervalle $[1,2]$ en trois intervalles de même amplitude et on construit les rectangles r_1, r_2, r_3, R_1, R_2 et R_3 comme l'indique les deux figures ci-dessous.



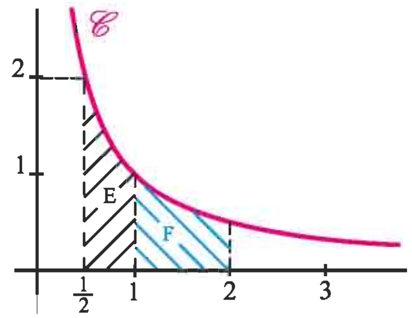


On désigne par $\mathscr{A}$ (respectivement $\mathscr{A}'$) la somme des aires des rectangles r_i (respectivement R_i), $1 \le i \le 3$. Montrer que $\frac{37}{60} \le S(2) \le \frac{47}{60}$.

b. On partage l'intervalle $[1,3]$ en huit intervalles de même amplitude et on construit les rectangles r_i, $1 \le i \le 8$, comme l'indique la figure ci-contre.
Calculer la somme des aires des rectangles r_i, $1 \le i \le 8$ et vérifier que $S(3) \ge 1$.



c. Montrer que $S(2.5)\leq 1$.



3. a. Soit $E=\left\{M(x,y) \text{ avec } \frac{1}{2}\leq x\leq 1 \text{ et } 0\leq y\leq \frac{1}{x}\right\}$

et $F=\left\{M(x,y) \text{ avec } 1\leq x\leq 2 \text{ et } 0\leq y\leq \frac{1}{x}\right\}$.

Montrer que E et F ont même aire.

b. En déduire que $S\left(\frac{1}{2}\right)=S(2)$.

B/ Pour tout réel $x>0$, on pose $F(x)=\int_1^x \frac{1}{t}dt$.

1. a. Montrer que $F(x)>0$, si et seulement si, $x>1$.

b. En déduire $F(x)$ à l'aide de $S(x)$.

2. Justifier la dérivabilité de F sur $]0,+\infty[$ et calculer $F'(x)$.

En déduire que F est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

3. Montrer qu'il existe un unique réel x appartenant à $]2,3[$ tel que $F(x) = 1$.

Définition

On appelle fonction logarithme népérien et on note ln, la fonction

$x\mapsto \ln x=\int_1^x \frac{1}{t}dt$, $x>0$.

Les résultats suivants découlent immédiatement de la définition précédente.

La fonction logarithme népérien est la primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $t\mapsto \frac{1}{t}$, qui s'annule en 1.

La fonction ln est définie, continue, dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et $\ln'(x)=\frac{1}{x}$, $x>0$.

La fonction ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et $\ln 1=0$.

Il existe un unique réel x appartenant à $]2,3[$ tel que $\ln(x) = 1$.

Il en résulte que

Soit a et b deux réels strictement positifs.

$\ln a>\ln b$, si et seulement si, $a>b$.

$\ln a=\ln b$, si et seulement si, $a=b$.

$\ln a=0$, si et seulement si, $a=1$.

$\ln a>0$, si et seulement si, $a>1$.

$\ln a<0$, si et seulement si, $0<a<1$.

Activité 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations ci-dessous.
   a. $\ln\left(x^2+x+1\right)=0.$ b. $\ln(1-x)=\ln(2+x).$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations ci-dessous.
   a. $\ln(4x-1)\le 0.$ b. $\ln(4-3x)>0.$ c. $\ln\left(x^2+x+1\right)\le 0.$ d. $\ln(2x-5)\le \ln x$.

II. Etude et représentation graphique de la fonction ln

Activité 1

On se propose d'étudier la fonction ln et de construire sa courbe représentative C dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. a. Soit un entier $n\ge 2$.

   Montrer que $\displaystyle\int_{2^k}^{2^{k+1}}\frac{1}{t}dt\ge\frac{1}{2}$ pour $0\le k\le n-1$.

   En remarquant que $\displaystyle\int_1^{2^n}\frac{1}{t}dt=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{2^k}^{2^{k+1}}\frac{1}{t}dt$, en déduire que $\displaystyle\int_1^{2^n}\frac{1}{t}dt\ge\frac{n}{2}$.

   b. En déduire que la fonction ln n'est pas majorée et déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln x$.

2. a. Montrer que les deux fonctions $x\mapsto\ln x$ et $x\mapsto-\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ définies sur $]0,+\infty[$ ont même dérivée.

   b. En déduire que $\ln x=-\ln\left(\frac{1}{x}\right)$, $x>0$.

   c. Calculer alors $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\ln x$

3. a. Montrer que $\frac{1}{t}\le\frac{1}{\sqrt{t}}$, pour $t\ge1$. En déduire que $\ln x\le 2\sqrt{x}-2$, pour $x\ge1$.

   b. Montrer alors que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0.$

4. a. Dresser le tableau de variation de la fonction ln.

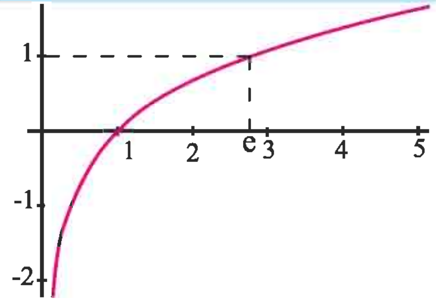
   b. Ecrire une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1.

   c. Construire la courbe C.

L'activité 1 fournit la démonstration du théorème suivant.

