Chapitre 3

Dérivabilité

" [...] Pour résoudre ces équations, il étudie le maximum des expressions algébriques. Il prend "la dérivée première" de ces expressions qu'il annule et démontre que la racine de l'équation obtenue, substituée dans l'expression algébrique donne le maximum. [...] Et comme la seule démonstration convaincante est de faire parler le texte même d'Al-Tusi, nous allons prendre trois exemples dans l'œuvre de ce mathématicien :[...], le troisième, pour dégager comment transformation affine, divisibilité et dérivée se conjuguent dans la solution de l'équation."

(R. Ras hed, Entre Arithmétique et Algèbre , 1984).

Sharaf Al-Din Al-Tusi est un mathématicien arabe qui a écrit un traité mathématique vers 1213.

Chapitre 3

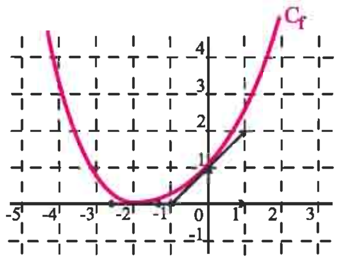
Dérivabilité

I. Rappels

Dans ce paragraphe nous rappelons les principaux résultats vus en troisième année.

Activité 1

Dans la figure ci-contre on a représenté une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que les tangentes aux points d'abscisses respectives -2 et 0.



1. Déterminer les nombres dérivés de f en -2 et 0.
2. Déterminer $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-1}{h}$ et $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)}{x+2}$.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+3x^2+3x+1$.

et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer le nombre dérivé de f en chacun des réels 0 et 1.
2. Préciser les tangentes à C_f aux points d'abscisses 0 et 1.
3. Donner une approximation affine de chacun des réels $(1.0002)^3$ et $(2.0001)^3$.

Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est dérivable en un réel a de I s'il existe un réel, noté $f'(a)$ tel que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$.

Soit $f : x \mapsto a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ une fonction polynôme.
La fonction f est dérivable en tout réel x et $f'(x)=na_n x^{n-1}+\dots+a_1$.

Si f est dérivable en a, alors le réel $f(a)+f'(a)h$ est une approximation affine de f(a+h).

Activité 3

Donner une approximation affine de chacun des réels $\sin(0.0001)$; $\cos(0.0001)$.

Activité 4

Soit f la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-2} & \text{si } x\le 1,\\ (x-2)|x-2| & \text{si } x>1.\end{cases}$$

Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est dérivable en un réel a de I, si et seulement si, elle est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_g(a)=f'_d(a)$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. a. Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 1.
   b. Montrer que f est dérivable en 2.
3. On note C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Préciser les tangentes à C_f aux points d'abscisses 0 et 2 et les demi-tangentes au point d'abscisse 1.

Activité 5

Dans chacun des cas ci-dessous, étudier la dérivabilité de la fonction f sur l'intervalle I .

$f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$, $I = \mathbb{R}$.

$f : x \mapsto \dfrac{1+x+x^2}{1-x^2}$, $I = [0, \frac{1}{2}]$.

$f : x \mapsto \dfrac{x|x+1|}{1-x^2}$, $I = [-3 , -1[$.

- Une fonction est dérivable sur un intervalle ouvert I si elle est dérivable en tout réel de I.
- Soit deux réels a et b tels que $a < b$.
Une fonction est dérivable sur $[a,b]$ si elle est dérivable sur $]a,b[$, à droite en a et à gauche en b.
- On définit de façon analogue la dérivabilité d'une fonction sur les intervalles $[a,b[$, $]a,b]$, a et b finis ou infinis.

Nous donnons dans les deux tableaux ci-dessous les dérivées de certaines fonctions usuelles, ainsi que les règles opératoires sur les dérivées.

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Intervalle	f′
$x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	Tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -nx^{-n-1}$
$x \mapsto \sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto a\cos(ax+b)$
$x \mapsto \cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -a\sin(ax+b)$
$x \mapsto \tan(ax+b)$	Tout intervalle inclus dans l'ensemble de définition.	$x \mapsto a(1+\tan^2(ax+b))$

Opérations sur les fonctions dérivables

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Intervalle	Fonction dérivée
$f+g$	I	$f'+g'$
af $(a \in \mathbb{R})$	I	af'
$f \times g$	I	$f' \times g + g' \times f$
$\dfrac{1}{f}$	Tout intervalle inclus dans $\{x \in I \ ; \ f(x) \neq 0\}$	$\dfrac{-f'}{f^2}$
$\dfrac{f}{g}$	Tout intervalle inclus dans $\{x \in I \text{ tel que } g(x) \neq 0\}$	$\dfrac{f'g-g'f}{g^2}$
f^n , $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$	I	$nf'\,f^{n-1}$
$\dfrac{1}{f^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	Tout intervalle inclus dans $\{x \in I \ ; \ f(x) \neq 0\}$	$-nf'\,f^{-n-1}$

Activité 6

Soit α un réel et P un polynôme de degré $n \geq 2$.
On dit que α est une racine double du polynôme P s'il existe un polynôme Q de degré $(n-2)$ tel que $P(x)=(x-\alpha)^2 Q(x)$ pour tout réel x et $Q(\alpha) \neq 0$.

1. Montrer que si α est une racine double de P, alors $P(\alpha)=P'(\alpha)=0$ et $P''(\alpha) \neq 0$.
2. On suppose que $P(\alpha)=0$ et on désigne par f le polynôme tel que $P(x)=(x-\alpha)f(x)$.
Montrer que si $P'(\alpha)=0$ alors $f(\alpha)=0$.
3. Donner une condition suffisante pour que α soit une racine double de P.
4. a. Montrer que 2 est une racine double du polynôme $P(x)=x^4-4x^3+5x^2-4x+4$.
   b. Factoriser $P(x)$.

II. Dérivées successives

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
La dérivée f' de f est appelée la dérivée première de f.
Si la fonction f' est dérivable sur I, sa fonction dérivée est appelée dérivée seconde de f et notée $f^{(2)}$ ou f''.
Par itération, si la fonction $f^{(n-1)}$ $(n \geq 2)$ est dérivable sur I, sa fonction dérivée est appelée dérivée $n^{\text{ème}}$ de f et est notée $f^{(n)}$.
La dérivée $n^{\text{ème}}$ de f est aussi appelée dérivée d'ordre n de f.

