Chapitre 8

Fonction exponentielle

Des questions telles que "Si le nombre d'habitants d'une province s'accroît tous les ans d'une trentieme, & qu'il y ait au commencement 100.000 habitants; on veut savoir combien il y en aura au bout de 100 ans ?" (Euler 1748, Introductio §110) ou "Un particulier doit 400.000 florins, dont il est convenu de payer tous les ans l'intérêt à 5 pour cent…"
En appliquant la formule du binôme, Euler dit sans la moindre hésitation, "Si N est un nombre plus grand qu'aucune quantité assignable la fraction $\left(\frac{N-1}{N}\right)$ égalera l'unité". […] si N tend vers l'infini, $\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$ tend vers le nombre d'Euler e.

(E.Haier et al, L'analyse au fil de l'histoire, 2000)

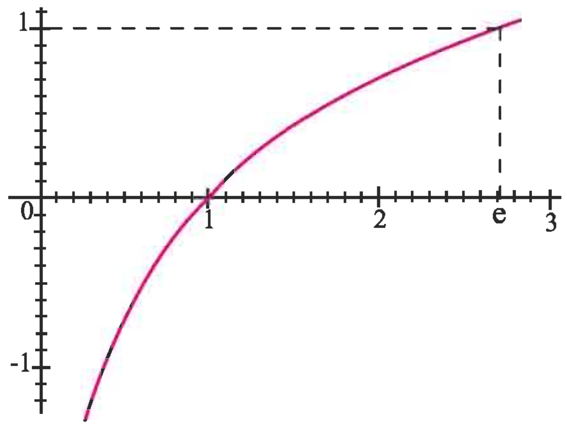
Chapitre 8

Fonction exponentielle

I. Définition et propriétés

Activité 1

1. Dans la figure ci-contre on a représenté la fonction logarithme népérien.
Donner graphiquement une valeur approchée de l'antécédent de chacun des réels $\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$



2. Montrer que la fonction $\ln : x \mapsto \ln x$ admet une fonction réciproque que l'on désignera par exp. Tracer la courbe représentative de la fonction exp.
3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction exp et ses limites aux bornes de l'ensemble de définition.
4. Que valent $\exp(0)$, $\exp(1)$, $\exp(2)$ et $\exp(-1)$?
5. Montrer que $\exp(n) = e^n$ pour n entier.
6. a. Soit a et b deux réels. Comparer $\exp(a+b)$ et $\exp(a).\exp(b)$; $\exp(a-b)$ et $\frac{\exp(a)}{\exp(b)}$.

   b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp(na) = (\exp(a))^n$, $a \in \mathbb{R}$.

Définition

On appelle fonction exponentielle la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.
L'image d'un réel x par la fonction exponentielle est noté e^x.

Conséquences

- Pour tout réel x et pour tout réel strictement positif y, $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$.
- Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$.
- Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.
- $\ln e = 1$.

Activité 2

Utiliser une calculatrice pour donner une valeur approchée de $e^{\frac{2}{3}}$, $e^{\sqrt{3}}$ et $e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Activité 3

Simplifier $e^{\ln 1}$, $e^{\ln 2}$, $e^{-\ln 3}$, $\ln\left(e^{-2}\right)$, $\ln\left(e^{-2\ln 3}\right)$.

Propriétés

Soit deux réels a et b.

P_1. $e^{a+b} = e^a \times e^b$, $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$, $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$.

P_2. Pour tout entier n , $e^{na} = \left(e^a\right)^n$.

P_3. Pour tout entier naturel $q \geq 2$, $e^{\frac{a}{q}} = \sqrt[q]{e^a}$.

P_4. Pour tout entier naturel $q \geq 2$ et tout entier p, $e^{\frac{p}{q}a} = \sqrt[q]{e^{pa}}$.

Démonstration

Les propriétés P_1 et P_2 ont été démontrées dans l'activité 1.

P_3. Soit q un entier tel que $q \geq 2$ et a un réel .

En écrivant $a = q \times \dfrac{a}{q}$, on obtient $e^a = e^{q \times \frac{a}{q}}$. De la propriété P_2 on en déduit que $e^a = \left(e^{\frac{a}{q}}\right)^q$.

Par suite $e^{\frac{a}{q}} = \sqrt[q]{e^a}$.

P_4. Soit q un entier tel que $q \geq 2$ et p un entier naturel. On peut écrire $e^{\frac{p}{q}a} = e^{\frac{1}{q}(pa)} = \sqrt[q]{e^{pa}}$.

Activité 4

Simplifier les écritures suivantes $\sqrt[6]{e^2} \times e^{\frac{3}{2}}$; $\dfrac{\sqrt{e^3}}{\sqrt{e^{-4}}}\sqrt[4]{e^2}$ et $\dfrac{\sqrt{e^{30}}}{\sqrt{e^{-42}}}\sqrt[10]{e^{-20}}$.

Activité 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $e^x = 3$.
2. $\ln x = 3$.
3. $e^{2x+3} = 4$.
4. $e^{2x+3} = e$.
5. $\left(e^x - 1\right)\left(e^x - 2\right) = 0$.
6. $e^{2x} + e^x - 3 = 0$.

Activité 6

Soit x un réel positif. Pour tout entier $n > 0$, on pose $u_n = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$.

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

II. Etude de la fonction exponentielle

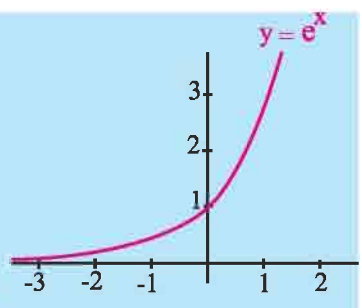
Activité 1

On désigne par C la courbe de la fonction exponentielle dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$.
2. On pose $X = e^x$.
   a. Montrer que $\dfrac{e^x}{x} = \dfrac{X}{\ln X}$
   b. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}$ puis interpréter le résultat graphiquement.
3. a. Justifier la dérivabilité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.
   b. Calculer alors $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$
   c. Dresser le tableau de variation de la fonction exponentielle.
4. Etudier l'intersection de la courbe C avec les axes du repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
5. a. Déterminer l'équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0.
   b. Soit la fonction h définie pour tout réel x par $h(x) = e^x - x - 1$.
   Etudier les variations de h et en déduire la position relative de (C) par rapport à T.
6. Tracer C et T.

Théorème

- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$.
- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est la fonction $x \mapsto e^x$.
  La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout réel x, $e^x > 0$.



Activité 2

On se propose de déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation $(E): f'(x) = f(x)$ pour tout réel x.

1. Montrer que la fonction exponentielle vérifie (E).
2. Soit f une fonction qui vérifie (E) et h la fonction définie par $h(x) = e^{-x} f(x)$

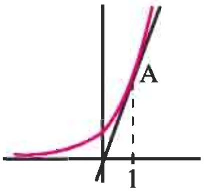
   Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a $h'(x) = 0$ pour tout réel x.
3. En déduire l'ensemble des fonctions qui vérifient (E).

Activité 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $e^{3x} \leq e^{x^2}$.
2. $e^{3x} \leq 4e^{x}$.
3. $e^{x(x-1)} > 1$.

Activité 4



Dans la figure ci-contre on a représenté la fonction $f : x \mapsto e^{x}$ ainsi qu'une tangente T qui passe par l'origine.

1. Déterminer les coordonnées du point de contact A entre C_f et T.
2. Soit n un entier naturel, montrer que la tangente à C_f au point d'abscisse $(n+1)$ passe par le point de coordonnées $(n, 0)$.

III. Limites usuelles

Activité 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x}$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer la nature de la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$.
2. a. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t}{e^{t}}$

   b. En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^{x}$ puis interpréter le résultat graphiquement.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer que C_f admet un point d'inflexion I que l'on précisera.
5. Tracer C_f en précisant la tangente T en I.

