Chapitre 8

CALCUL INTEGRAL

I . Intégrale d'une fonction sur un intervalle

II . Intégrales et inégalités

III . Calcul d'aires planes

RIEMANN Bernhard (1826 - 1866)

I. Intégrale d'une fonction sur un intervalle

Activités de découverte

Activité 1 :

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

a) Donner une primitive F de f puis calculer $F(3) - F(1)$.

b) Vérifier que le réel $F(3) - F(1)$ ne dépend pas du choix de F.

• Le nombre $F(3) - F(1)$ est appelé **intégrale** de f entre 1 et 3 . On le note :

$\int_1^3 f(x)dx$ Lire : « intégrale de 1 à 3 de $f(x)\,dx$».

• x est une variable muette et on peut écrire :

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 f(t)dt = \int_1^3 f(u)du = \ldots$$

• Le réel $F(3) - F(1)$ est aussi noté $[F(x)]_1^3$ Lire :« F(x) pris entre 1 et 3».

• Les réels 1 et 3 sont les **bornes** de l'intégrale.

Pour toute fonction définie et continue sur [ab], on peut définir $\int_a^b f(x)dx$ car elle admet une primitive sur [ab].

Activité 2 :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I . Soient a, b et c des réels appartenant à I et F une primitive de f .

– Calculer $\int_a^a f(x)dx$

– Comparer $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_b^a f(x)dx$

– Montrer que $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

Activité 3 :

On donne deux fonctions f et g définies et continues sur un intervalle I.

Soit h la fonction définie sur I par $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$

où α et β sont deux réels.

Soient F et G les primitives respectives de f et g.

a) Vérifier que la fonction H telle que $H(x) = \alpha F(x) + \beta G(x)$ est une primitive de h.

b) Montrer alors que $\int_a^b h(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$

Activité 4 :

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, et a, b deux éléments de I.

1) En calculant l'intégrale entre a et b de chacun des termes de l'égalité :

$$(uv)'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$$

montrer que : $$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x).v(x)\,dx + \int_a^b u(x).v'(x)\,dx$$

2) En déduire que $\int_a^b u(x).v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x).v(x)\,dx$

A retenir

Définition

f étant une fonction continue sur un intervalle I.
On appelle intégrale de f entre a et b, le réel noté $\int_a^b f(x)dx$ défini par:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

où a et b sont des réels de l'intervalle I et F une primitive de f sur I.

Propriétés

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \quad \text{(Relation de Chasles)}$$

$$\int_a^c [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_b^c g(x)dx \quad \text{(Linéarité de l'intégrale)}$$

Intégration par parties

u et v étant deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et a, b deux éléments de I on a :

$$\int_a^b u(x).v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x).v(x)\,dx$$

Applications

1 Justifier l'existence et calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_1^2 (4x^3 - 3x^2 + 2x - 1)\,dx \quad ; \quad J = \int_3^5 \frac{1}{t-1}dt$$

$$K = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \sin u\,du \quad ; \quad L = \int_1^{-2} e^{2x}\,dx$$

2 a) Peut-on intégrer la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ sur l'intervalle [0,2] ? Pourquoi ?

b) Quelle condition doivent vérifier a et b pour que $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{1-t}$ existe ?

3 On donne la fonction f telle que $f(x) = | 2x - 3 |$.

a) Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$.

b) Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue , puis calculer $\int_0^3 |2x-3|\,dx$

4 a) Calculer $I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x+2}\,dx$

b) Soit, $K = \int_{-1}^{1} \frac{x}{x+2}\,dx$ calculer $2I + K$. En déduire la valeur de K.

5 En utilisant une intégration par parties , calculer :

a) $\int_1^e \ln(x)\,dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$

II. Intégrales et inégalités

Activités de découverte

Activité 1:

Soit f une fonction définie continue et positive sur un intervalle I.
Soient a et b deux réels de I tels que $a \leq b$.
a) F étant une primitive de f sur I, montrer que F est croissante sur I.

En déduire que $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

b) Soient g et h deux fonctions définies et continues sur I, et telles que $g(x) \leq h(x)$ pour tout $x \in I$. Comparer $\int_a^b g(x)dx$ *et* $\int_a^b h(x)dx$.