Activité 1

Donner, dans chacun des cas ci-dessous, les dérivées d'ordre 1, 2, 3 et 4 de f.

1. $f : x \mapsto 2x^3-4x^2+x-1$
2. $f : x \mapsto \sin(2x)$.

Activité 2

1. Soit f la fonction définie sur $]2,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$.

a. Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$, $x \in]2,+\infty[$.

b. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}$.

III. Dérivabilité des fonctions composées

Activité 1

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

1. Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1.

2. Soit h la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}]$par $h(t)=f(\sin t)$.

a. Vérifier que pour tout $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $h(t)=\cos t$.

b. En déduire que h est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et déterminer $h'(t)$.

c. Vérifier que pour tout $t\in[0,\frac{\pi}{2}[$, $h'(t)=\cos t.f'(\sin t)$.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a et g une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant $f(a)$.

Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors $g\circ f$ est dérivable en a et $(g\circ f)'(a)=f'(a)\times g'(f(a))$.

Démonstration

Considérons la fonction $\varphi : y \mapsto \begin{cases} \dfrac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)} & \text{si } y\neq f(a), \\ g'(f(a)) & \text{si } y=f(a). \end{cases}$

La fonction g étant dérivable en $f(a)$, on en déduit que φ est continue en f(a).

La continuité de f en a implique alors que $\lim\limits_{x\to a}\varphi(f(x))=\varphi(f(a))=g'(f(a))$.

De plus, pour tout $x\neq a$ on peut écrire

$$\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}=\begin{cases} \varphi(f(x))\times\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } f(x)\neq f(a), \\ 0 & \text{si } f(x)=f(a). \end{cases}$$

Il résulte alors de la dérivabilité de f en a que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g\circ f(x)-g\circ f(a)}{x-a}=g'(f(a)).f'(a)$.

Corollaire

Si f est dérivable sur un intervalle I et g est dérivable sur un intervalle J contenant $f(I)$, alors $g\circ f$ est dérivable sur I et $(g\circ f)'(x)=f'(x)\times g'[f(x)]$, pour tout x de I.

Activité 2

Dans chacun des cas ci-dessous, montrer que la fonction est dérivable sur I et déterminer sa dérivée.

$f : x\mapsto\sqrt{1-\cos(\pi x)}$, $I=]0, 2[$. $g : x\mapsto \sin\left(\sqrt{\dfrac{\pi x^2}{1-x}}\right)$, $I=]-\infty, 0[$.

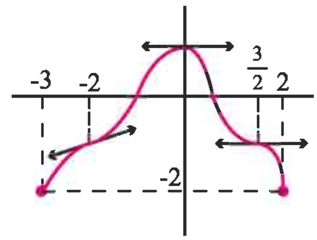
IV. Théorème des accroissements finis

Activité 1

Soit f une fonction définie sur $[-3,2]$ et dérivable sur $]-3,2[$.

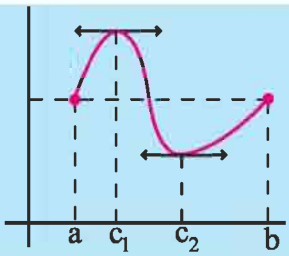
Dans la figure ci-contre on a représenté la courbe C_f de f, ainsi que les tangentes aux points d'abscisses -2, 0 et $\frac{3}{2}$.

Lire sur le graphique les abscisses des points de C_f en lesquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.



Théorème de Rolle

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.
Alors il existe un réel c de $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Si C_f est la représentation graphique de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, alors il existe au moins une tangente à C_f parallèle à la droite des abscisses.

Démonstration

Si f est constante sur $[a, b]$, le résultat est immédiat.

Supposons f non constante sur $[a, b]$.

La fonction f étant continue sur $[a, b]$, elle est bornée et atteint ses bornes m et M.

Soit x_0 et x_1 tels que $m = f(x_0)$ et $M = f(x_1)$. Alors l'un des réels x_0 ou x_1 appartient à $]a, b[$, car f n'est pas constante sur $[a, b]$. On en déduit que $f'(x_0) = 0$ ou $f'(x_1) = 0$.
Le théorème en découle.

Activité 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x + 2$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.
2. En déduire que $\mathscr{C}$ admet au moins une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit A et B les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 3 et 1.

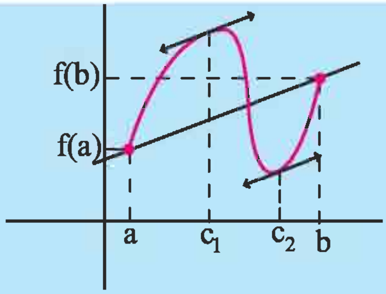
Existe-t-il des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite (AB) ?

Théorème des accroissements finis

Soit a et b deux réels tels que $a<b$ et f une fonction définie sur $[a, b]$.

Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe un réel c de $]a, b[$ tel que

$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.



Si C_f est la représentation graphique de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ alors il existe au moins une tangente à C_f parallèle à la droite (AB) où A et B sont les points de C_f d'abscisses respectives a et b.

Démonstration

Considérons la fonction g définie sur $[a, b]$ par $g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

D'après l'hypothèse faite sur f, la fonction g est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $g(a)=g(b)$. On déduit du théorème de Rolle, l'existence d'un réel c de $]a, b[$ tel que $g'(c)=0$. Le théorème en découle.

Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x)=x^2\sqrt{x-1}$ et C_f sa courbe représentative.

Montrer que l'équation $f'(x)=4$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]1, 2[$ et interpréter graphiquement le résultat.

V. Inégalité des accroissements finis

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ $(a<b)$ et dérivable sur $]a, b[$. Soit deux réels m et M.

Si $m\leq f'(x)\leq M$ pour tout x de $]a, b[$, alors $m(b-a)\leq f(b)-f(a)\leq M(b-a)$.

Démonstration

Le théorème des accroissements finis justifie l'existence d'un réel c de $]a, b[$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

L'hypothèse faite sur f' permet de déduire que $m \le f'(c) \le M$. Ce qui implique que $m(b-a) \le f'(c)(b-a) \le M(b-a)$, car $b-a>0$. Le théorème en découle.