Activité 2

Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x)=e^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$.

1. Montrer par récurrence sur l'entier naturel n, que pour tout réel $x>0$, $f_n(x)\geq 0$.

2. a. Montrer que pour tous entiers naturels non nuls n et m, $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{nx}}{x^m}=+\infty$.

   b. Calculer $\lim_{x\to-\infty}\left|x^m e^{nx}\right|$.

Théorème

Soit m et n deux entiers naturels non nuls, $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{nx}}{x^m}=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty}x^m e^{nx}=0$.

Activité 2

Calculer les limites ci-dessous.

$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-e^{2x}\right)$; $\lim_{x\to+\infty}\left(x^4-x\right)e^x$; $\lim_{x\to+\infty}x\left(e^{2x}-e^x+1\right)$; $\lim_{x\to-\infty}x\left(e^{2x}-e^x\right)$;

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^x}$; $\lim_{x\to-\infty}x+1+\frac{1}{e^x+1}$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3+1}$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2-x+1}$.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{2}x^2-e^x$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Etudier les variations de f.
2. a. Montrer que C_f coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse α et que $-1<\alpha<0$.

   b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
3. a. Montrer que C_f admet un point d'inflexion I que l'on précisera.

   b. Ecrire une équation de la tangente à C_f au point I.
4. Tracer C_f.
5. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

IV. La fonction $x \mapsto e^{u(x)}$

Activité 1

Etudier et représenter la fonction $x \mapsto e^{2x}$.

Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

La fonction $h : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $h'(x) = u'(x)e^{u(x)}$, $x \in I$.

Démonstration

On peut écrire pour tout réel x de I, $h(x) = f(u(x))$ avec $f : x \mapsto e^x$ de sorte que $h = f \circ u$.

Le théorème en résulte.

Corollaire

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Les primitives sur I de la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sont les fonctions

$x \mapsto e^{u(x)} + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Activité 2

Calculer les dérivées des fonctions ci-dessous.

$x \mapsto \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$, $x \mapsto (2x+1)e^{-3x}$, $x \mapsto \dfrac{e^{2x}+1}{2e^{2x}+3}$ et $x \mapsto x^3e^{3x}$.

Activité 3

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions ci-dessous.

$x \mapsto e^{-3x}$; $x \mapsto xe^{x^2}$; $x \mapsto (2x+1)e^{x^2+x}$ et $x \mapsto \sin x\, e^{\cos x}$.

Activité 4

Calculer les intégrales ci-dessous.

$\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{(e^x+1)^2}dx$; $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}dx$; $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$ et $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x+1}dx$.

Activité 5

1. Soit la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Etudier f et représenter C_f.
2. Montrer que pour $x \geq \frac{1}{2}$, $x^2 \geq \frac{1}{2}x$.
3. Pour tout réel $\alpha > \frac{1}{2}$, on désigne par $A(\alpha)$ l'aire de la partie limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = \frac{1}{2}$.
   a. Montrer que $A(\alpha) \leq \int_{\frac{1}{2}}^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}x} dx$.
   b. En déduire que la fonction $\alpha \mapsto A(\alpha)$ possède une limite finie L quand α tend vers $+\infty$.
4. Montrer que pour tout réel $\alpha \geq 1$, $\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{-x} dx \leq A(\alpha)$.
5. Donner un encadrement de L.

Activité 6

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

1. a. Montrer que tout entier naturel n, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
   b. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{e}$.
3. En déduire que pour tout entier naturel non nul n, $I_n = \frac{n!}{e}\left[e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right]$.
4. En déduire que $e = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

V. Exponentielle de base a

Activité 1

1. Calculer les réels $e^{3\ln 2}$, $e^{4\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$, $e^{-2\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$, $e^{-2\ln\sqrt{2}}$.
2. Vérifier que pour tout réel a strictement positif et pour tout entier n, $a^n = e^{n\ln a}$.

Soit un réel $a>0$. Pour tout réel b, on pose $a^{b}=e^{b\ln a}$.

Activité 2

Soit p et q deux entiers tels que $q \geq 2$ et a un réel strictement positif.

Montrer que $a^{\frac{1}{q}}=\sqrt[q]{a}$; $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^{p}}$.

Activité 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous.

$2^{x}=\frac{1}{2}$, $10^{x+1}=2^{-x+2}$ et $\left(\sqrt{2}\right)^{x}=2^{-x+1}$

Les règles opératoires ci-dessous découlent des propriétés de la fonction logarithme népérien et de la fonction exponentielle.

Propriétés

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b et tous réels c et d,

$a^{c+d}=a^{c}\times a^{d}$; $\left(a^{c}\right)^{d}=a^{cd}$; $a^{c-d}=\frac{a^{c}}{a^{d}}$; $a^{c}\times b^{c}=(ab)^{c}$; $\frac{a^{c}}{b^{c}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{c}$.

Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit les fonctions $f: x \mapsto e^{x\ln 2}$ et $g: x \mapsto e^{-x\ln 2}$. On note C_f et C_g leurs courbes représentatives.

1. Etudier et représenter la fonction f.
2. Soit un réel a et $A(a, f(a))$ un point de C_f.
   Montrer que le symétrique de A par rapport à l'axe des ordonnées est un point de C_g.
3. Montrer que C_f et C_g sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Définition

Soit un réel $a>0$. On appelle fonction exponentielle de base a la fonction $x \mapsto a^{x}$.

Conséquences

Les résultats ci-dessous découlent de la définition précédente et des propriétés de la fonction logarithme népérien et de la fonction exponentielle.

Soit un réel $a>0$. La fonction $x \mapsto a^{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est la fonction $x \mapsto (\ln a)a^{x}$.

La fonction $x \mapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 1$.
La fonction $x \mapsto a^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $0 < a < 1$.
La fonction $x \mapsto 1^x$ est une fonction constante.

Si $a > 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.

Si $0 < a < 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$.

Tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto a^x$.

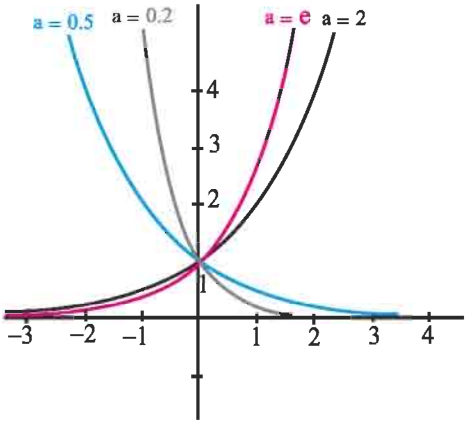
$a > 1$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

$0 < a < 1$

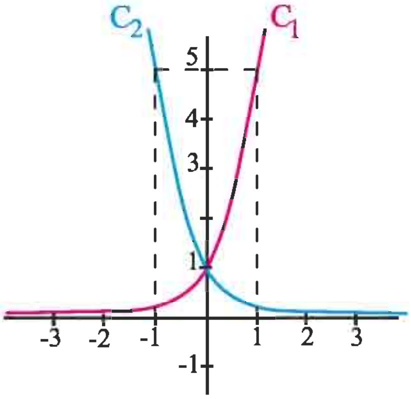
x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0

Courbes représentatives



Activité 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Le graphique ci-contre représente C_1 et C_2 deux courbes représentatives respectives des fonctions $f_{b_1} : x \mapsto (b_1)^x$ et $f_{b_2} : x \mapsto (b_2)^x$.
Déterminer les réels strictement positifs b_1 et b_2.