Activité 2 :

A l'instant t le tableau de bord d'une voiture indique la distance parcourue $x(t)$ et la vitesse $v(t)$. On sait que $x'(t) = v(t)$.
a) Quelle est la vitesse moyenne $\overline{v}$ de l'automobile entre les instants t_1 et t_2 ?
b) Montrer que la distance parcourue par l'automobile entre les instants t_1 et t_2 est égale à :

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

Exprimer alors $\overline{v}$ à l'aide de l'intégrale précédente.

• Plus généralement f étant une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels distincts de I, on appelle **valeur moyenne** de la fonction f sur l'intervalle $[a,b]$ le réel :

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

Activité 3:

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I , a et b deux réels distincts de I.
On suppose que pour tout réel $x \in [a,b]$ on a : $m \leq f(x) \leq M$.

Montrer que $$m \leq \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(t)dt \leq M$$
Cette inégalité s'appelle **inégalité de la moyenne.**

Activité 4:

Soit F une primitive de f. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction F sur l'intervalle $[a,b]$, montrer qu'il existe au moins un réel $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\,f(c).$$

A retenir

Positivité

Si $a \leq b$ et si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Si $a \leq b$ et si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Valeur moyenne

f étant une fonction définie et continue sur un intervalle I, a et b deux réels distincts de I, on appelle valeur moyenne de f sur $[a,b]$ et on note $\overline{f}$ le réel :

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

Inégalité de la moyenne

f étant une fonction définie et continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I, si pour tout réel $x \in [a,b]$ on a : $m \leq f(x) \leq M$, alors

$$m \leq \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(t)dt \leq M$$

Égalité de la moyenne

f étant une fonction définie et continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I, il existe au moins un réel $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

Si $a \neq b$ alors l'égalité de la moyenne s'écrit : $\overline{f} = f(c)$.

Applications

a) Justifier chacune des inégalités suivantes :

1

$$\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2+1}dx \geq 0 \qquad et \qquad \int_1^9 (-x^2+4\sqrt{x}-3)\,dx \geq 0$$

b) Montrer que pour tout $x \in [1,2]$ on a : $0 \leq \dfrac{1}{x^3+1} \leq \dfrac{1}{2}$.

En déduire que $0 \leq \displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t^3+1} \leq \frac{1}{2}$

$\boxed{2}$ Déterminer la valeur moyenne de la fonction f sur $[a,b]$ dans chacun des cas suivants:

a) $f(x) = 3$, $x \in [-1,2]$ *b)* $f(x) = \sin x$, $x \in [0,\pi]$

c) $f(x) = -x + 5$, $x \in [0,\frac{5}{2}]$

$\boxed{3}$ L'intensité du courant étant variable en fonction du temps t , elle est donnée par la fonction i :

$$i(t) = 2\sin(120\pi t + \frac{\pi}{2})$$

a) Montrer que $T = \dfrac{1}{60}$ est une période de cette fonction.

b) Calculer la valeur moyenne de i sur cette période.

III. Calculs d'aires planes

Activités préliminaires

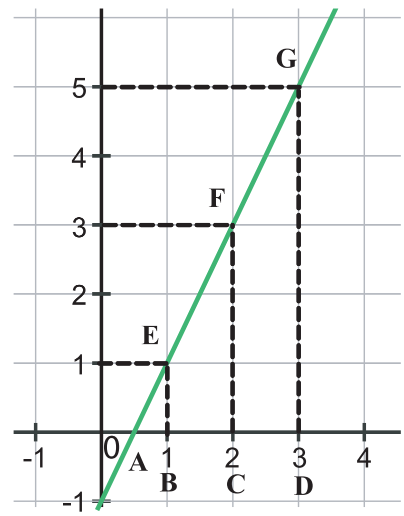
Activité 1 :

Le schéma suivant est une représentation graphique de la fonction $f : x \longmapsto 2x - 1$

L'unité d'aire est celle d'un carré de longueur 1.