Théorème

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$.



- La fonction ln réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.
- L'unique solution de l'équation $\ln x = 1$ est le réel noté e. Ainsi, $\ln e = 1$.

Les calculatrices donnent des valeurs approchées du réel e, $e \simeq 2.71828...$

Activité 2

On désigne par C la courbe représentative de la fonction ln dans un repère orthonormé.
Soit A un point de C d'abscisse a, la tangente à C en A coupe l'axe des ordonnées en K. On désigne par H le projeté orthogonal de A sur l'axe des ordonnées et par y_H et y_K les ordonnées respectives des points H et K.

1. Montrer que $y_H - y_K$ est constant.
2. En déduire une construction de la tangente en un point de C.

III. Propriétés algébriques

Activité 1

1. On considère les deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln x$, $g(x) = \ln(ax)$ où a est un réel strictement positif.
   a. Comparer $f'(x)$ et $g'(x)$.
   b. En déduire qu'il existe une constante réelle c telle que $\ln(ax) = \ln x + c$, $x > 0$.
   c. Montrer alors que $\ln(ax) = \ln a + \ln x$, $x > 0$.
2. Montrer que $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$, $a > 0$ et $b > 0$.

Théorème

Soit a et b deux réels strictement positifs.

$\ln(a.b) = \ln a + \ln b$. $\qquad \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$. $\qquad \ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln b$.

Activité 2

Soit un réel $a > 0$.

1. a. Montrer, par récurrence sur l'entier naturel p, que $\ln\left(a^p\right) = p \ln a$.
   b. Montrer que la formule précédente reste encore vraie pour tout entier négatif p.
2. Soit un entier $p \geq 2$. En écrivant $a = \left(\sqrt[p]{a}\right)^p$, montrer que $\ln\left(\sqrt[p]{a}\right) = \dfrac{1}{p} \ln a$.

Théorème

Soit a un réel strictement positif.

- Pour tout entier p, $\ln\left(a^p\right)=p\ln a$
- Pour tout entier $p\geq 2$, $\ln\left(\sqrt[p]{a}\right)=\frac{1}{p}\ln a$.

Activité 3

1. Exprimer, à l'aide des réels $\ln 2$ et $\ln 3$ chacun des réels ci-dessous.

$\ln\left(\sqrt{3}\right)$, $\ln\left(\sqrt[3]{2}\right)$, $\ln 108$, $\ln\left(\frac{81}{8}\right)$, $\ln\left(\sqrt[5]{2^3}\right)$ et $\ln\left(\sqrt{\frac{1}{27}}\right)$.

2. Simplifier les écritures ci-dessous.

$\ln\left(\sqrt{e}\right)$, $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$, $\ln\left(e^3\right)$, $\ln\left(e^{-2}\right)$, $\ln\left(\frac{\sqrt[3]{e}}{\sqrt{e}}\right)$ et $\ln\left(\sqrt[4]{e}.\sqrt[3]{e}\right)$.

3. Soit a et b deux réels strictement positifs. Exprimer à l'aide de $\ln a$ et $\ln b$, les réels

$\ln\left(\frac{a^3}{b^2}\right)$, $\ln\left(\sqrt{a}.b^2\right)$ et $\ln\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right)$.

Activité 4

1. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\left(\frac{1}{2}\right)^n\leq 10^{-4}$.

2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\left(\sqrt{2}\right)^n\geq 10^5$.

Activité 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations et les inéquations ci-dessous.

$2\ln x=1$. $(\ln x)^2+2\ln x=3$. $\left(\ln x+\frac{1}{2}\right)(\ln x-2)=0$.

$\ln(x+3)+\ln(x+2)=\ln(x+11)$.

$\ln x\geq -2$. $2\ln x<1$. $(1-\ln x)(2-\ln x)\geq 0$.

Activité 6

Déterminer les limites ci-dessous.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(\sqrt[3]{x}\right)}{x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\sqrt[3]{x}\right)}{x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[10]{x}},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2x+3)}{3x+4},\quad \lim_{x\to+\infty} x-\ln x\ .$$

IV. Autres limites

Activité 1

Soit m un entier naturel non nul et n un entier supérieur ou égal à 2.

1. a. Vérifier que $\dfrac{(\ln x)^n}{x^m}=\left(\dfrac{n}{m}\times\dfrac{\ln\left(\sqrt[n]{x^m}\right)}{\sqrt[n]{x^m}}\right)^n$, $x>0$.

b. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^n}{x^m}=0$.

2. Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}\left|x^m(\ln x)^n\right|$

Théorème

Pour tous entiers naturels non nuls n et m, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^n x}{x^m}=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}x^m\ln^n x=0$.

Activité 2

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-\ln^3 x$, $\lim\limits_{x\to0^+}x^2+\ln^3 x$.

2. $\lim\limits_{x\to0^+}x^4\left(1-\ln^5 x\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^4\left(1-\ln^5 x\right)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\ln(3-2x))^2}{4x-6}$.

Activité 3

Soit la fonction f définie par $\begin{cases}f(x)=x^2\ln^2 x,\ x>0\\ f(0)=0\end{cases}$

1. Etudier la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.
2. Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Activité 4

Considérons les réels $a=(2007)^{2008}$ et $b=(2008)^{2007}$.

Comparer a et b (on pourra calculer $\ln a$ et $\ln b$).

V. Fonctions $x\mapsto\ln(u(x))$ et $x\mapsto\ln(|u(x)|)$

Activité 1

Soit la fonction $u:x\mapsto x^2+x-2$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $u(x)>0$.