Activité 6

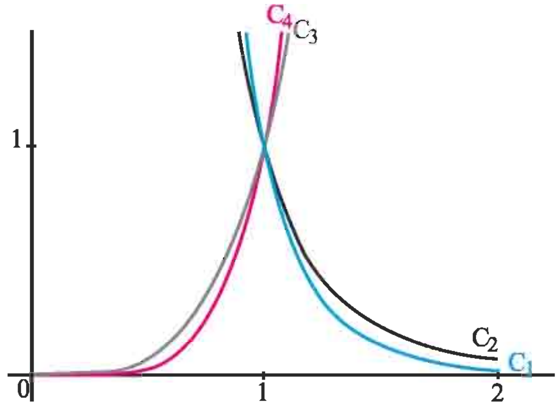
Déterminer les limites ci-dessous.

$$\lim_{x\to+\infty} 2^{x^2-2x} \; ; \; \lim_{x\to-\infty} 2^{x^2-2x} \; ; \; \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2x} .$$

VII. Fonctions puissances

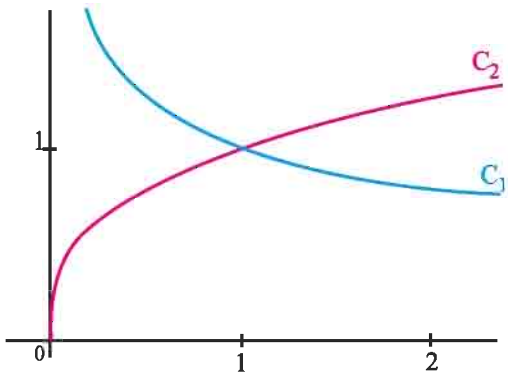
Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On a représenté les fonctions
$x \mapsto x^4$; $x \mapsto x^5$; $x \mapsto x^{-4}$; $x \mapsto x^{-5}$, $x > 0$.
Identifier chacune des fonctions.



Activité 2

On a représenté les fonctions
$x \mapsto \sqrt[3]{x}$; $x \mapsto \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$.
Identifier chacune des fonctions.



Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \sqrt{x^3}$.

1. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f(x) = e^{\frac{3}{2}\ln x}$
2. Etudier et représenter f.
3. Montrer que f est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Déterminer f^{-1}.

Activité 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\sqrt[n]{x}$, $n\geq 2$

Montrer que pour tout réel $x>0$, $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$.

Notation

Pour tout rationnel r et tout $x>0$, on note $e^{r.\ln x}=x^r$.

Définition

Soit r un rationnel. On appelle fonction puissance r la fonction $x\mapsto e^{r.\ln x}, x>0$.

Les résultats ci-dessous découlent des propriétés des limites des fonctions ln et exp.

Si $r>0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^r=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x^r=0$.

Si $r<0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^r=0$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x^r=+\infty$.

Activité 5

Calculer les limites ci-dessous.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{2}{3}}$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{3}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-\frac{4}{3}}$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{-\frac{4}{3}}$.

Théorème

Soit r un rationnel. La fonction $x\mapsto x^r$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est la fonction $x\mapsto r\,x^{r-1}$.

Corollaire

Soit r un rationnel différent de -1. Les primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x\mapsto x^r$ sont les fonctions $x\mapsto \dfrac{1}{r+1}x^{r+1}+k,\ k\in\mathbb{R}$.

Activité 6

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\begin{cases} x^{\frac{2}{3}} & \text{si } x>0, \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases}$ et $g(x)=\begin{cases} x^{\frac{10}{3}} & \text{si } x>0, \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases}$

1. a. Montrer que f et g sont continues sur $\mathbb{R}_+$.
   b. Etudier la dérivabilité de f et g à droite en 0.
2. Etudier et représenter les fonctions f et g.

3. Déterminer l'aire de la partie limitée par les courbes C_f et C_g et les droites $x=1$ et $x=2$.
4. Montrer que les fonctions précédentes sont des bijections strictement croissantes et déterminer leurs fonctions réciproques.

VIII. Croissances comparées

Activité 1

On considère les fonctions $f : x \mapsto (\ln x)^2$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$.

1. Etudier le signe de $f'(x)-g'(x)$.
3. Comparer $f(x)$ et $g(x)$.
4. Soit les fonctions $h : x \mapsto x^2$, $t : x \mapsto \sqrt{e^x}$.
   Comparer $h(x)$ et $t(x)$.

Théorème

Soit r un rationnel strictement positif.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0 \ ; \ \lim_{x\to 0^+} x^r \ln x = 0 \ ; \ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty \ .$$

Démonstration

On peut écrire $\frac{\ln x}{x^r} = \frac{1}{r}\frac{\ln x^r}{x^r}$. Il découle alors de $\lim_{x\to+\infty} x^r = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$.

On démontre de même que $\lim_{x\to 0^+} x^r \ln x = 0$.

On peut écrire pour tout $x>0$, $\frac{e^x}{x^r} = e^{x - r\ln x}$.

De plus $x - r\ln x = x\left(1 - r\frac{\ln x}{x}\right)$.

Il en résulte que $\lim_{x\to+\infty} (x - r\ln x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - r\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$.

Par suite $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty$.

Activité 2

1. Montrer que $(1+x)^{-\frac{3}{4}} \leq x^{-\frac{3}{4}}$, pour tout $x>0$.

2. Comparer alors $(1+x)^{\frac{1}{4}}$ et $1+x^{\frac{1}{4}}$ pour tout $x>0$.

Activité 3

Soit un rationnel $r>0$ et $f : x \mapsto (1+x)^r$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Dans cette question, on suppose que $0<r<1$.

Comparer $(1+x)^r$ et $1+rx$.

3. Reprendre la question précédente lorsque $r>1$.
4. Représenter f lorsque $r=\dfrac{1}{3}$ puis lorsque $r=\dfrac{5}{3}$.

Activité 4

1. Etudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.
2. En déduire les variations de la fonction $g : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$.
3. Représenter graphiquement la fonction g.

Exercice résolu 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases} \sqrt{|x-1|}e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases}$

et C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Etudier la dérivabilité de f en tout réel différent de 0 et de 1.
   b. Etudier la continuité de f en 0 et en 1.
   c. Etudier la dérivabilité de f en 1.
   d. Montrer que f est dérivable à gauche en 0.
2. a. Pour tout x non nul et différent de 1, calculer $\ln(f(x))$ et en déduire $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

   b. Etudier le sens de variation de f.
3. Etudier la limite de $f(x)$, puis celle de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter.
4. Dresser le tableau de variation de f puis représenter graphiquement f.

Solution

1. a. La fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est dérivable en tout réel non nul.

La fonction $x \mapsto \sqrt{|x-1|}$ est dérivable en tout réel différent de 1.

On en déduit que f est dérivable en tout réel non nul et différent de 1.

b. Remarquons que $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{|x-1|}=1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to -\infty} e^X = 0$,

par suite $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to +\infty} e^X = +\infty$. On en déduit que f n'est pas continue en 0.

c. Pour $x \neq 1$ et $x \neq 0$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{\sqrt{|x-1|}e^{\frac{1}{x}}}{x-1} = \dfrac{|x-1|e^{\frac{1}{x}}}{(x-1)\sqrt{|x-1|}}$.

De plus, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{|x-1|}} = +\infty$, on en déduit que f n'est pas dérivable en 1.

d. Pour $x < 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\sqrt{|x-1|}e^{\frac{1}{x}}}{x} = \sqrt{|x-1|} \times \left(\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\right)$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to -\infty} X e^X = 0$.

On en déduit que f est dérivable à gauche en 0, $f'_g(0) = 0$.

2. a. Pour $x \neq 0$ et $x \neq 1$, $\ln(f(x)) = \ln\left(\sqrt{|x-1|}\right) + \ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = \dfrac{1}{2}\ln|x-1| + \dfrac{1}{x}$.

D'après la question 1, la fonction f est dérivable en tout réel non nul différent de 1 et on peut écrire $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = (\ln\circ f)'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}\right) - \dfrac{1}{x^2}$.

b. Pour $x \neq 0$ et $x \neq 1$, $f(x) > 0$ et par suite le signe de $f'(x)$ est celui de $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x^2-2(x-1)}{2(x-1)x^2} = \frac{x^2-2x+2}{2(x-1)x^2} = \frac{(x-1)^2+1}{2(x-1)x^2}.$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $2(x-1)x^2$.

f est décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$, $]0,1[$ et croissante sur l'intervalle $]1,+\infty[$.