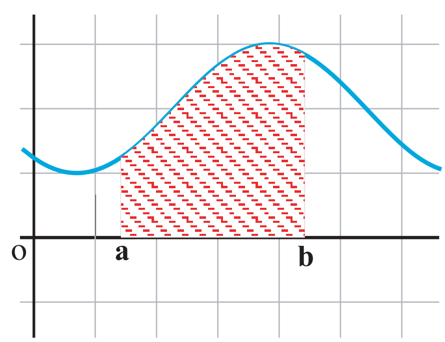
a) Déterminer l'aire du triangle ACF puis calculer $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx$. Que remarque-t-on ?

b) Déterminer l'aire du trapèze BDGE puis calculer $\int_{1}^{3} f(x)dx$. Que remarque-t-on ?



Plus généralement on admet que si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b]$ $(a < b)$ alors l'aire de la partie limitée par la courbe de f ,la droite des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ a pour mesure

$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

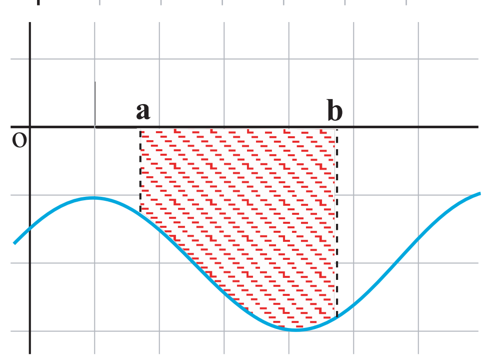


Activité 2 :

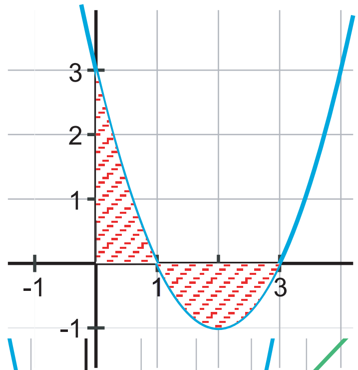
a) Soit f une fonction continue et négative sur $[a,b]$ $(a < b)$.

Montrer que l'aire A de la partie hachurée a pour mesure

$$-\int_{a}^{b} f(x)dx$$



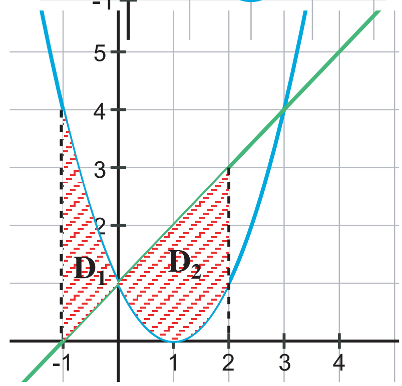
b) La figure ci-contre est la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 4x + 3$
Donner le tableau de signe de f sur l'intervalle [0,3].
Calculer l'aire de la partie hachurée et vérifier quelle a pour mesure $\int_0^3 |f(x)|dx$



Activité 3:

La figure ci-contre est la représentation graphique des fonctions $f : x \mapsto x + 1$ et $g : x \mapsto (x-1)^2$.
a) Montrer que l'aire du domaine D_1 a pour mesure $\int_{-1}^{0} [g(x) - f(x)]dx$ et que l'aire du domaine D_2 a pour mesure $\int_0^2 [f(x) - g(x)]dx$

Calculer l'aire de D_1 et l'aire de D_2.
b) Soit $D = D_1 \cup D_2$. Calculer l'aire de D et vérifier qu'elle a pour mesure $\int_{-1}^{2} |g(x) - f(x)|dx$

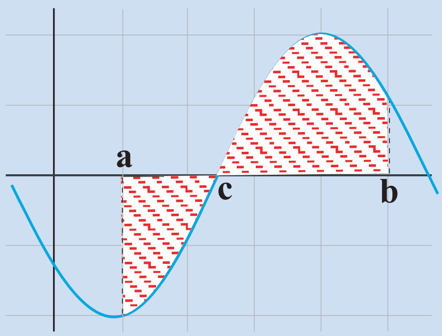


A retenir

Théorème

f étant une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ (a< b) , et le plan étant rapporté à un repère orthonormé , l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ l'axe des abscisses et la courbe représentative de f a pour mesure