2. Soit la fonction $f:x\mapsto\ln\left(x^2+x-2\right)$

a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

b. Montrer que f est dérivable en tout réel de son ensemble de définition et calculer $f'(x)$.

Activité 2

Soit la fonction $u : x \mapsto 1 - x^4$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $|u(x)| > 0$.

En déduire l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \ln(|1 - x^4|)$.

2. Montrer que f est dérivable en tout réel de son ensemble de définition et que $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Le théorème de dérivation des fonctions composées fournit la démonstration des théorèmes ci-dessous.

Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $u(x) > 0$, pour tout réel x dans I.

Alors la fonction $f : x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, pour tout x dans I.

Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $u(x) \neq 0$, pour tout réel x dans I.

Alors la fonction $f : x \mapsto \ln|u(x)|$ est dérivable sur I et $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, pour tout x dans I.

Corollaire

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $u(x) \neq 0$, pour tout réel x dans I.

Alors la fonction $f : x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ admet pour primitive sur I la fonction

$f : x \mapsto \ln|u(x)| + k$, où k est une constante réelle.

Activité 3

Soit la fonction $f : x \mapsto \ln\left|\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est dérivable en tout réel de son ensemble de définition et calculer $f'(x)$.
3. Déterminer la primitive sur l'intervalle $[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}]$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$,

   qui s'annule en $\dfrac{\pi}{3}$.

Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)+x$

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Etudier la nature des branches infinies de la courbe de f.
3. Tracer la courbe de f.

Activité 5

1. Montrer que $\dfrac{1}{x+1} \le \ln(x+1)-\ln(x) \le \dfrac{1}{x}$, pour tout réel $x > 0$.
2. Soit la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dots+\dfrac{1}{2n}$, $n \ge 1$.
   a. Montrer que , $\ln\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right) \le v_n \le \ln(2)$, pour tout entier non nul n.
   b. En déduire que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite.

Activité 6

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I, dans chacun des cas suivants :

1. $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$, $\quad I =]1,+\infty[$.
2. $f(x)=\dfrac{x+1}{3x-2}$, $\quad I =]-\infty, \dfrac{2}{3}[$.
3. $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$, $\quad I =]\dfrac{1}{e}, 1[$.
4. $f(x)=\dfrac{\sin(2x)}{2+\cos^2(x)}$, $\quad I = \mathbb{R}$.
5. $f(x)=\dfrac{x^2-x+5}{x-1}$, $\quad I =]-\infty,1[$.

Activité 7

Dériver la fonction $x \mapsto x\ln x$

En déduire une primitive de la fonction ln.

Théorème

La fonction $x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Activité 8

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit la fonction $f : x \mapsto 1 - x + \ln x$

1. Etudier les variations de f et tracer sa courbe C_f.
2. Soit α un réel de $]0,1[$.
   a. Exprimer à l'aide de α l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$.
   b. Déterminer $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \mathcal{A}(\alpha)$.

Activité 9

1. Déterminer les réels a et b tels que pour tout $t \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$, $\dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t+1}$.
2. Calculer alors $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t(t+1)}$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)\,dt}{t^2}$.

Activité 10

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x+2)\,dx$, $n \geq 1$. Calculer u_1.
2. a. Justifier que pour tout $0 \leq x \leq 1$, $\ln 2 \leq \ln(x+2) \leq \ln 3$.
   b. En déduire que pour tout $n \geq 1$, $\ln 2 \displaystyle\int_0^1 x^n dx \leq u_n \leq \ln 3 \int_0^1 x^n dx$.
   c. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Problème résolu

1. Soit la suite (S_n) définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $n \geq 1$. Montrer que la suite (S_n) est divergente.
2. Soit la suite (T_n) définie par $T_n = S_n - \ln(n)$, $n \geq 2$.
   a. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \dfrac{1}{x}$.
   b. En déduire que la suite (T_n) est décroissante.
3. Soit la suite (R_n) définie par $R_n = S_{n-1} - \ln(n)$, $n \geq 2$.
   a. Montrer que les suites (T_n) et (R_n) sont adjacentes.
   b. Soit α la limite commune des suites (T_n) et (R_n).
      Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $R_n \leq \alpha \leq T_n$.
   c. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} prés de α.

Solution

1. Soit k un entier non nul.

Pour $t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$ par conséquent $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t} dt$.

De l'égalité $\sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t} dt = \int_{1}^{n+1} \frac{1}{t} dt = \ln(n+1)$, on déduit que $S_n \geq \ln(n+1)$.

Par suite $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$, car $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty$.

2. a. La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le théorème des accroissement finis appliqué sur l'intervalle $[x, x+1]$, $x > 0$ justifie l'existence d'un réel c de $]x, x+1[$ tel que $\ln(x+1) - \ln(x) = \frac{1}{c}$.

Le réel c est dans $]x, x+1[$, alors $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$.

Le résultat en découle.

b. Pour $n \geq 2$.

$T_{n+1} - T_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \leq 0$, d'aprés 2.a.

Par conséquent la suite (T_n) est décroissante.

3. a. Soit $n \geq 2$.

$T_n - R_n = \frac{1}{n} \geq 0$. Par suite $R_n \leq T_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (R_n - T_n) = 0$.

La suite (T_n) étant décroissante. Il suffit donc de vérifier que la suite (R_n) est croissante.

D'aprés la question 2. a. $R_{n+1} - R_n = \frac{1}{n} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \geq 0$.