3. • Remarquons que $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{|x-1|}=+\infty$, de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^x = 1$,

par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

On montre de même que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

• Pour $x\neq 0$, $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\sqrt{|x-1|}}{x}e^{\frac{1}{x}}$.

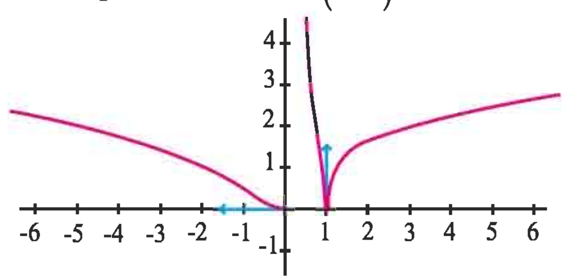
Les égalités $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{|x-1|}}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}=1$ impliquent que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

On montre de même que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

C_f admet en $-\infty$ et en $+\infty$ des branches paraboliques de direction $(O,\vec{i})$.

4.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$+$	
f	$+\infty$ ↘		0 ‖ $+\infty$ ↘		0	↗	$+\infty$



Exercice résolu 2

1. a. Montrer $e^{-t}(1+t)\leq 1,\ t\geq 0$.

b. En déduire les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $u(t)=\dfrac{e^{-t}-1}{t}$.

2. Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $F(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt & \text{si } x>0,\\ \ln 2 & \text{si } x=0.\end{cases}$

a. Montrer que $F(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^{-t}-1}{t}dt+\ln 2,\ x>0$.

b. Montrer que $e^{-x}-1\leq\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^{-t}-1}{t}dt\leq\frac{e^{-2x}-1}{2},\ \ x>0$.

c. En déduire que F est continue sur $[0,+\infty[$.

3. Montrer que $e^{-2x}\ln 2\leq F(x)\leq e^{-x}\ln 2,\ \ x>0$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

4. Montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et préciser $F'_d(0)$.

5. Tracer la courbe représentative de F dans un repère.

Solution

1. a. Soit $t \geq 0$. On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t)=(1+t)e^{-t}-1$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \geq 0$, $f'(t)=e^{-t}-(1+t)e^{-t}=-te^{-t}$.

On en déduit que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, $f(0)=0$. Alors $f(t) \leq 0$ pour tout $t \geq 0$. Le résultat en découle.

b. La fonction $u: t \mapsto \dfrac{e^{-t}-1}{t}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Sa fonction dérivée est définie par $u'(t)=\dfrac{1-e^{-t}(t+1)}{t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$.

D'après la question 1. a. $e^{-t}(1+t) \leq 1$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$.

On en déduit que u est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. a. Soit $x > 0$. $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-t}-1}{t}dt = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_x^{2x} \frac{1}{t}dt = F(x)-[\ln t]_x^{2x} = F(x)-\ln 2$.

b. La fonction u étant croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $x > 0$ et pour tout $t \in [x, 2x]$, $u(x) \leq u(t) \leq u(2x)$.

Par conséquent $\displaystyle\int_x^{2x} u(x)dt \leq \int_x^{2x} u(t)dt \leq \int_x^{2x} u(2x)dt$. Le résultat en découle.

c. D'après la question 2. b. $\displaystyle e^{-x}-1 \leq \int_x^{2x} \frac{e^{-t}-1}{t}dt \leq \frac{e^{-2x}-1}{2}$ pour tout $x > 0$.

De plus $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-2x}-1}{2}=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} e^{-x}-1=0$ alors $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^{-t}-1}{t}dt=0$.

Par conséquent $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} F(x)-\ln 2=0$. Il en résulte que f est continue à droite en 0.

Continuité de F sur $]0, +\infty[$

Soit G une primitive de $v: t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. $F(x)=G(2x)-G(x)$.

La fonction G est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus $2x > 0$, on déduit que la fonction $x \mapsto G(2x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par conséquent F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Soit un réel $x > 0$ et t un réel de l'intervalle $[x, 2x]$.

$x \le t \le 2x$ équivaut à $-2x \le -t \le -x$

équivaut à $e^{-2x} \le e^{-t} \le e^{-x}$

équivaut à $\dfrac{e^{-2x}}{t} \le \dfrac{e^{-t}}{t} \le \dfrac{e^{-x}}{t}$.

Par conséquent $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-2x}}{t}dt \le F(x) \le \int_x^{2x} \frac{e^{-x}}{t}dt$.

De l'égalité $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t} = \ln 2$ découle $e^{-2x}\ln 2 \le F(x) \le e^{-x}\ln 2$. Par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

4. **Dérivabilité de F à droite en 0**

D'après 2. b. $e^{-x} - 1 \le \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-t}-1}{t}dt \le \frac{e^{-2x}-1}{2}$, $x > 0$.

Par conséquent $\dfrac{e^{-x}-1}{x} \le \dfrac{F(x)-\ln 2}{x} \le \dfrac{e^{-2x}-1}{2x}$.

Les égalités $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{e^{-2x}-1}{2x} = -1$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{e^{-x}-1}{x} = -1$ impliquent que $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{F(x)-F(0)}{x} = -1$.

Par suite la fonction F est dérivable à droite en 0 et $F'_d(0) = -1$.

Dérivabilité de F sur $\mathbb{R}_+^*$

On sait que pour $x > 0$, $F(x) = G(2x) - G(x)$ où G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction $x \mapsto 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $2x > 0$.

Par suite F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout

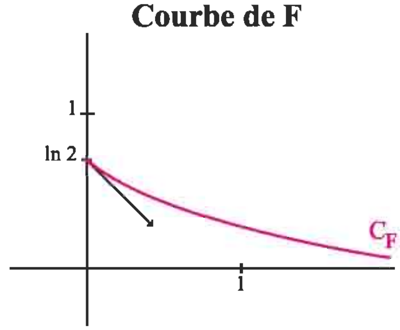
$x \in \mathbb{R}_+^*$, $F'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = \dfrac{2e^{-2x}}{2x} - \dfrac{e^{-x}}{x} = \dfrac{e^{-2x}-e^{-x}}{x} = \dfrac{e^{-x}\left(e^{-x}-1\right)}{x}$.

5. Pour tout $x > 0$, $e^{-x} - 1 < 0$ d'où $F'(x) < 0$ pour tout $x > 0$.

Tableau de variation de F

x	0		$+\infty$
F'(x)	-1	$-$	
F	$\ln 2$	$\searrow$	0

Courbe de F



• La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à la courbe de F au voisinage de $+\infty$.
• La courbe de F admet au point d'abscisse 0 une demi tangente de coefficient directeur -1.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Le réel $e^{-3\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$ est égal à

☐ $-\frac{1}{8}$. ☐ 8. ☐ -6.

2. Le réel $2e^{x+y}$ est égal à

☐ e^{2x+2y}. ☐ $e^{2x}e^{2y}$. ☐ $2e^{x}e^{y}$.

3. L'équation $e^{x}=\frac{1}{e}$ est équivalente à

☐ $x=-1$. ☐ $x=\ln e$. ☐ $x=e$.

4. L'inéquation $-2<e^{x^2-1}<1$ est équivalente à

☐ $e^{x^2-1}>0$. ☐ $x^2>1$. ☐ $-1<x<1$.

5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{2e^x}{x^4}-\frac{1}{x^2}$.

☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$. ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

6. Sur $\mathbb{R}_+^*$ la dérivée de $f : x \mapsto \frac{e^x}{x}$ est

☐ $f'(x)=e^x$. ☐ $f'(x)=\frac{x-1}{x^2e^{-x}}$. ☐ $f'(x)=\frac{e^x(x+1)}{x^2}$.