Corollaire

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $M>0$.
Si $|f'(x)| \le M$ pour tout x de I, alors $|f(b)-f(a)| \le M|b-a|$, pour tous réels a et b de I.

Activité 1

Soit $f:[0,\frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$

1. Montrer que $1 \le f'(x) \le 2$, pour tout réel x de $[0, \frac{\pi}{4}]$.

2. En déduire que $t \le \tan(t) \le 2t$, pour tout réel t de $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Activité 2

1. Montrer que $1+\frac{x}{\sqrt{6}} \le \sqrt{1+x} \le 1+\frac{x}{2}$, pour tout réel x de $[0, \frac{1}{2}]$.

2. En déduire un encadrement de $\sqrt{1+10^{-10}}$.

Activité 3

1. Montrer que pour tout réel positif x, $\sin x \le x$ et $1-\frac{x^2}{2} \le \cos x$.

2. En déduire que $x-\frac{x^3}{6} \le \sin x \le x$, pour tout réel positif x.

3. Montrer que la fonction φ définie par $\varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{x-\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases}$ est dérivable en 0.

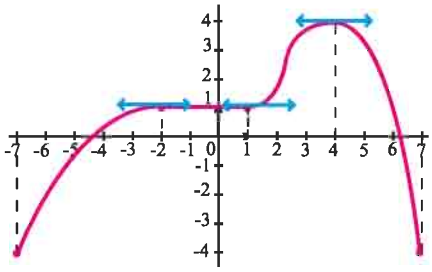
VI. Variations d'une fonction

Activité 1

Le graphique ci-contre représente une fonction f dérivable sur $[-7, 7]$.

Déterminer graphiquement les intervalles où f est strictement monotone.

Déterminer graphiquement le signe de $f'(x)$.



Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si la dérivée de f est strictement positive sur I, alors la fonction f est strictement croissante sur I.
Si la dérivée de f est strictement négative sur I, alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

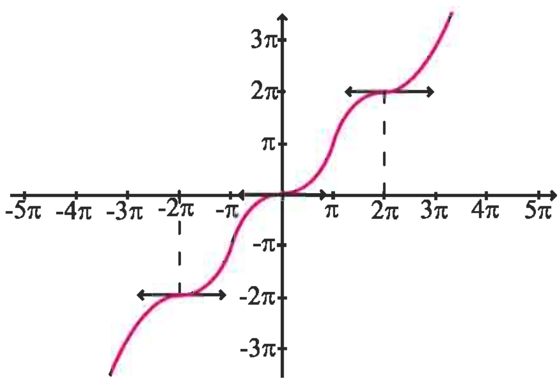
Démonstration

Supposons que $f'(x) > 0$ pour tout x de I et considérons deux réels a et b de I tels que $a < b$.
La fonction f étant dérivable sur I, elle est dérivable sur $[a, b]$.
D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel c de $]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. On en déduit que $f(b) - f(a) > 0$, car $f'(c)$ et $b - a$ sont strictement positifs. Ce qui prouve que f est strictement croissante sur I.
La deuxième propriété découle de la première en considérant la fonction –f.

Activité 2

On a représenté dans la figure ci-contre la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \sin x$.

1. Déterminer graphiquement le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. a. Déterminer la fonction dérivée f'.
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$ et interpréter graphiquement le résultat.



Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si f' est positive et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert contenu dans I, alors f est strictement croissante sur I.
Si f' est négative et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert contenu dans I, alors f est strictement décroissante sur I.

Démonstration

De l'hypothèse $f'(x) \geq 0$ pour tout réel x de I, il résulte que la fonction f est croissante sur I.
Supposons qu'il existe deux réels a et b tels que $a < b$ et $f(a) = f(b)$. Il en résulte que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, pour tout réel x de $]a, b[$. Par suite, f est constante sur $[a, b]$ et $f'(x) = 0$ pour tout x de $]a, b[$. Ce qui contredit l'hypothèse faite sur f'.
La deuxième propriété découle de la première en considérant la fonction –f.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

- Si f est croissante (respectivement strictement croissante) sur $]a, b[$ alors f est croissante (respectivement strictement croissante) sur $[a, b]$.
- Si f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur $]a, b[$ alors f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur $[a, b]$.

Démonstration

Soit $c < d$ deux réels de $[a, b]$. La fonction f étant continue sur $[c, d]$ et dérivable sur $]c, d[$, il existe un réel x_0 de $]c, d[$ tel que $f(d) - f(c) = (d - c) f'(x_0)$.

Le théorème en découle.

Activité 3

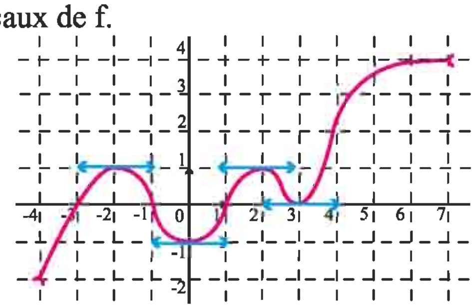
Etudier les variations de $x \mapsto \sqrt{1 - \sin^3 x}$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

VII. Extrema

Activité 1

Dans la figure ci-dessous, on a représenté une fonction f définie sur $]-4, 7[$.

Déterminer graphiquement les extrema locaux de f.

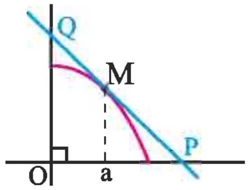


Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.
On dit que f admet un maximum local en a, s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I tel que pour tout x de J, $f(x) \le f(a)$.
On dit que f admet un minimum local en a, s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I tel que pour tout x de J, $f(x) \ge f(a)$.
Lorsque f admet un minimum local ou un maximum local en a on dit que f admet un extremum local en a.

Activité 2

Dans la figure ci-contre on a représenté la restriction de la fonction $f : x \mapsto 1 - x^2$ sur $[0, 1]$ dans un repère orthonormé ainsi que la tangente en un point M d'abscisse a dans $]0, 1]$.

Déterminer le point M pour que l'aire du triangle OPQ soit minimale.



Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.
Si $f'(x)$ s'annule en a en changeant de signe alors f admet un extremum local en a.

VIII. Point d'inflexion

Activité 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x+1$

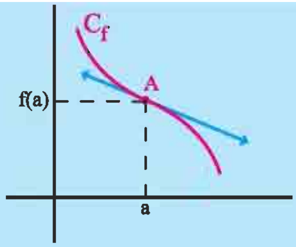
On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé.