Le résultat en découle.

b. La suite (R_n) étant croissante et convergente vers α, alors $R_n \leq \alpha$, $n \geq 2$.

La suite (T_n) étant décroissante et convergente vers α, alors $\alpha \leq T_n$, $n \geq 2$.

On en déduit que $R_n \leq \alpha \leq T_n$, $n \geq 2$.

c. De l'égalité $T_n - R_n = \frac{1}{n}$, on déduit un encadrement de α d'amplitude 10^{-3} à partir de $n \geq 1000$. Il en découle que T_{1000} et R_{1000} sont des valeurs approchées de α à 10^{-3} prés.

(En utilisant le tableur Excel on obtient $T_{1000} \simeq 0.57771558$ et $R_n \simeq 0.57671558$).

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Pour tout réel $x > 0$, $\ln\left(x+x^2\right)$ est égal à

☐ $\ln x+\ln(x+1)$. ☐ $\ln\left(x^2\right)+\ln x$. ☐ $3\ln x$.

2. $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ est égal à

☐ -2. ☐ $\frac{1}{2}$. ☐ $-\frac{1}{2}$.

3. Soit $f(x)=\ln(-x)$, $x<0$. Alors $f'(x)$ est égal à

☐ $-\frac{1}{x}$. ☐ $\frac{1}{x}$. ☐ $-x$.

4. Soit $f(x)=x\ln\left(x^2\right)$, $x<0$. Alors $f'(x)$ est égale à

☐ $2(1+\ln|x|)$. ☐ $2(1+\ln x)$. ☐ $\ln\left(x^2\right)+\frac{1}{x}$.

5. La limite de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ en 0^+ est égale à

☐ $+\infty$. ☐ $-\infty$. ☐ 0.

6. La limite de la fonction $x \mapsto \ln x+\frac{1}{x}$ en 0^+ est égale à

☐ $-\infty$. ☐ 0. ☐ $+\infty$.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. La fonction $x \mapsto x\ln x-x+1$ est la primitive de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

2. La fonction ln est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Pour tout réel x, $\ln x=\int_2^x \frac{dt}{t}+\ln 2$.

4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x\ln x-x}=+\infty$.

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations ci-dessous.

1. $\ln x+\ln(x+1)=0$.
2. $\ln(\ln x)=0$.
3. $\ln\left(\frac{1}{x}\right)+\ln\left(x^4\right)=3\ln 2$.
4. $(\ln x)^2-3\ln x+2=0$.
5. $\ln|x-1|+\ln|x+2|=\ln\left|4x^2+3x-7\right|$.

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations ci-dessous.

1. $\ln\left(\sqrt{3+x}\right)<4$.
2. $\ln(5x)>2+\ln 3$.
3. $\ln(4x+1)\leq 0$.
4. $\ln\left(\frac{1+x}{3x-5}\right)\geq 0$.
5. $(\ln x)^2-2\ln x<0$.
6. $\ln|\sin x|<0$.

3 Trouver, dans chacun des cas suivants, la limite de la fonction f en $+\infty$.

1. $f(x)=\frac{\ln(x+2)}{x+3}$.
2. $f(x)=\frac{\ln(2x+3)}{\sqrt[3]{x}}$.
3. $f(x)=\frac{x^2-2}{x\ln x}$.
4. $f(x)=\frac{\ln\left(x^2-3x+7\right)}{x}$.
5. $f(x)=\frac{\ln\left(x^5-x^3\right)}{x}$.
6. $f(x)=\frac{1+\ln x}{1-\ln x}$.
7. $f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)$.
8. $f(x)=x\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)$.
9. $f(x)=x^2-(\ln x)^5$.

4 Déterminer les limites ci-dessous.

1. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\ln x+\ln 2}{x-\frac{1}{2}}$.
2. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)+\ln 7}{x-7}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2\sin x)}{x}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3\tan x)}{x^3}$.
5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{\ln x}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x$.
7. $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}(\ln x)^{10}$.
8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin x}$.

5 Déterminer dans chacun des cas suivants, une primitive de la fonction f sur I.

1. $f(x)=\frac{1+x+x^2+x^3}{x^4}$, $I=\mathbb{R}_+^*$.
2. $f(x)=\frac{3x-4}{x+5}$, $I=]-5,+\infty[$.
3. $f(x)=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$, $I=]0,\frac{\pi}{2}[$.
4. $f(x)=\frac{2x+1}{x(x+1)}$, $I=]0,+\infty[$.
5. $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$, $I=]1,+\infty[$.
6. $f(x)=\frac{(\ln x)^3}{x}$, $I=]0,+\infty[$.

6 Calculer les intégrales ci-dessous.

1. $\int_e^1 \ln^2 x\,dx$.
2. $\int_1^e x\ln x\,dx$.

3. $\int_{e}^{e^2} x^2 \ln x \, dx$.

4. $\int_{e}^{1} \frac{x-1}{x+1} dx$.

5. $\int_{1}^{2} 5x(\ln x)^2 dx$.

6. $\int_{3}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

7. $\int_{2}^{3} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) dx$.

8. $\int_{4}^{2} \frac{dx}{x \ln x}$.

9. $\int_{1}^{2} \frac{\ln x}{x} dx$.

10. $\int_{0}^{1} \frac{x^2+3x-1}{2x+1} dx$.

7 Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par

$f(x)=\frac{1}{x^2(x-1)}$.

1. Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout $x \in]1,+\infty[$,

$f(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x-1}$.