7. L'intégrale $\int_0^1 xe^{x^2}dx$ est égale à

☐ $e-1$. ☐ $\frac{1}{2}e$. ☐ $\frac{1}{2}(e-1)$.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et égale à sa dérivée.
2. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\ln x<x<e^x$.
3. Soit r un rationnel différent de 1.
   La fonction $x\mapsto x^{r+1}$ est une primitive de $x\mapsto x^r$ sur $]0,+\infty[$.
4. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ est paire.
5. L'équation $\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1$ est équivalente à $e^x=1$.

1 1. Simplifier les écritures ci-dessous.

$e^{5\ln(3)}$ et $e^{-3\ln(2)}$.

2. Soit x un réel, Ecrire plus simplement les réels ci-dessous.

$e^{x}.e^{-2x}$, $e.e^{x}$, $\left(e^{-x}\right)^{2}$, $\dfrac{e^{x}}{e^{-x}}$,

$\dfrac{e^{2x}}{e^{1-x}}$ et $\dfrac{\left(e^{x}\right)^{4}}{e^{2x}}$.

3. Vérifier que pour tout réel x,

a. $e^{2x}+e^{-2x}+2=\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}$.

b. $\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

4. a. Montrer que,

si $1\leq e^{x}\leq 2$ alors $\dfrac{1}{4}\leq e^{-2x}\leq 1$.

b. Montrer que,

si $1\leq e^{x}\leq 9$ alors $2\leq 2e^{\frac{x}{2}}\leq 6$.

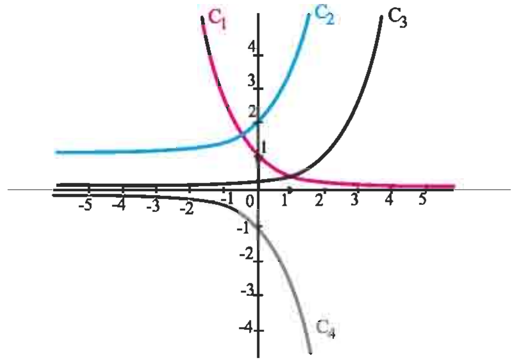
2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes.

1. $\left(x^{2}-5x+4\right)e^{x}=0$.
2. $e^{\frac{x}{4}}=\dfrac{1}{e}$.
3. $e^{3x}-e^{-x}=0$.
4. $e^{2x}+e^{x}-2=0$.
5. $e^{x}-5e^{-x}+4=0$.
6. $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=4$.
7. $e^{-x}\leq 1$.
8. $e^{-3x}\geq 0$.
9. $e^{2x}-\dfrac{1}{e^{x}}\geq 0$.
10. $2-e^{\frac{1}{x}}>0$.
11. $e^{x}+\dfrac{2}{e^{x}}-3\leq 0$.

3 On a représenté dans un même repère les courbes représentatives des fonctions

$f:x\mapsto -e^{x}$, $g:x\mapsto e^{-x}$, $h:x\mapsto \dfrac{1}{e^{2-x}}$ et

$k:x\mapsto 1+e^{x}$.



Associer chaque fonction à sa courbe.

4 Pour tout entier naturel n, on pose $S_n=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{e^{k}}$.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\dfrac{e}{e-1}$.

5 Déterminer les limites suivantes.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2}-e^{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{3x}-2e^{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 2e^{x}-\dfrac{1}{x}$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^{x}-\dfrac{1}{x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-(1-x)}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^{2}-2x+3\right)e^{x}$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^{2}-x\right)e^{x}$; $\lim\limits_{x\to0^{+}} xe^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3}-e^{2x}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{\sqrt{x+1}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-e^{x}}{x^{2}+x}$; $\lim\limits_{x\to0^{+}} \dfrac{e^{\frac{-1}{x}}}{x}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2}\left(e^{2x}-e^{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{2x}-1}{x}$;

$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{1-e^{-x}}$; $\lim\limits_{x\to0^{+}} \dfrac{e^{x}-1}{\sqrt{2x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} x(e^{\frac{1}{x^{2}}}-1)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x(e^{\frac{1}{x}}-1)}{e^{\frac{1}{x}}+1}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2}(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}})$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2}(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}})$.

6 Pour chacune des fonctions suivantes, donner la dérivée f' sur l'intervalle I.

1. $f : x \mapsto 2x - e^{-x}$, $I = \mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto x^2 + e^{\frac{1}{x}}$, $I = \mathbb{R}_+^*$.
3. $f : x \mapsto xe^{-x}$, $I = \mathbb{R}$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{e^x}$, $I = \mathbb{R}$.
5. $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x}-1}{x^2+1}$, $I = \mathbb{R}$.
6. $f : x \mapsto 2x - 2\ln(1+e^x)$, $I = \mathbb{R}$.
7. $f(x) = e^x \ln(x)$, $I = \mathbb{R}_+^*$.
8. $f(x) = e^{-x}(e^{2x} + e^x - 1)$, $I = \mathbb{R}$.
9. $f : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $I = \mathbb{R}$.

7 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

On note C sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. On sait que la courbe C passe par le point $A(0,1)$ et qu'elle admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1. On sait aussi que $f'(0) = -6$.

Déterminer a, b et c.

8 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$.

1. calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Pour tout entier non nul n, on note $f^{(n)}$ la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f. Montrer que $f^{(n)}(x) = (-1)^n (x^2 + a_n x + b_n)e^{-x}$, où a_n et b_n sont des réels.

Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} à l'aide de a_n et b_n .

3. Donner l'expression de a_n et b_n en fonction de n.
4. En déduire l'expression de $f^{(100)}$.

9 Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de f sur l'intervalle I.

1. $f : x \mapsto e^{2x}$, $I = \mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto xe^{x^2+1}$, $I = \mathbb{R}$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{e^{\tan x}}{\cos^2(x)}$, $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
4. $f : x \mapsto \sin(2x)e^{\cos^2(x)}$, $I = \mathbb{R}$.
5. $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}}$, $I =]1, +\infty[$.
6. $f : x \mapsto \sqrt{e^x}$, $I = \mathbb{R}$.
7. $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$, $I = \mathbb{R}$.
8. $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x}-1}{1+e^{2x}}$, $I = \mathbb{R}$.
9. $f : x \mapsto xe^{2x^2}$, $I = \mathbb{R}$.

10 1. Calculer les intégrales suivantes.

a. $\displaystyle\int_0^1 (1+e^x)dx$.

b. $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2} dx$.

c. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$.

d. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{1+e^x}$.

e. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x} e^{\ln(x)} dx$

f. $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx$.

g. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$.

2. Calculer à l'aide des intégrations par parties les intégrales suivantes.

a. $\displaystyle\int_1^2 2xe^{-x} dx$.

b. $\int_0^1 \frac{x^3}{e^{x^2}}dx$.

c. $\int_0^{-\ln(2)} \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}dx$.

d. $\int_1^0 x^2e^xdx$.

e. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin x dx$.

11 1. Montrer que pour tout $t>0$, $t+\frac{1}{t}\geq 2$.

2. En déduire que pour tout réel x,

$e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\geq 2$ et $\ln(1+e^x)\geq \frac{x}{2}+\ln 2$.

12 1. Montrer que pour tout réel $x\geq 0$,

$0\leq e^x-1\leq xe^x$.

2. En déduire que pour tout réel $x\geq 0$,

$0\leq e^x-1-x\leq \frac{x^2}{2}e^x$.

13 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x)=\frac{2+e^x}{1+e^x}$.

1. Trouver des réels a et b tels que pour tout réel x,

$f(x)=a+\frac{be^x}{1+e^x}$.