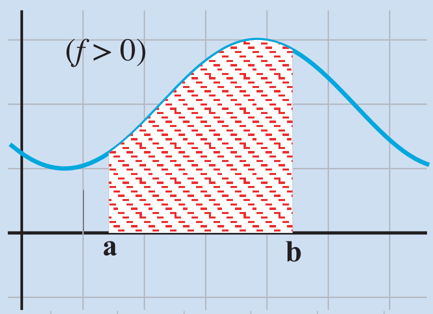
$$A = \int_a^b |f(x)|dx$$



En particulier

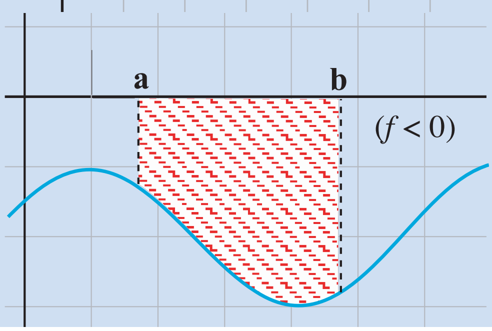
•Si f est positive sur $[a,b]$ $(a < b)$, alors

$$A = \int_a^b f(x)dx$$



•Si f est négative sur $[a,b]$ $(a < b)$, alors

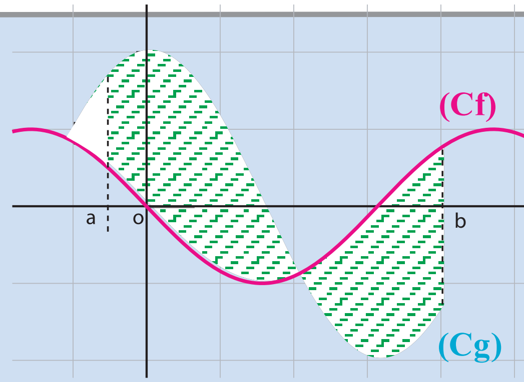
$$A = -\int_a^b f(x)dx$$



A retenir

Théorème

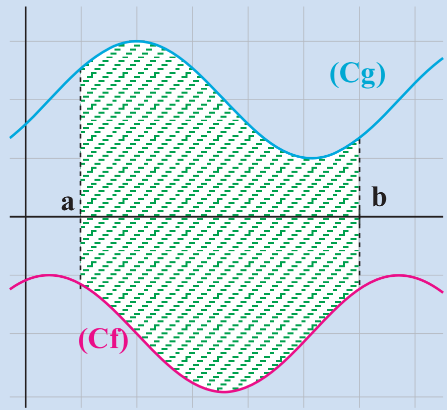
f et g étant deux fonctions continues sur $[a,b]$ ($a < b$), et le plan étant rapporté à un repère orthonormé alors l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, l'axe des abscisses et les courbes représentatives de f et g a pour mesure $A = \int_a^b \left|g(x) - f(x)\right| dx$



En particulier l'aire du domaine

D = $\{M(x, y) \,/\, a \le x \le b \quad et \quad f(x) \le y \le g(x)\}$

a pour mesure $A = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$



Applications

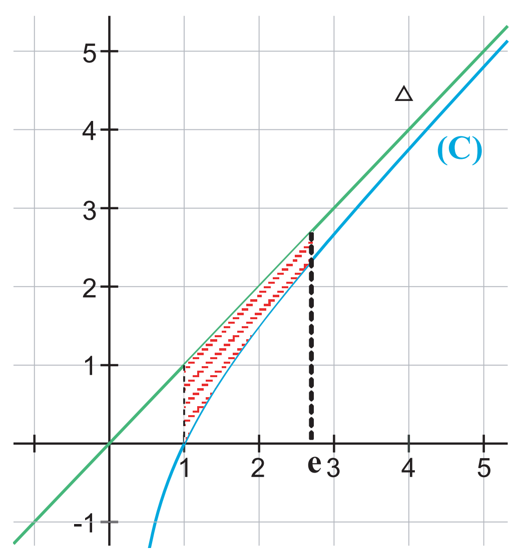
$\boxed{1}$ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$. Calculer l'aire de la région du plan limitée par la courbe (C_f), la droite de abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$.

$\boxed{2}$ Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe représentative (C_f) de la fonction $f : x \longmapsto \cos x$, la droite de abscisses et les droites d'équations $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \pi$

$\boxed{3}$ Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$. par

$$f(x) = x - \frac{1}{x}$$

Calculer l'aire de la région du plan limitée par la courbe (C) représentative de f, Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.