2. Calculer alors $\int_{2}^{3} f(x) dx$.

3. En déduire la valeur de $\int_{2}^{3} \frac{\ln(x-1)dx}{x^3}$.

8 Etudier, dans chacun des cas ci-dessous, f et tracer sa courbe représentative.

1. $f : x \mapsto (\ln x)^2$.

2. $f : x \mapsto \frac{1}{\ln x}$.

3. $f : x \mapsto \ln(\ln x)$.

4. $f : x \mapsto \ln|x| + \ln(x^2-3)$.

9 Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$f(x)=2-x+\frac{\ln x}{x}$.

1. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to0^+} f(x)$.

2. Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par

$g(x)=1-x^2-\ln x$.

a. Etudier le sens de variation de g.

b. Calculer $g(1)$. En déduire le signe de g.

3. Vérifier que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

4. On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

a. Montrer que la droite $\Delta : y=-x+2$ est une asymptote à C.

b. Etudier la position relative de C et Δ.

c. Tracer C et Δ.

10 Soit la fonction $f : x \mapsto (\ln x)^2 - 3\ln x + 2$.

1. Dresser le tableau de variation de f.

2. Construire, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative de la fonction f et préciser les points d'intersection de la courbe de f avec l'axe $(O,\vec{i})$.

3. Montrer que la fonction

$F : x \mapsto x(\ln x)^2 - 5x\ln x + 7x$ est une primitive de la fonction f sur $]0,+\infty[$.

4. Calculer l'aire du domaine du plan limitée par la courbe de f et les droites d'équations respectives $x=e$, $x=e^2$ et $y=0$.

11 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln|x|<1$.

2. On considère la fonction f définie par

$$f(x)=\begin{cases} 2x - x\ln|x|, & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

a. Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f sur son ensemble de définition.

b. Etudier la parité de f, puis dresser le tableau de variation de f.

c. Construire dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe de f et préciser la tangente au point d'abscisse 0, ainsi que la nature des branches infinies.

12 Soit a et b deux réels tels que $0<a<b$.

Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{\ln(ax+1)}{\ln(bx+1)}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer $f'(x)$.
3. On pose
$g(x)=a(bx+1)\ln(bx+1)-b(ax+1)\ln(ax+1)$
Calculer $g'(x)$ et en déduire que f est strictement croissante sur chacun des intervalles
$\left]-\frac{1}{b},0\right[$ et $]0,+\infty[$.
4. Montrer que $\ln\left(\frac{a}{b}+1\right).\ln\left(\frac{b}{a}+1\right)<(\ln 2)^2$.

13 1. Etudier les variations des fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $u(x)=\ln x-\dfrac{x-1}{x}$ et
$v(x)=x-1-\ln x$.
2. En déduire que $\dfrac{x-1}{x}<\ln x<x-1$, pour $x>0$.
3. Utiliser l'inégalité précédente pour déduire que
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}$ n entier, $n\geq 2$.

14 1. Montrer que pour
$t\geq 0,\ 1-t\leq\dfrac{1}{t+1}\leq 1-t+t^2$.
2. En déduire que pour tout
$x\geq 0,\ x-\dfrac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$.
3. Soit la fonction f définie par
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x>0,\\ 1 & \text{si } x=0.\end{cases}$$
a. Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
b. Montrer que f est continue en 0 à droite.
c. Montrer que f est dérivable à droite en 0 et préciser le nombre $f'_d(0)$.

15 Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Tracer la fonction $x\mapsto\ln x$.
Pour tout entier un entier $n\geq 2$, on pose
$S_n=\ln 1+\ln 2+...+\ln n$ et
$T_n=\ln 1+\ln 2+...+\ln(n-1)$.

1. Montrer que $T_n\leq\int_1^n\ln x\,dx\leq S_n$.
2. En déduire que $\ln((n-1)!)\leq n\ln n-n+1\leq\ln(n!)$.

Puis que $e\left(\frac{n}{e}\right)^n\leq n!\leq ne\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

16 Soit f la fonction définie par

$f(x)=(x+1)\ln|x-3|$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Préciser l'ensemble de définition D de f.
2. a. Vérifier que si $x\in D$ alors
$f'(x)=\dfrac{x+1}{x-3}+\ln|x-3|$.

b. Calculer $f''(x)$.

En déduire les variations de f'.

c. Montrer que f' s'annule sur $]-\infty,3[$ pour une valeur de α.

Donner un encadrement de α d'amplitude 0.1

Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty,3[$.

d. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]3,+\infty[$.

3. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition D_f.

Préciser les asymptotes éventuelles à C.

4. Calculer les coordonnées des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses.
5. Tracer la courbe C.

17 Soit f la fonction définie par

$f(x)=-\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Préciser l'ensemble de définition D_f de f.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Montrer que la droite Δ d'équation $y=\frac{-x}{2}$ est une asymptote à la courbe C.
Préciser la position relative de C par rapport à Δ.
4. Montrer que le point $I\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ est un centre de symétrie pour C.
5. Construire C.
6. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution réelle unique x_0 et que $\frac{2}{5}<x_0<\frac{9}{20}$.

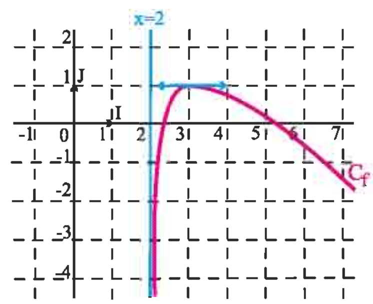
18 A/ 1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x)=(1-x)\ln x$.
Résoudre l'équation $g(x)=0$ puis déterminer le signe de $g(x)$.