2. Calculer $\int_0^1 \frac{2+e^x}{1+e^x}dx$.

14 Soit la fonction $f:x\mapsto x-2+e^{-\frac{x}{2}}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier les variations de f.
2. a. Vérifier que la droite $D: y=x-2$ est une asymptote à C_f.
b. Tracer D et C_f.
3. Soit $\lambda>0$ et la droite $\Delta: x=\lambda$.

On note $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par C_f, D, Δ et l'axe des ordonnées.

Calculer $\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

15 Soit la fonction $f:x\mapsto \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier la parité de f.
2. a. Etudier les variations de f.
b. Tracer C_f.
3. Soit $\lambda>1$ et la droite $\Delta: x=\lambda$.

On note $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par C_f, Δ, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

Calculer $A(\lambda)$.

16 1. a. Montrer que pour tout réel non nul x,

$e^x>1+x$.

b. En déduire que

i. Pour tout réel non nul x on a $e^{-x}>1-x$.

ii. Pour tout réel x de $]0,1[$ on a $e^x<\frac{1}{1-x}$.

2. Soit les suites (u_n) et (v_n) définies par

$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et $v_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n\geq 1$.

a. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $u_n<e<v_n$.

b. Sachant que $2<e<3$, montrer que $v_n-u_n\leq \frac{3}{n}$

c. En déduire un encadrement de e d'amplitude 10^{-6}.

17 1. Calculer les intégrales $A=\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$ et

$B=\int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$.

2. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $t>0$, $\frac{1}{(1+t)^2}=a+\frac{bt}{(1+t)}+\frac{ct}{(1+t)^2}$.

En déduire la valeur de $I=\int_0^1 \frac{1}{\left(1+e^x\right)^2}dx$.

3. On pose $J=\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3}dx$.

Exprimer J en fonction de I et en déduire la valeur de J.

18 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2-e^{\frac{1}{x}}>0$.

2. Soit la fonction $f : x \mapsto \ln\left(2-e^{\frac{1}{x}}\right)$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

b. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

c. En déduire que f est prolongeable par continuité à gauche en 0 (on note g le prolongement ainsi obtenu).

3. a. Etudier la dérivabilité de g à gauche en 0.

b. Déterminer les intervalles sur lesquels g est dérivable et expliciter $g'(x)$.

4. Etudier les variations de g et tracer sa courbe C_g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

19 Soit un réel $a>0$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $G_a : x \mapsto e^{-ax^2}$.

1. Démontrer que G_a est dérivable et calculer sa dérivée.

2. En déduire le tableau de variation de G_a .

3. Calculer la dérivée seconde de G_a et démonter que la courbe de G_a admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

4. Déterminer le lieu des points d'inflexion des courbes de G_a lorsque a varie.

5. Tracer les courbes de G_a pour $a=\frac{1}{2}$,1 et 2.

20 Soit f la fonction définie par

$f(x)=\left|3x^2-1\right|e^{1-x^2}$.

1. Vérifier que f est paire.

2. Etudier la limite de f en $+\infty$.

3. Etudier la continuité de f.

4. Etudier la dérivabilité de f en $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

5. Dresser le tableau de variation de f .

6. Donner une représentation graphique de f.

21 Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\sin x\,dx$ et

$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\cos x\,dx$.

1. calculer I_0 et J_0 .

2. On suppose n non nul.

En intégrant par parties I_n , puis J_n , montrer que

$$\begin{cases} I_n+nJ_n=1, \\ -nI_n+J_n=e^{-\frac{n\pi}{2}}. \end{cases}$$

3. En déduire les expressions de I_n et J_n en fonction de n.

4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

22 Pour tout entier naturel n, on pose

$I_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-nx}\sin x\,dx$.

1. A l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que $I_n=(-1)^n e^{-n^2\pi}\frac{1+e^{-n\pi}}{n^2+1}$.

2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

23 Soit n un entier naturel et m un entier non nul.

On pose,

$I(n,m)=\int_0^1 t^n(1-t)^m\,dt$ et $I(n,0)=\frac{1}{n+1}$.

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $I(n,m)=\frac{m}{n+1}I(n+1,m-1)$.

2. Montrer que $I(n,m)=\frac{n!m!}{(n+m)!}I(n+m,0)$.

Montrer alors que $I(n,m)=\frac{n!m!}{(n+m+1)!}$.

24 Soit la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0=\frac{1}{2}, \\ u_{n+1}=\frac{e^{u_n}}{u_n+2},\ n\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Dans cet exercice, on se propose de montrer que (u_n) est convergente et de donner une valeur approchée de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

1. On considère la fonction définie sur $[0,1]$ par

$f(x)=\frac{e^x}{x+2}$.

a. Etudier les variations de f.

b. Montrer que pour tout x de $[0,1]$, $|f'(x)|\le\frac{e}{4}$.

c. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $[0,1]$.

2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\le u_n\le 1$.

3. a. Justifier l'égalité $f(x)-f(\alpha)=\int_\alpha^x f'(v)\,dv$.

b. En déduire que pour tout entier n, $|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{e}{4}|u_n-\alpha|$.

c. Montrer alors que pour tout entier n, $|u_n-\alpha|\le\frac{1}{2}\left(\frac{e}{4}\right)^n$.

En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

25 Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3}\right)^x$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x}{2^{x^2+x}}$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}$.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x+3^{x+1}}{2^x+2^{x-1}}$.
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{2}{3}}$.
7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{2^x}$.
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{3}}e^{-x}$.
9. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{4}{3}}\right)\ln x$.
10. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x-e^x$.

26 Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$f(x)=\ln(2^x)-\ln(x^2)$.

1. Calculer $f(2)$ et $f(4)$.
2. Etudier les variations de la fonction f et en déduire son signe.
3. Comparer x^2 et 2^x.

27 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer le sens de variation de f.

En déduire le nombre de solutions de l'équation $3^x+4^x=5^x$.

28 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$f(x)=\frac{4^x}{4^{2x}-1}$.

1. Montrer que f est impaire.
2. Etudier les variations de f sur $]0,+\infty[$.
3. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=\frac{4}{15}$

b. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x)=-\frac{4}{15}$

29 Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 3^x dx$.
2. $\int_0^{-1} \frac{3^x}{1+3^x} dx$.
3. $\int_0^{\frac{1}{\ln(2)}} 2^x\left(1+2^x\right)^2 dx$.
4. $\int_1^2 x^{\frac{4}{3}} dx$.
5. $\int_{\frac{1}{2}}^1 4x^{-\frac{1}{5}} dx$.
6. $\int_0^1 \sqrt[4]{x}\, dx$.
7. $\int_{\frac{1}{2}}^1 (3x-1)^{\frac{3}{2}} dx$.

30 Le but de l'exercice est de calculer

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^x \cos^2(x)dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^x \sin^2(x)dx$.

1. Montrer que $I+J=\frac{\sqrt{2^\pi}-1}{\ln 2}$.
2. Soit $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^x \cos(2x)dx$.

A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que $K=-\frac{\ln 2}{2}\left[\frac{\sqrt{2^\pi}+1}{2}+\frac{\ln 2}{2}K\right]$.

En déduire la valeur de $I-J$.

3. Donner les valeurs de I et J.

31 1. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x^{-\alpha}$, où α est un rationnel strictement supérieur à 1.

Etudier les variations de f sur $]0,+\infty[$.

2. Soit (S_n) la suite définie par $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$, $n\geq 1$.

Soit k un entier supérieur où égal à 1.

Montrer que pour tout x de $[k,k+1]$,

$\frac{1}{(k+1)^\alpha}\leq\int_k^{k+1} f(x)dx\leq\frac{1}{k^\alpha}$.

3. a. Montrer que pour tout entier n,

$\int_1^{n+1} f(x)dx\leq S_n\leq S_1+\int_1^n f(x)dx$.

b. Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée.

c. En déduire que la suite (S_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite.

d. Déterminer un réel α tel que la suite (S_n) converge vers un réel compris entre 2007 et 2008.