1. Ecrire une équation de la tangente T à C_f en son point d'abscisse 0.
2. Etudier la position relative de C_f et T.
3. Etudier les variations de f puis tracer T et C_f.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et dérivable en un réel a de I et C_f sa courbe dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On dit que le point $A(a,f(a))$ est un point d'inflexion de C_f si C_f traverse sa tangente en ce point.



Activité 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}2-\sqrt{2-x} & \text{si } x<1,\\ \sqrt{x} & \text{si } x\geq 1.\end{cases}$$

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Montrer que le point $I(1,1)$ est un centre de symétrie de C_f.
   b. Montrer que I est un point d'inflexion de C_f.
2. Etudier les variations de f.
3. Tracer la tangente à C_f en I et la courbe C_f.

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit f une fonction définie sur un ensemble D, de courbe représentative C.
Soit O' le point de coordonnées (a,b).
Le point O' est un centre de symétrie de C, si pour tout x appartenant à D, $2a-x$ appartient à D et $f(2a-x)=2b-f(x)$.

Activité 3

Soit a un réel et f une fonction deux fois dérivable sur $]a-h,\ a+h[$, avec $h>0$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Ecrire une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse a.
2. Soit φ la fonction définie sur $]a-h,\ a+h[$ par $\varphi(x)=f(x)-[f'(a)(x-a)+f(a)]$.
   a. Montrer que φ est une fonction deux fois dérivable sur $]a-h,\ a+h[$.

b. Dresser, dans chacun des cas ci-dessous, le tableau de variation de φ'.

1^{er} cas : $f''(a)=0$, $f''(x)<0$ (si $x<a$) et $f''(x)>0$ (si $x>a$).

$2^{ème}$ cas : $f''(a)=0$, $f''(x)>0$ (si $x<a$) et $f''(x)<0$ (si $x>a$).

c. En déduire pour les deux cas précédents que le point $I(a, f(a))$ est un point d'inflexion de C_f.

Théorème

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]a-h,\ a+h[$, $(h>0)$ et C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé.
Si la fonction dérivée seconde f'' de f s'annule en a en changeant de signe, alors le point $I(a, f(a))$ est un point d'inflexion de la courbe C_f.

Activité 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4-6x^2+1$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Montrer que C_f admet deux points d'inflexion que l'on précisera.

IX. Exemples d'étude de fonctions

Problème résolu 1

A/ 1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3+3x+2$ et on note C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Etudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$ et en déduire les branches infinies de C_g.

2. Calculer $g'(x)$ et en déduire les variations de g.
3. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $[-1, 0]$.
4. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
5. En déduire le signe de g.
6. Déterminer le point d'inflexion de C_g.
7. Déterminer la tangente D à C_g au point d'abscisse 0.
8. Etudier la position relative de D et C_g. Tracer C_g.

B/ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2+1}$ et on note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ et déterminer les branches infinies de C_f.
2. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
3. Tracer C_f.

Solution

A/ 1. La fonction g étant une fonction polynôme, il en résulte que

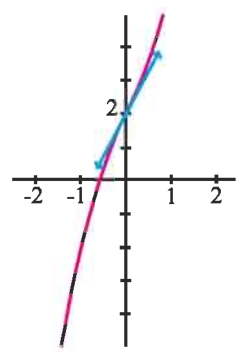
$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty.$$

De plus, $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=+\infty$. On en déduit que C_g admet, en $-\infty$ et en $+\infty$, deux branches paraboliques de direction $(O,\vec{j})$.

Tableau de variation de g

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		+		+	
g	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=3x^2+3,\ x\in\mathbb{R}$.
Remarquons que $g'(x)>0$, pour tout réel x.
On en déduit que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Le calcul donne $g(-1).g(0)=-4$.
On en déduit l'existence d'un réel α dans $]-1,0[$ tel que $g(\alpha)=0$.
L'unicité de α résulte de la stricte monotonie de g.
4. En utilisant la dichotomie on obtient que $-0.6<\alpha<-0.5$.
5. On déduit du tableau de variation de g que $g(x)\geq 0$, si et seulement si, $x\in[\alpha,+\infty[$.
6. La fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g''(x)=6x,\ x\in\mathbb{R}$.
La dérivée seconde de g s'annule en 0, en changeant de signe. On en déduit que $I(0,2)$ est un point d'inflexion de C_g.



7. La tangente D à C_g a pour équation $y=3x+2$.
8. La position relative de D et C_g dépend du signe de $g(x)-3x-2$, qui est strictement positif, si et seulement si, $x>0$. On en déduit que C_g est au dessus de D, si et seulement si $x>0$.

B/ 1. La fonction f étant une fonction rationnelle, il en résulte que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=+\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=-\infty.$$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{x^3-1}{x^3+x} \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1.$$

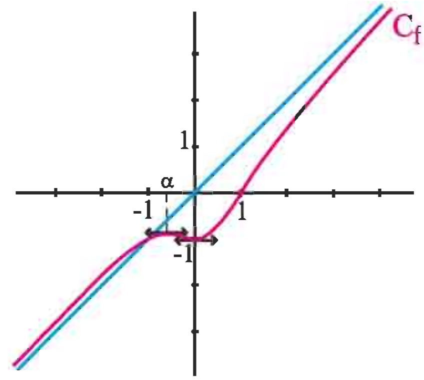
$$f(x)-x=\frac{-1-x}{x^2+1} \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to-\infty} f(x)-x=0.$$

On en déduit que la droite d'équation $y=x$ est asymptote à C_f.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Il en résulte que $f'(x)$ et $xg(x)$ sont de même signe.

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$



Problème résolu 2

Soit la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier les variations de f et tracer C_f.
2. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans $]1, 2[$ une unique solution α.
3. a. Montrer que pour tout réel x de $[1, +\infty[$, $|f'(x)| \le \dfrac{1}{2}$.

   b. En déduire que pour tout réel x de $[1, +\infty[$, $|f(x)-\alpha| \le \dfrac{1}{2}|x-\alpha|$.

4. Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 1+\dfrac{1}{\sqrt{u_n}}, \quad n \ge 0 \end{cases}$.

   a. A l'aide d'une calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-4} des sept premiers termes de cette suite.

   b. Montrer que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1}-\alpha| \le \dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$.

   c. En déduire que pour tout entier naturel n, $|u_n-\alpha| \le \dfrac{1}{2^n}$.

   d. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \ge n_0$, $|u_n-\alpha| \le 10^{-2}$.

   e. Donner alors une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

Solution

1. La fonction $x \mapsto 1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, en particulier sur $[1, +\infty[$

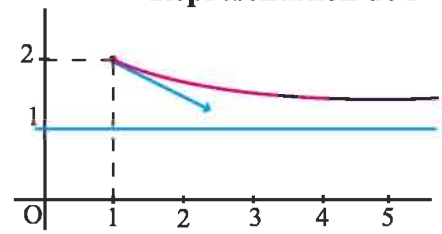
   et $f'(x)=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$, $x \ge 1$.

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, ce qui prouve que la droite d'équation $y=1$ est asymptote à la courbe C_f de f.

Tableau de variation de f

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	2	$\searrow$	1

Représentation de f



2. Considérons la fonction g définie sur $[1,+\infty[$ par $g(x)=f(x)-x$.

   La fonction g est continue en tout réel $x\geq 1$ et vérifie $g(1)=1$ et $g(2)=-1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

   L'inégalité $g(1).g(2)<0$ implique l'existence d'un réel $\alpha\in]1,2[$ tel que $g(\alpha)=0$ ou encore tel que $f(\alpha)=\alpha$.

   D'autre part, la fonction g est dérivable en tout réel $x\geq 1$ et $g'(x)=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}-1$.

   On en déduit que g est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.

   Par suite, le réel α est l'unique solution de l'équation $f(x)=x$.

3. a. L'inégalité $|f'(x)|\leq\dfrac{1}{2}$ est immédiate.

   b. La fonction f est dérivable sur $[1,+\infty[$ et $|f'(t)|\leq\dfrac{1}{2}$ pour tout réel $t\geq 1$.

   On déduit de l'égalité $f(\alpha)=\alpha$ et de l'inégalité des accroissements finis que

   $|f(x)-\alpha|\leq\dfrac{1}{2}|x-\alpha|$, pour tout réel x de $[1,+\infty[$.

4. a. La calculatrice donne 2 ;1.7071 ; 1.7654 ; 1.7526 ; 1.7554 ; 1.7548 ; 1.7549 ; 1.7549 .

   b. On vérifie facilement que pour tout entier naturel n, $u_n>1$.

   Pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$ et $u_n\geq 1$. Il résulte alors de la question 3.b. que $|u_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$.

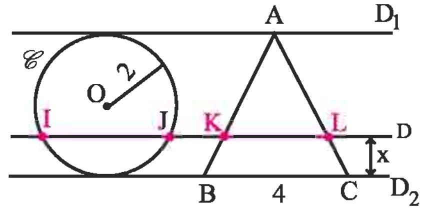
   c. En utilisant un raisonnement par récurrence, on obtient $|u_n-\alpha|\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n|u_0-\alpha|$, $n\in\mathbb{N}$.

   Le résultat découle du fait que $u_0=2$ et $1<\alpha<2$.

   d. On trouve $n_0=7$.

   e. Il suffit de prendre $\alpha=1.7549$.

Problème résolu 3



Dans la figure ci-contre, $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 2,
D_1 et D_2 sont deux droites parallèles, tangentes à $\mathscr{C}$,
A un point de D_1, B et C sont deux points de D_2 tels que $BC = 4$ et ABC est un triangle isocèle en A.
Une droite D variable parallèle à D_1 et D_2 coupe le cercle $\mathscr{C}$ aux points I et J, le segment $[AB]$ en K et le segment $[AC]$ en L.
On pose x la distance de D à D_2 et $f(x) = IJ + KL$.

1. Montrer que $f(x) = 2\sqrt{4x - x^2} + 4 - x,\ x \in [0, 4]$.
2. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0, et à gauche en 4.
   b. Montrer que f est dérivable sur $]0, 4[$ puis calculer $f'(x)$.
   c. Dresser le tableau de variation de f et en déduire la valeur maximale de $IJ + KL$.
   d. Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé.
3. a. Déterminer $a \in]0, 4[$ tel que $f(a) = 4$.
   b. Déterminer graphiquement suivant les valeurs du réel a, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = f(a)$. Interpréter le résultat.

Solution

1. Déterminons la distance IJ.
   Soit H le projeté orthogonal du point O sur $[IJ]$.
   Le triangle OIJ est isocèle en O, alors H est le milieu de $[IJ]$. En considérant le triangle OHI rectangle en H, on obtient
   $IJ = 2IH = 2\sqrt{OI^2 - OH^2} = 2\sqrt{4 - (2 - x)^2} = 2\sqrt{4x - x^2}$.
   Déterminons la distance KL.
   La médiatrice de $[BC]$ coupe $[KL]$ en son milieu B' et $[BC]$ en son milieu A'.
   En appliquant le théorème de Thalès dans le triangle ABA', on obtient
   $\dfrac{AB'}{AA'} = \dfrac{KB'}{BA'}$, d'où $KL = 4 - x$.
   On en déduit que $f(x) = 2\sqrt{4x - x^2} + 4 - x,\ x \in [0, 4]$.
2. a. **Dérivabilité de f à droite en 0**
   Pour tout $x \in]0, 4]$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{2\sqrt{4x - x^2} - x}{x} = 2\sqrt{\dfrac{4}{x} - 1} - 1$.
   IL suit que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$, et f n'est pas dérivable à droite en 0.

Dérivabilité de f à gauche en 4

Pour tout $x \in [0, 4[$, $\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4} = \dfrac{2\sqrt{4x-x^2}+4-x}{x-4} = \dfrac{-2x}{\sqrt{4x-x^2}} - 1$.

Il suit $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{f(x)-f(4)}{x-4} = -\infty$, et f n'est pas dérivable à gauche en 4.

b. Dérivabilité de f sur $]0, 4[$.

La fonction $x \mapsto 4x - x^2$ est dérivable et strictement positive sur $]0, 4[$, alors la fonction $x \mapsto \sqrt{4x-x^2}$ est dérivable sur $]0, 4[$, et par suite la fonction f est dérivable sur $]0, 4[$. Pour tout $x \in]0, 4[$, $f'(x) = \dfrac{2(2-x)}{\sqrt{4x-x^2}} - 1$.

c. Il est clair que, si $x \in [2, 4[$, alors $f'(x) < 0$.