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h(x)=\ln x-x$.
a. Dresser le tableau de variation de h.
b. En déduire le signe de h.

B/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
par $f(x)=\ln x(\ln x-x)$.
On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $f'(x)=\frac{g(x)+h(x)}{x}$.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Déterminer la nature des branches infinies de C_f.
4. a. Déterminer le point d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.
b. Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à C_f au point d'abscisse 1.
c. Vérifier que le point $A(e,-e+1)$ est un point d'intersection de C_f avec T.
5. Construire C_f et T.
6. Soit $\alpha\in]0,1[$ et D la partie du plan limité par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=1$.
a. Déterminer à l'aide de α l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de D.
b. Déterminer $\lim\limits_{\alpha\to0^+}\mathcal{A}(\alpha)$.
7. a. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle J à préciser.
b. Construire dans le même repère la courbe représentative de la fonction f^{-1}.

19 La courbe représentative C_f suivante est celle d'une fonction f dérivable sur $]2,+\infty[$.



1. a. Utiliser le graphique pour déterminer les valeurs de $f(3)$ et $f'(3)$.
b. On sait que la tangente au point d'abscisse 4 a pour coefficient $-\frac{1}{2}$. Tracer cette tangente.
2. a. Quelles semblent être les limites de f aux bornes de son ensemble de définition ?
b. Dresser le tableau des variations de f.
3. On suppose que la fonction f est de la forme $f(x)=ax+b+\ln(x+c)$.
A l'aide des valeurs mises en évidence dans la question 1, calculer les réels a, b et c.
Par la suite, on utilise la forme de $f(x)$ trouvée dans cette question.

4. Déterminer la nature de la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$.
5. a. Tracer la droite Δ d'équation $y=-x+4$.
b. Etudier algébriquement la position de la courbe C_f avec Δ.
6. Soit g la restriction de f sur $]2,3]$.
a. Montrer que g réalise une bijection de $]2,3]$ sur un intervalle J à préciser.
b. Construire dans le même repère la courbe C' de g^{-1}.
c. La fonction g^{-1} est-elle dérivable à gauche de 1?

20 A/ Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[\setminus\{1\}$ par $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln x}$.
On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
Interpréter les résultats graphiquement.
2. a. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[\setminus\{1\}$ et que $f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x(\ln x)^2}$.
b. Dresser le tableau de variation de f.
3. Soit h la restriction de f à $]0,1[$.
a. Montrer que h réalise une bijection de $]0,1[$ sur un ensemble J que l'on précisera.
b. Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet dans $]0,1[$ une seule solution α et que $0.5<\alpha<0.6$.
c. En déduire que C_f coupe l'axe des abscisses en un seul point que l'on précisera.
4. Tracer C_f.
5. Tracer dans le même repère la courbe représentative de la fonction h^{-1} puis déduire le tableau de variation de la fonction h^{-1}.
6. a. Montrer que $h'(\alpha)=-\frac{\alpha+1}{\alpha^3}$.
b. Montrer que h^{-1} est dérivable en 0 et exprimer $\left(h^{-1}\right)'(0)$ en fonction de α.

B/ Soit g la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $g(x)=2f\left(x^2\right)$.
On désigne par C_g la courbe représentative de f dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
1. Vérifier que pour tout $x\in]1,+\infty[$, $f(x)-g(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}$
2. En déduire la position relative de C_f et C_g sur $]1,+\infty[$.
3. Soit $x\in[2,+\infty[$, on désigne par M et N les points respectifs de C_f et C_g d'abscisse x.
Pour quelle valeur de x, la distance NM est maximale?

21 A/ On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=\frac{x+1}{2x+1}-\ln x$
1. Etudier le sens de variation de g.
2. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$.
Donner un encadrement de α d'amplitude 0.1
3. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$.
B/ On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{2\ln x}{x^2+x}$.
On note C la courbe de f dans un repère orthogonal. (unité 2 cm sur l'axe (Ox), 4 cm sur l'axe (Oy)).
1. Etudier les limites de f en 0 à droite et en $+\infty$.
2. Montrer que pour $x>0$, $f'(x)=\frac{2(2x+1)}{\left(x^2+x\right)^2}\times g(x)$
En déduire le signe de $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variation de f et montrer que $f(\alpha)=\frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$
4. Tracer la courbe C et préciser la tangente à C au point d'abscisse 1.

C/ 1. a. Déterminer une primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$

b. Montrer que pour $x \geq 1$, $f(x) \leq \dfrac{\ln x}{x}$.

2. Soit F la primitive de f sur $[1,+\infty[$ qui s'annule en 1. Sans chercher à calculer $F(x)$, montrer que pour $x \geq 1$, $F(x) \leq \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

22 Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Déterminer la fonction dérivée de f.

b. Calculer alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$.

2. Etudier f et tracer (C).

3. a. Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b. Tracer la courbe de la fonction f^{-1}.

c. Calculer à l'aide d'une intégration par parties $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$.

En déduire $\displaystyle\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} f^{-1}(x)dx$.

23 On pose pour tout entier $p \geq 1$,

$I_p = \displaystyle\int_1^e x^2 (\ln x)^p dx$.

a. Montrer que la suite (I_p) est décroissante.

b. Montrer que la suite (I_p) vérifie la relation de récurrence $I_{p+1} + \dfrac{p+1}{3} I_p = \dfrac{e^3}{3}$

c. Calculer I_1 et I_2.