32 A/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x)=1+x-e^{-\frac{x}{2}}$.

On désigne par C_f sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. a. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b. Montrer que la droite D d'équation $y=x+1$ est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$.

c. Etudier la position de C_f par rapport à D.

2. a. Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe.

b. En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. Tracer dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe C_f et la droite D (Unités graphiques 2 cm).

B/ Soit un entier $n > 0$, on désigne par A_n l'aire, en unités d'aires, de la partie du plan limitée par la droite D, la courbe C_f et les droites d'équations $x = n$ et $x = n+1$.

1. Exprimer A_n en fonction de n.
2. En déduire que la suite (A_n) est géométrique. On précisera sa raison q et son premier terme A_1.
3. Exprimer la somme $S_n = A_1 + A_2 + ... + A_n$ en fonction de n. Que représente S_n graphiquement ?
4. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

33 On considère la fonction numérique f de la variable réelle x, définie sur $[0, +\infty[$ par

$f(x) = \sqrt{x}\, e^{1-x}$.

On note C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
Interpréter graphiquement.
2. a. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et donner l'expression de $f'(x)$ pour tout réel x strictement positif.
b. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.
Donner une interprétation graphique de ce résultat.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Tracer la courbe C.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ a deux solutions, l'une α dans l'intervalle $]0, \frac{1}{2}[$ et l'autre β dans $]\frac{1}{2}, +\infty[$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

34 A/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$g(x) = 2e^x - x - 2$.

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Etudier le sens de variation de g et puis dresser son tableau de variation.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions réelles 0 et α telle que $-1.6 \le \alpha \le -1.5$.
4. En déduire le signe de g.

B/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
Etudier les variations de f.
3. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{-(\alpha^2 + 2\alpha)}{4}$.
En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Tracer la courbe C de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
6. Soit m un réel négatif.
a. Calculer $\int_m^0 xe^x dx$.
b. Calculer alors $\int_m^0 f(x)dx$.
c. Déterminer $\lim\limits_{m \to -\infty} \int_m^0 f(x)dx$.

35 A/ Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$\varphi(x) = (x^2 + x + 1)\, e^{-x} - 1$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$.
2. Etudier les variations de φ puis dresser son tableau de variations.
3. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une α dans l'intervalle $[1,+\infty[$. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
4. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$.

B/ On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x+1)e^{-x}$ et $g(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.

On note C_f et C_g leurs courbes représentatives dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Vérifier que C_f et C_g passent par $A(0,1)$.

Montrer que C_f et C_g admettent en ce point la même tangente.

2. a. Vérifier que $f(x)-g(x) = \dfrac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$.

b. Etudier le signe de $f(x)-g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire la position relative de C_f et C_g.

3. a. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=-(2x+3)e^{-x}$.

Vérifier que $F'(x)=f(x)$, pour tout x dans $\mathbb{R}$.

b. En déduire la primitive sur $\mathbb{R}$ de $f-g$ qui s'annule en 0.

36 A/ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x}\ln\left(1+e^{x}\right)$.

et on note C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par

$g(t)=\dfrac{t}{1+t}-\ln(1+t)$.

Etudier les variations de g sur $[0,+\infty[$ et en déduire le signe de $g(t)$.

2. a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f'(x)=e^{-x}\left[\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}-\ln\left(1+e^{x}\right)\right]$.

b. Etudier le sens de variations de f.

3. a. Montrer que pour tout réel x,

$f(x)=xe^{-x}+e^{-x}\ln\left(1+e^{-x}\right)$.

b. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

c. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

4. Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe C.

B/ On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0=0.5, \\ u_{n+1}=f(u_n),\ n\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

1. a. Démontrer que l'équation $f(x)=x$ admet une seule solution notée α. Montrer que $0.5\le x\le 0.6$.

b. Démontrer que pour tout réel x tel que $0.5\le x\le 0.6$, $0.5\le f(x)\le 0.6$ et $-0.25\le f'(x)\le 0$.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n,

$\left|u_{n+1}-\alpha\right|\le 0.25\left|u_n-\alpha\right|$.

Montrer par récurrence que $\left|u_n-\alpha\right|\le(0.25)^n\times 0.1$.

b. En déduire que la suite (u_n) converge vers α .

c. Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n\ge n_0$, $\left|u_n-\alpha\right|\le 5\times 10^{-4}$.

C/ L'objet de cette partie est l'étude d'une primitive de f.

1. Montrer que pour tout réel x,

$f'(x)+f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

2. En utilisant la question précédente, calculer une primitive F de f.

37 Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On se propose d'étudier, pour tout entier $n>0$, les fonctions f_n définies sur $[0,+\infty[$

par $f_n(x)=\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)e^{-x}$.

1. a. Justifier que f_n est dérivable sur $[0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

c. Etudier le sens de variation de f_n.

2. a. Montrer que pour tout réel $x\in[0,1]$,

$\dfrac{-1}{n!}\le f_n'(x)\le 0$.

b. En déduire que $\dfrac{-1}{n!}\le f_n(x)-1\le 0$.

3. En utilisant l'encadrement précédent, déterminer la limite de la somme $\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie B

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ et $a_n = \ln(u_n)$.

1. Vérifier que pour tout entier $n \geq 2$,
$a_n = -\frac{\ln\left(1+(-\frac{1}{n})\right)}{(-\frac{1}{n})}$.
2. En déduire que la suite (a_n) est convergente.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

38 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$.
On note C sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A/ 1. a. Montrer que le point $A(0,1)$ est un centre de symétrie de C.
b. Déterminer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats.
c. Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction f.
2. a. Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe C au point A.
b. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - f(x+1)$.

Montrer que pour tout réel x, $g'(x) = -\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$.

a. En déduire le sens de variation de la fonction g (on précisera $g(0)$).
b. En déduire la position de C et Δ.

3. Tracer la courbe C et Δ.

B/ Dans cette partie, on désigne par I, l'intervalle $[2,3]$.
1. a. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = x$ si, et seulement si, $g(x) = -1$.
b. En déduire que la droite D d'équation $y = x$ coupe la courbe C en un seul point dont l'abscisse α est telle que $2 < \alpha < 3$.
2. On suppose que pour tous réels x et x' de I, $|f(x) - f(x')| \leq \frac{1}{2}|x - x'|$.
En déduire que, pour tout réel x de I, $|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.
3. On définit la suite (u_n) d'éléments de l'intervalle I telle que $\begin{cases} u_0 = 3, \\ u_{n+1} = f(u_n),\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

a. Montrer que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|3 - \alpha|$.
b. Déterminer un entier p tel que u_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
c. Donner en utilisant la calculatrice une valeur approchée de u_p.

39 A/ On désigne par g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = e^x - \ln(x) - xe^x + 1$.
1. Déterminer la limite de g en 0.
2. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
3. Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.
5. Justifier que $\alpha \in]1.23, 1.24[$ (*).
6. Donner le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

B/ On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - \ln(x)} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$
On désigne par C la représentation graphique de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Etudier la dérivabilité de f en 0.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.
4. Montrer que $f'(x)$ est de même signe que $g(x)$.
En déduire les variations de f puis dresser son tableau de variation.
5. Monter que $f(\alpha)=\dfrac{1}{e^{\alpha}-\dfrac{1}{\alpha}}$.

C/ 1. Etudier le sens de variation de la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{1}{e^{x}-\dfrac{1}{x}}$.
2. En utilisant l'encadrement $(*)$ du réel α, déterminer un encadrement de $f(\alpha)$.
En déduire que 0.38 est une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2}.
3. Tracer la courbe C et préciser ses tangentes aux points d'abscisses 0 et α.