Pour tout $x \in]0, 2]$,

$$f'(x) = \frac{5x^2 - 20x + 16}{\sqrt{4x-x^2}\left(2(2-x)+\sqrt{4x-x^2}\right)}.$$

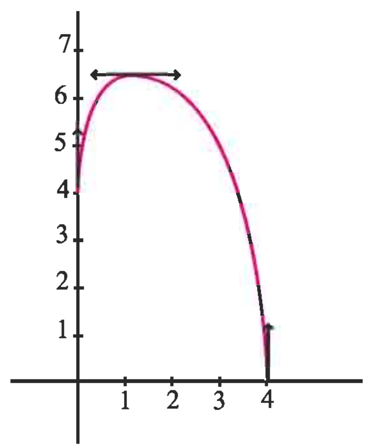
x	0		$2-\frac{2\sqrt{5}}{5}$		4
f'(x)		+	0	−	
f	4	↗	$2\sqrt{5}+2$	↘	0

Pour tout $x \in]0, 2]$, le signe de $f'(x)$ est celui de $5x^2 - 20x + 16$.

On en déduit le tableau de variation de f sur $[0, 4]$ et la valeur maximale de $IJ + KL$, soit $2\sqrt{5} + 2$.

3. a. Soit $a \in]0, 4[$, $f(a) = 4$, si et seulement si, $a = \dfrac{16}{5}$.

b. Soit $a \in]0, 4[$. Résoudre l'équation $f(x) = f(a)$, revient à déterminer les abscisses, s'ils existent, des points d'intersection de la courbe de f et de la droite d'équation $y = f(a)$.



On en déduit que

- Il existe deux solutions lorsque $a \in]0, \frac{16}{5}[$. Dans ce cas il y a deux positions possibles de la droite D qui assurent la condition $IJ + KL = f(a)$.

- Il existe une unique solution lorsque $a \in [\frac{16}{5}, 4[$.

Dans ce cas il y a une unique position possible de la droite D qui assure la condition $IJ + KL = f(a)$.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. La fonction $x \mapsto \cos(\pi x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est

☐ $x \mapsto 2\pi \sin(\pi x^2)$. ☐ $x \mapsto 2\pi x \sin(\pi x^2)$. ☐ $x \mapsto -2\pi x \sin(\pi x^2)$.

2. Soit f une fonction dérivable sur $[-2, 2]$ dont le tableau de variation de f' est le suivant.

x	-2	-1	0	1	2
f'	1	↘ 0	-2	↗ -1	$-\frac{1}{4}$

- Alors

☐ $f(-2) < f(-1)$. ☐ $f(-1) < f(0)$. ☐ $f(0) < f(1)$.

- Dans un repère orthogonal, la courbe de f admet exactement deux tangentes parallèles à la droite d'équation

☐ $y = -\frac{1}{2}$. ☐ $y = \frac{1}{2}x$. ☐ $y = -\frac{1}{2}x$.

3. L'image de $[1, +\infty[$ par la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 1} - 1$ est

☐ $]0, +\infty[$. ☐ $[-1, +\infty[$. ☐ $]-\infty, 0]$.

4. La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{1}{20}x^5 - 4x^2$ admet un point d'inflexion d'abscisse

☐ $x = 0$. ☐ $x = -2$. ☐ $x = 2$.

5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$.
La courbe de f dans un repère orthogonal admet exactement

☐ deux tangentes horizontales. ☐ une tangente horizontale. ☐ aucune tangente horizontale.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Soit f une fonction dérivable sur $[-1, 2]$ telle que $f(-1) = 2$, $f(2) = -1$.
Alors l'équation $f'(x) = -1$ admet au moins une solution dans $[-1, 2]$.
2. Si le produit de deux fonctions est dérivable en un réel a alors chacune des deux fonctions est dérivable en a.
3. Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto (x^2 - x)(x-2)$ admet exactement deux tangentes horizontales.
4. Soit f une fonction dérivable sur $[2, 5]$ telle que $|f'(t)| \leq 2$ pour $t \in [2, 5]$.
Alors $|f(5) - f(2)| \leq 6$.

1 Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Déterminer, dans chacun des cas suivants, une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

1. $f : x \mapsto (x-1)^2(x-3)$, $a = 2$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{2x^4}{(x+2)^2}$, $a = -1$.
3. $f : x \mapsto x(2\sqrt{x}-3)$, $a = 4$.
4. $f : x \mapsto \cos^3 x + \sin x$, $a = \dfrac{\pi}{6}$.

2 1. Donner une approximation affine de $\dfrac{1}{(1+h)^2}$ pour h voisin de 0.
2. En déduire une estimation des réels $\dfrac{1}{(1.0000000002)^2}$ et $\dfrac{1}{(0.9999999998)^2}$.

3 Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I et déterminer sa fonction dérivée.

1. $f : x \mapsto 3x^{10} - \dfrac{5}{4}x^8 + 3x - 10$, $I = \mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto (1 - x - 3x^3)(x+2x)^3$, $I = \mathbb{R}$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{1-x}$, $I =]1, +\infty[$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{(x+1)^3}{x^2}$, $I = [1, +\infty[$.
5. $f : x \mapsto \cos(3x) - \sin(2x)$, $I = \mathbb{R}$.
6. $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$, $I =]0, \pi]$.
7. $f : x \mapsto (1+\sin(2x))^3$, $I = \mathbb{R}$.
8. $f : x \mapsto \tan^2\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$, $I = [0, 1[$.
9. $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, $I =]1, +\infty[$.
10. $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$, $I =]0, +\infty[$.

4 Déterminer, dans chacun des cas, les dérivées successives de la fonction f.

1. $f : x \mapsto x^5 - 2x^3 + 3x + 4$.
2. $f : x \mapsto \cos x$.
3. $f : x \mapsto \sin(2x)$.

5 Déterminer une fonction polynôme f de degré 3 telle que $f(1) = f'(1) = f''(1) = f^{(3)}(1) = 1$.

6 1. Calculer les dérivées d'ordre 3 des fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$.
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par $h(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$.
a. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout réel x de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,
$h(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-1}$.
b. En déduire la dérivée d'ordre 3 de la fonction h.