2. Montrer que pour tout $p \geq 1$, $\dfrac{e^3}{p+4} \leq I_p \leq \dfrac{e^3}{p+3}$

Calculer alors $\lim\limits_{p\to+\infty} I_p$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} pI_p$.

24 Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(\ln x)$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.

2. Etudier la dérivabilité de f et calculer $f'(x)$.

3. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}$ avec $n \geq 2$.

Montrer que pour tout entier $k \geq 2$

$\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln t}dt \leq \frac{1}{k\ln k}$.

4. Calculer $\displaystyle\int_2^{n+1} \frac{1}{t\ln t}dt$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

25 1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}_+$, on a

$x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

2. a. Montrer que $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p = \frac{n(n+1)}{2}$ et

$\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b. On pose $P_n = \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\times\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\times\ldots\times\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$.

26 Pour tout réel a, on désigne par f_a la fonction définie par $f_a(x) = \ln\left(x^2+a\right)$.

1. a. Indiquer, suivant les valeurs de a, l'ensemble de définition de f_a.

b. Donner les différents tableaux de variations de f_a selon les valeurs de a.

c. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_a(x)}{x}$, en déduire la nature des branches infinies des courbes représentatives de f_a dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$.

d. (C_a) et $(C_{a'})$ désignant les courbes des fonctions f_a et $f_{a'}$ (avec $a \neq a'$).

Soit M un point de (C_a) et M' le point de $(C_{a'})$ de même abscisse.

Montrer que MM' est non nul.

Que pouvez-vous en déduire pour C_a et $C_{a'}$?
Montrer que MM' tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
e. Tracer, sur un même graphique, les courbes C_{-1}, C_0 et C_1 dans un même repère orthonormé (unité 2 cm).
Préciser les points d'intersection avec l'axe des abscisses et les tangentes en ces points.

2. Dans cette question, on pose $a = \frac{3}{4}$.
a. On se propose d'étudier la position de la courbe $C_{\frac{3}{4}}$ par rapport à la droite D d'équation $y = x$, pour x positif.
A cet effet, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = x - \ln\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)$
Etudier le sens de variation de g.
En déduire la position de $C_{\frac{3}{4}}$ par rapport à D.
b. Soit h la restriction de la fonction $f_{\frac{3}{4}}$ à $\mathbb{R}_+$.
Montrer que h réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un ensemble que l'on précisera.
c. Tracer la représentation graphique de h et de h^{-1} dans un repère orthonormé.

27 A/ Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = (x-1)^n \ln x$.
On désigne par C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. On pose pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, $\varphi_n(x) = n \ln x + 1 - \frac{1}{x}$
a. Etudier les variations de φ_n.
b. Calculer $\varphi_n(1)$ et en déduire le signe de $\varphi_n(x)$ pour tout x strictement positif.
2. a. Etudier les variations de f_n et dresser, suivant la parité de n, son tableau de variation.
b. Tracer les courbes C_1 et C_2 en précisant les positions relatives de ces deux courbes.
3. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_1 et C_2 et les droites $x = 1$ et $x = 2$.

B/ Dans cette partie, on se propose d'étudier la suite (v_n) définie par $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$, $n \geq 0$.
1. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \int_1^2 f_n(x)\,dx$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, (n+1)u_n = \ln 2 - \int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x}dx$.
3. En déduire alors
a. La relation
$$\frac{1}{2(n+2)} \leq \ln 2 - (n+1)u_n \leq \frac{1}{n+2},\ n \in \mathbb{N}^*.$$
b. Calculer la limite de $(n+1)u_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. On pose, pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout réel $x > 0$,
$$S_n(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 + \ldots + (-1)^n (x-1)^n$$
a. Montrer que $S_n(x) = \frac{1}{x} - (-1)^{n+1}\frac{(x-1)^{n+1}}{x}$
b. En déduire, en utilisant la première question de la partie B, que pour tout n de $\mathbb{N}^*$,
$\ln 2 - v_n = (-1)^{n+1}\left[\ln 2 - (n+1)u_n\right]$.
3. Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.

28 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
I/ 1. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par $g(x) = x\ln x - x + 1$.
a. Dresser le tableau de variation de g.
b. En déduire le signe de $g(x)$ pour $x \in [1, +\infty[$.
2. Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\ln x} & \text{si } x \in]1, +\infty[, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$
Montrer que f est continue à droite en 1.
3. a. Montrer que pour tout réel t de $[1, +\infty[$,
$$t - 1 - (t-1)^2 \leq 1 - \frac{1}{t} \leq t - 1.$$

b. En déduire que pour tout réel x de $[1,+\infty[$,

$$\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{(x-1)^3}{3}\le x-1-\ln x\le\frac{(x-1)^2}{2}.$$

c. Déterminer alors $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}$.

d. En déduire que f est dérivable à droite en 1 et que $f'_d(1)=\dfrac{1}{2}$.

4. a. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

b. Tracer la courbe représentative C de f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(On précisera la nature de la branche infinie de C).

II/ On considère la fonction F définie sur $[1,+\infty[$ par

$$F(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt & \text{si } x\in]1,+\infty[,\\ \ln 2 & \text{si } x=1.\end{cases}$$

On désigne par C' la courbe représentative de la fonction F dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. a. montrer que pour tout x de $]1,+\infty[$ et pour tout t de $[x,\ x^2]$, $\dfrac{x}{t\ln t}\le\dfrac{1}{\ln t}\le\dfrac{x^2}{t\ln t}$.

b. En déduire que pour tout x de $]1,+\infty[$, on a $x\ln 2\le F(x)\le x^2\ln 2$.

c. Montrer alors que F est continue en 1.