40 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A/ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{2}x+\left(\frac{1-x}{2}\right)e^{2x}$.
On désigne par C la courbe représentative de f. (On prendra 2cm pour unité graphique)
1. a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
b. Montrer que la droite Δ d'équation $y=\frac{1}{2}x$ est une asymptote à la courbe C.
c. Etudier la position de la droite Δ par rapport à la courbe C.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.
3. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=1+(1-2x)e^{2x}$.
a. Etudier le sens de variation de u.
b. Montrer que l'équation $u(x)=0$ possède, dans l'intervalle $[0,1]$, une solution unique α.
c. Déterminer une valeur approchée décimale de α par excès à 10^{-2} près.
d. Déterminer le signe de $u(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

B/ On considère la courbe C' d'équation $y=e^{x}$ et la droite Δ' d'équation $y=x$.
1. Pour tout réel t, on désigne par M_t le point de C' d'abscisse t. La tangente T à la courbe C' au point M_t coupe l'axe des ordonnées au point N_t.
Déterminer les coordonnées du point N_t.
2. Pour tout réel t, on désigne par P_t le point de Δ' d'abscisse t et par G_t le barycentre des points pondérés $(O,1)$, $(M_t,1)$, $(P_t,1)$ et $(N_t,1)$.
a. Placer les points M_{-2}, P_{-2} et N_{-2} puis construire en le justifiant le point G_{-2}.
b. Déterminer en fonction de t, les coordonnées du point G_t.
3. Quel est l'ensemble des points G_t, quand t décrit $\mathbb{R}$?

C/ 1. Construire la courbe C.
2. Calculer l'aire $\mathcal{A}$, en cm^2, de la partie du plan délimitée par la courbe C, la droite Δ et les droites d'équations $x=0$ et $y=0$.

41 On se propose d'étudier la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\begin{cases}(x+1)e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x>0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
1. Etude des variations de f.
a. Montrer que la dérivée f' de f sur $[0,+\infty[$ est de la forme $e^{-\frac{1}{x}}Q(x)$, où Q est une fonction rationnelle.
b. Déterminer la limite de $(1+t)e^{-t}$ lorsque t tend vers $+\infty$.
En déduire que f est dérivable à droite en 0 et déterminer $f'_d(0)$.
c. Etudier le sens de variation de f.
d. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

e. Montrer que l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution α dans $[0,+\infty[$ dont on donnera un encadrement à 10^{-1} près.

2. Etude d'une fonction auxiliaire.
Soit φ la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\varphi(t)=1-(1+t)e^{-t}$.

a. Calculer la dérivée de φ.

b. Prouver que, pour tout réel positif ou nul t, $0 \le \varphi(t) \le \frac{1}{t^2}$.

3. Etablir que , pour tout réel strictement positif x, $0 \le x-f(x) \le \frac{1}{2x}$.
En déduire que C admet une asymptote D au voisinage de $+\infty$ et préciser la position de C par rapport à D.

4. Soit a un réel strictement positif et T_a la tangente à C au point d'abscisse $\frac{a}{1+a+a^2}$.

a. Déterminer une équation de T_a.

b. Déterminer l'intersection de T_a avec l'axe des abscisses.

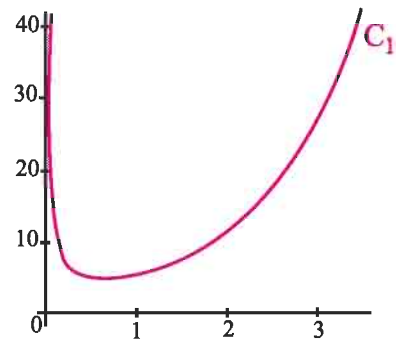
5. Construire C et D. On placera le point de C d'ordonnée 2 et on précisera les tangentes à C aux points d'abscisses $\frac{1}{3}$, 1 et 3

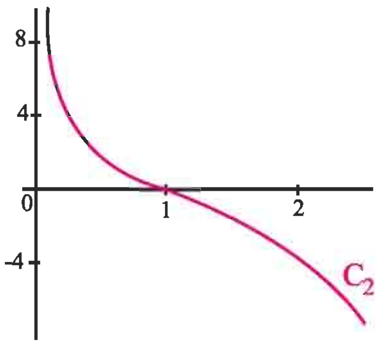
42 Pour tout réel $k \le 0$, on considère la fonction f_k définie sur $]0,+\infty[$ par $f_k(x)=\frac{kx+1}{x}e^x$.

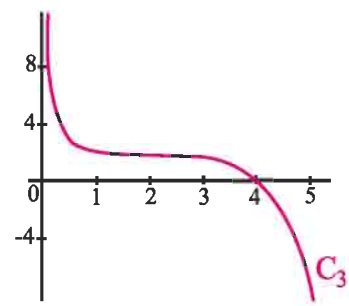
1. Déterminer les limites de f_k en 0 et en $+\infty$.

2. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x de $]0,+\infty[$ et déterminer le nombre de solution de l'équation $f_k'(x)=0$.

3. On a représenté ci-après les fonctions f_{-1}, $f_{-0.25}$ et f_0.
Identifier la courbe de chaque fonction.







4. Pour tout réel a strictement positif, on pose $A(a)=\int_a^{a+1} f_0(x)dx$.

a. Que représente le réel $A(a)$?

b. Etudier le sens de variation de $a \mapsto A(a)$.

c. Déterminer a pour que l'aire du domaine limité par C_0, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=a+1$ soit minimale.

43 A/ 1. Montrer que l'équation $(E): x+\ln x=0$ admet une unique solution α appartenant à $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$.

2. Soit φ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ définie par $\varphi(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

a. Vérifier que $\varphi(x)=x$, si et seulement si, $\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

b. En déduire que $\frac{1}{\alpha}$ est l'unique solution de $\varphi(x)=x$ dans $]0,+\infty[$.

c. Montrer que pour tout x de $[\frac{3}{2}, 3]$, $|\varphi'(x)|\leq\frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}}$.

3. Soit (v_n) la suite définie par $v_0=2$ et $v_{n+1}=\varphi(v_n)$ pour tout entier naturel n.

a. Montrer que pour tout entier n, $\frac{3}{2}\leq v_n\leq 2$.

b. Démontrer que pour tout entier n, $\left|v_{n+1}-\frac{1}{\alpha}\right|\leq\frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}}\left|v_n-\frac{1}{\alpha}\right|$.

c. En déduire que (v_n) est convergente et déterminer sa limite.

B/ **Etude d'une fonction.**
On considère la fonction f définie par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x+\ln x} & \text{si } x\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{\alpha\},\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.
2. Etudier les variations de f et tracer sa courbe C dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
(On prendra $\alpha\simeq 0.6$).

C/ **Encadrement d'une aire.**

Pour tout entier non nul n, on pose $u_n=\int_1^2\left(\frac{\ln x}{x}\right)^n dx$.

1. Calculer u_1.

2. Montrer à l'aide de deux intégrations par parties que $u_2=1-\ln 2-\frac{(\ln 2)^2}{2}$.

3. Soit un réel $x>0$ et n un entier naturel non nul. Simplifier la somme
$1-\frac{\ln x}{x}+\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2+\ldots(-1)^n\left(\frac{\ln x}{x}\right)^n$.

4. Pour tout entier non nul n, on pose $I_n=1-u_1+u_2+\ldots+(-1)^n u_n$ et $I=\int_1^2 f(x)dx$.

a. Montrer que $I-I_n=\int_1^2(-1)^{n+1}f(x)\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1}dx$.

b. Montrer que pour tout $x>0$, $\frac{\ln x}{x}\leq\frac{1}{e}$, puis que $|I-I_n|\leq\frac{1}{e^{n+1}}$.

c. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

d. Vérifier que $I_2-\frac{1}{e^3}\leq I\leq I_2$.

D/ **Fonction définie à l'aide d'une intégrale.**

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $F(x)=\int_1^{e^x} f(t)dt$.

1. Etudier la dérivabilité de F et déterminer $F'(x)$.
2. Vérifier que pour tout $t\geq 1$, $\frac{t}{t+\ln t}\geq\frac{1}{2}$.
3. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$.
4. Donner l'allure de la courbe de F.