7 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(2) = 0$ et $f'(2) = 3$.
Déterminer les limites ci-dessous.

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(\sqrt{2+x})}{x-2}$.
2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f\left(2\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)}{x-2}$.
3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sin(f(x))}{x-2}$.
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x^2+x+2)}{x}$.

8 Vérifier, dans chacun des cas suivants, que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I et déterminer sa fonction dérivée.

1. $f : x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{x}}$, $I =]0, +\infty[$.
2. $f : x \mapsto \sqrt{\sin x}$, $I =]0, \dfrac{\pi}{2}]$.

3. $f : x \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$, $I = [1, +\infty[$.

4. $f : x \mapsto \tan(\sin x)$, $I = \mathbb{R}$.

9 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$.

1. Montrer que pour tout x de $[0, \frac{1}{10}]$, $0 \le f'(x) \le 1.234$.

2. En déduire que pour tout x de $[0, \frac{1}{10}]$, on a $1 \le f(x) < 1 + 1.234x$.

3. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-8} de $f(0.0000000011)$.

10 Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $[0, 1]$ et que pour tout $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \le \frac{1}{2}$.

2. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $1 - \frac{1}{2}x \le f(x) \le 1$.

3. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-10} de $f(0.0000000002)$.

11 Montrer que $|\cos x - \cos y| \le |x - y|$, pour tous réels x et y.

12 1. Montrer que $\frac{\sqrt{2}}{2}(y - x) \le \sin y - \sin x \le \frac{\sqrt{3}}{2}(y - x)$, pour tous x et y de $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$, $x < y$.

2. En déduire que $\frac{\sqrt{2}}{12} \le \frac{\sqrt{2}-1}{\pi} \le \frac{\sqrt{3}}{12}$.

13 Soit f la fonction définie sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\tan x} & \text{si } x \ne \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{si } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

2. Montrer que pour tout $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, $-2 \le f'(x) \le -1$.

3. En déduire que pour tout $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$, $\frac{\pi}{2} - 2x \le \frac{1 - \tan x}{\tan x} \le \frac{\pi}{4} - x$.

14 1. a. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $x \le \tan x$.

b. En déduire que la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est décroissante sur $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

2. a. Montrer que $\frac{y - x}{\cos^2 x} \le \tan y - \tan x \le \frac{y - x}{\cos^2 y}$, pour tous réels x et y de $[0, \frac{\pi}{2}[$ tels que $x < y$.

b. En déduire que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $x \le \tan x \le \frac{x}{\cos^2 x}$.

c. Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{\cos x}$.

3. Soit g la fonction définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \ne 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que g est dérivable en 0 et calculer $g'(0)$.

15 On considère une fonction f dérivable sur $[0,\ 1]$ telle que $f(0)=f'(0)=0$ et $f(1)=0$.
Soit g la fonction définie sur $[0,\ 1]$ par

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x} & \text{si } x\neq 0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

1. Montrer que g est continue sur $[0,\ 1]$.
2. a. Montrer qu'il existe un réel c de $]0,\ 1[$ tel que $cf'(c)-f(c)=0$.
b. On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de g dans un repère orthogonal.
Montrer que $\mathscr{C}$ possède au moins une tangente passant par l'origine du repère.

16 Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y=x^2+ax+b$ dans un repère orthogonal.
Soit A et B deux points distincts de $\mathscr{P}$, d'abscisses respectives x_A et x_B.

Montrer que $\mathscr{P}$ possède au point d'abscisse $\dfrac{x_A+x_B}{2}$ une tangente parallèle à la droite (AB).

17 Soit f une fonction dérivable sur $[a,\ b]$.
1. Montrer que si la courbe de f coupe l'axe des abscisses en deux points distincts, alors elle admet au moins une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
2. Montrer que si la courbe de f coupe l'axe des abscisses en n points distincts $(n\geq 2)$, alors elle admet au moins $n-1$ tangentes parallèles à l'axe des abscisses.

18 Soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x)=\left(x^2-1\right)^3\left(x^4-16\right)^2$.

Montrer que la dérivée f' de f admet au moins trois racines distinctes autres que les réels -2, -1, 1 et 2.

19 Soit f une fonction n fois dérivable sur $[a,\ b]$ et s'annulant pour $n+1$ valeurs distinctes de $[a,\ b]$ $(n\geq 1)$.

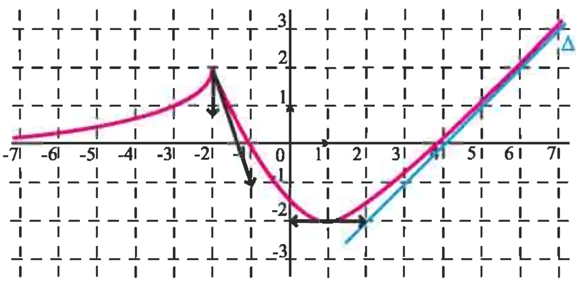
Montrer que sa dérivée $n^{\text{ème}}$ s'annule au moins une fois dans $[a,\ b]$.

20 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x=0,\\ x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0.\end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. a. Montrer que pour tout réel x non nul on a $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\leq|x|$.
b. En déduire que f est dérivable en 0.
3. a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.
b. Soit n un entier naturel non nul.
Calculer $\left|f'\left(\dfrac{1}{n\pi}\right)\right|$.
c. La fonction f' est-elle continue en 0 ?

21 On a représenté ci-dessous, une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La droite Δ est une asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$ et l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe de f en $-\infty$.



1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Déterminer graphiquement,

$\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}$,

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+2}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x+4\right)$.

22 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f: x\mapsto 4x^3+6x-2$.

23 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f: x\mapsto\dfrac{x^3+2x+2}{2x}$

24 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto x\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$.

25 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+2x+3}$.

26 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto 5x+3\sqrt{x^2-1}$.

27 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto x+\sqrt{4-x^2}$.

28 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

29 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x)=\sin^2 x+\cos x$.
On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
1. a. Montrer que 2π est une période de f.
b. Montrer que la droite des ordonnées est un axe de symétrie de C_f.
2. a. Etudier les variations de f.
b. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $[0,\pi]$.
Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
c. Tracer la représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle $[-\pi,2\pi]$.