3. a. Montrer que pour tout x de $]1,+\infty[$, F est dérivable et que $F'(x)=f(x)$.

b. soit x un réel de $]1,+\infty[$. Montrer qu'il existe un réel c de $]1,x[$ tel que $F(x)-F(1)=(x-1)F'(c)$.

c. En déduire que F est dérivable à droite en 1 et que $F'_d(1)=1$.

4. Dresser le tableau de variation de F et tracer la courbe C' de F.

(On précisera la nature de la branche infinie de C').

III/ Soit α un réel de $]1,+\infty[$ et $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C et les droites d'équations $y=0$, $x=1$ et $x=\alpha$.

1. Montrer que pour tout réel x de $]1,+\infty[$, on a $F(x)=\displaystyle\int_1^x f(t)dt+\ln 2$.

2. En déduire $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{\mathcal{A}(\alpha)}{\alpha}$ et $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{\mathcal{A}(\alpha)}{\alpha^2}$.

29 I/ 1. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $h(x)=x-\ln x$.

a. Dresser le tableau de variation de f.

b. En déduire que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $h(x)\ge1$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-\ln x} & \text{si } x>0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

a. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

b. La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ?

II/ Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$F(x)=\int_x^{2x}f(t)dt.$$

1. a. Montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$.

b. Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$,

$$F'(x)=\frac{\ln 2-\ln x}{h(2x).h(x)}\ \text{ et }\ F'_d(0)=0.$$

2. Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $\displaystyle\int_x^{2x}\frac{dt}{t}=\ln 2$.

3. Montrer que pour tout x de $[1,+\infty[$,

$$0\le F(x)-\ln 2\le\frac{\ln(2x)}{x-\ln x}.$$

En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

4. a. Montrer que $F\left(\dfrac{1}{2}\right)\le\ln 2$.

b. Montrer alors qu'il existe un réel α de $[\frac{1}{2},\ 1]$ tel que $F(\alpha)=\ln 2$.

5. a. Dresser le tableau de variation de F.

b. Donner l'allure de la courbe représentative de F dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(On donne $F(1)\simeq0.9$ et $F(2)\simeq1.1$).

III/ Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

1. Soit la suite (v_n) définie par

$$v_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{t}{t - \ln t} dt,\ n \geq 1.$$

a. Montrer que pour tout t de $]0,+\infty[$, $\dfrac{t}{t-\ln t} \leq t$.

b. Montrer que la suite (v_n) est croissante.

c. En déduire que la suite (v_n) est convergente et que $0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n \leq \dfrac{1}{2}$.

2. Soit la suite (w_n) définie par

$$w_n = \int_1^n \frac{t}{t-\ln t} dt\ n\ \ n \geq 1.$$

a. Montrer que pour tout t de $[1,+\infty[$,

$\dfrac{t}{t-\ln t} \leq 1 + \ln t$.

b. Calculer $\displaystyle\int_1^n 1 + \frac{\ln t}{t} dt$.

c. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

30 A/ Soit f la fonction définie sur $[2,+\infty[$ par

$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-4}\right)$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Montrer que f est dérivable sur $]2,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

b. Montrer que $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = +\infty$.

c. Dresser le tableau de variation de f.

2. a. Etudier la position de la courbe de C_f et de la droite $D: y = x$.

b. Construire C_f.

3. a. Montrer que f réalise une bijection de $[2,+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

b. Construire dans le même repère la courbe C' de la fonction réciproque f^{-1} de f.

B/ Soit F la fonction définie sur $]0,1]$ par

$$F(x) = \int_2^{\frac{2}{x}} f(t) dt.$$

1. Montrer que F est dérivable sur $]0,1]$ et calculer $F'(x)$.

2. a. Montrer que pour tout $t \in [2,+\infty[$, $f(t) \geq \ln t$.

b. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_2^{\frac{2}{x}} \ln t\, dt$.

c) En déduire que pour tout $x \in]0,1]$,

$F(x) \geq \dfrac{2}{x}\left(\ln\left(\dfrac{2}{x}\right) - 1\right)$.

d. Calculer alors $\lim\limits_{x\to0^+} F(x)$

3. Dresser le tableau de variation de F et donner une allure de la courbe de F.

C/ Pour tout $x \in]2,+\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$g_n(x) = \int_{2\sqrt{2}}^{x} \frac{t^{2n}}{\sqrt{t^2-4}} dt \text{ et } \ell_n = \lim_{x\to2^+} g_n(x).$$

1. Justifier l'existence de $g_n(x)$ pour tout $x \in]2,+\infty[$.

2. Calculer $g_0(x)$ pour $x \in]2,+\infty[$. En déduire ℓ_0.

3. Montrer que pour tout $x \in]2,+\infty[$,

$g_1(x) = \dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} - 2\sqrt{2} + 2g_0(x)$.

En déduire ℓ_1.

4. a. Montrer que pour tout $x \in]2,+\infty[$ et pour tout,

$$n \in \mathbb{N},\ g_{n+1}(x) = x^{2n+1}\sqrt{x^2-4} - 2^{3n+2}\sqrt{2} - (2n+1)\int_{2\sqrt{2}}^{x} t^{2n}\sqrt{t^2-4}\, dt.$$

b. En déduire que pour tout $x \in]2,+\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(2n+2)g_{n+1}(x) = x^{2n+1}\sqrt{x^2-4} - 2^{3n+2}\sqrt{2} + 4(2n+1)g_n(x).$$

c. Exprimer ℓ_{n+1} à l'aide de ℓ_n.