30 I. Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3}{(x-1)^2}$.

II. Soit la fonction $h : x \mapsto \frac{\sin^3 x}{(\sin x-1)^2}$ et on désigne par C_h sa courbe dans un repère orthonormé.
1. a. Déterminer l'ensemble de définition de h.
b. Vérifier que 2π est une période de h.
c. Montrer que la droite d'équation $x=\frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour C_h.
2. a. Déterminer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} h(x)$.
b. En écrivant $h=f\circ\sin$, déduire le sens de variation de h sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
c. Résoudre l'équation $h'(x)=0$.
d. Montrer que l'origine du repère est un point d'inflexion de C_h.
3. Tracer C_h.

31 1. Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \frac{x(x+1)}{x-2}$.
2. Déterminer graphiquement, suivant les valeur de m, le nombre de solutions de l'équation
$x^2+(1-m)x+2m=0$.
3. Déterminer graphiquement, suivant les valeur de m, le nombre de solutions de l'équation
$\cos^2 x+(1-m)\cos x+2m=0$ dans $[0, 2\pi[$.

32 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \sin x+\frac{1}{2}\sin(2x)$.

33 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \frac{\cos x}{2\cos x-1}$.

34 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x)=\begin{cases}\left|x^2+x\right| & \text{si } x<0,\\ x\sqrt{x} & \text{si } x\geq 0.\end{cases}$$
On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la dérivabilité de f en 0 et en -1.
3. Etudier f et tracer C_f.

35 1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2x^3+3x^2+1$.

a. Etudier les variations de g.

b. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et donner une valeur approchée de α à 10^{-1} prés.

c. En déduire le signe de g.

2. Soit la fonction $f: x \mapsto \dfrac{x+x^3}{1-x^3}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a. Etudier les variations de f.

b. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

c. Préciser la position de C_f par rapport à T.

d. Tracer C_f et T.

36 1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2x^3+x-2$.

a. Dresser le tableau de variation de g.

b. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

c. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

d. Déterminer le signe de g.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^4+(x-2)^2}$.

a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.

b. Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe C_f de f dans un repère orthogonal.

c. Déterminer graphiquement l'intersection de C_f et de la droite d'équation $y=x$.

37 Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur à 1 par $u_n=1+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}+\ldots+\dfrac{1}{n^3}$.

1. Montrer que (u_n) est croissante.

2. Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

a. Montrer que pour tout k de $[1,+\infty[$,

$$\frac{2}{(k+1)^3}\le f(k)-f(k+1)\le\frac{2}{k^3}.$$

b. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur à 1,

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2n^2}\le u_n\le\frac{3}{2}-\frac{1}{2n^2}.$$

c. En déduire que (u_n) est majorée.

d. En déduire que (u_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite.

38 Soit f la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ par $f(x)=\tan x$.

1. a. Etudier f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, en précisant la demi tangente au point d'abscisse 0.

b. Montrer que pour tout réel x de $[0,\frac{\pi}{2}[$, $\tan(x)\ge x$.

2. a. Montrer que l'équation $\tan x=2x$ admet une unique solution α dans $]0,\frac{\pi}{2}[$ et vérifier que $\alpha>\frac{\pi}{3}$.

b. Déterminer le signe de $\tan x-2x$ sur $[0,\frac{\pi}{2}[$.

3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0=\frac{\pi}{3}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\tan(u_n)-u_n$.

a. Montrer que $0\le u_n\le\frac{\pi}{3}$.

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

39 Pour tout entier $n\ge1$, on considère l'équation $(E_n): x^2+x^3=n$.

1. Montrer que pour tout entier $n\ge1$, l' équation (E_n) a une solution unique que l'on notera a_n.

2. a. Montrer que la suite (a_n) est croissante.

b. Montrer que la suite (a_n) n'est pas majorée.

c. Déterminer la limite de la suite (a_n).

40 I. Soit la fonction $f : x \mapsto \sin x$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Représenter la restriction de f à $[-\pi, 3\pi]$.
b. Soit A et B deux points distincts de C_f.
Montrer que le coefficient directeur de la droite (AB) est compris entre -1 et 1.

II. Soit la fonction $g : x \mapsto \sin(\sin x)$ et C_g sa courbe représentative.
1. a. Montrer que 2π est une période de g.
b. Montrer que g est impaire.
c. Etudier les variations de g sur $[0, \pi]$.
d. Représenter la restriction de g à $[-\pi, 2\pi]$.

41 I. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\sqrt{|x^2 - x|}$.
On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. Montrer que C_f admet deux branches paraboliques dont on précisera les directions.
2. a. Montrer que f est dérivable en 0.
b. La fonction f est-elle dérivable en 1 ? Interpréter graphiquement le résultat.
3. a. Etudier les variations de f.
b. Tracer C_f.
4. Soit g la restriction de f à $[0, 1]$, déterminer les extrema locaux de g.

II. Soit n un entier naturel non nul et g_n la fonction définie sur $[0,1]$ par $g_n(x) = x^n\sqrt{x(1-x)}$ et C_n sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, la courbe C_n est au dessous de la courbe C_1.
2. a. Etudier la dérivabilité de g_n à droite en 0 et à gauche en 1.
b. Montrer que la fonction g_n est dérivable sur $]0,1[$ et que $g_n'(x) = \dfrac{x^n\left(n + \frac{1}{2} - (n+1)x\right)}{\sqrt{x(1-x)}}$, $x \in]0, 1[$.
c. En déduire que pour tout entier non nul n, la fonction g_n admet un maximum local α_n que l'on précisera.
d. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$.
3. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = g_n(\alpha_n)$, $n \geq 1$.
a. Montrer que la suite (u_n) est bornée.
b. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq u_n \leq g_1(\alpha_n)$.
c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

42 1. Montrer que l'équation $(E) : x^3 - 10x^2 - 1 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution a et vérifier que $a \in]10, 11[$.
2. Vérifier que (E) est équivalente à $x = 10 + \dfrac{1}{x^2}$.
3. Soit f la fonction définie sur $[10, +\infty[$ par $f(x) = 10 + \dfrac{1}{x^2}$.
a. Déterminer $f([10, +\infty[)$.
b. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 10, \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$
Montrer que $|u_{n+1} - a| \leq \dfrac{1}{500}|u_n - a|$.
Déterminer les six premières décimales de a.