Apprendre à chercher

Situation 1

Soit (I_n) la suite la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x dx$

1) Calculer I_1 et I_2.

2) a) Montrer que $I_{n+1} = I_n + \frac{1}{(n+1)!}$

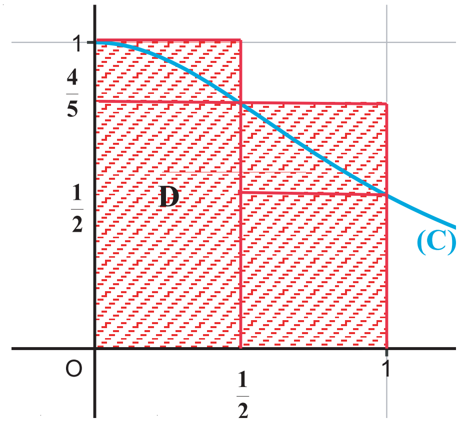
b) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a $0 \leq 1 - x \leq 1$

c) En déduire que la suite (I_n) est positive et croissante.

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq I_n \leq \frac{e-1}{n!}$ (On pourra utiliser 2)*b*))

b) En déduire la limite de (I_n).

Situation 2



A) La courbe suivante est la représentation graphique de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

On se propose d'encadrer l'aire du domaine

$$D = \left\{ M(x,y) \,/\, 0 \leq x \leq 1 \quad et \quad 0 \leq y \leq f(x) \right\}$$

1) On subdivise l'intervalle $[0,1]$ en deux intervalles $[0, \frac{1}{2}]$ et $[\frac{1}{2}, 1]$

Montrer, en considérant les rectangles de la figure que $\frac{13}{20} <$ aire(D) $< \frac{9}{10}$

2) a) On subdivise $[0,1]$ en quatre intervalles $[0,\frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$ et $[\frac{3}{4},1]$

En utilisant les rectangles comme précédemment donner un encadrement de *D*.

b) Comparer l'encadrement trouvé à la question 1) et celui de la question 2).

3) Refaire le même travail en subdivisant l'intervalle $[0,1]$ en 10 intervalles de même longueur .

B) On donne la fonction g définie sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ par $g(x) = \tan x$

1) a) Dresser le tableau de variations de g et montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $[0,1]$.

b) Déterminer $g^{-1}(0)$ et $g^{-1}(1)$.

2) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0,1]$ et que $\left(g^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

3) Montrer que $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$

4) Déduire des parties *A* et *B* un encadrement de π .

Avec l'outil informatique

Un programme qui donne une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction par la méthode des rectangles . La fonction f est définie par : $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

```
program Integration_Rectangles;
uses wincrt ;
var a,b:real;n:integer;

function f(x:real):real; {Lafonction à integrer}
begin  f:=1.0 /(1.0+x*x) end;
function Rectangles(a,b:real;n:integer):real;
   var k:integer;
   h,x,somme:real;
begin
    somme:=0.0;
    h:=(b-a)/n;
    x:=a+h/2.0;
    for k:=0 to n-1 do
    begin
        somme:=somme+f(x);
        x:=x+h;
    end;
    Rectangles:=somme*h
end;
{Le programme principal ***********************************}
begin
    clrscr; write('Intégration par la méthode des rectangles');
    write('Borne inférieure  (a) " ');
    read(a);
    writeln;

    repeat
      write('Borne supérieure  (b) : ');
    read(b);
    writeln;
    until b>a;
    repeat
      write('Nombre d’intervalles : ');
    read(n);
    writeln;
    until n>0;
       writeln ('Valeur de l’intégrale est = ',Rectangles(a,b,n):0:12);
end.
```

Exercices et problèmes

1 Cocher la bonne réponse :

1) $\int_0^a dx =$ $(a)\ 0$ $(b)\ a^2$ $(c)\ a$

2) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx =$ $(a)\ 0$ $(b)\ 2$ (c) n'existe pas

3) $\int_0^1 e^x dx =$ $(a)\ 0$ $(b)\ e-1$ $(c)\ e$

4) $\int_{-1}^{1} x^2 dx =$ $(a)\ \frac{2}{3}$ $(b)\ 2$ $(c)\ 0$

5) $\int_0^{\pi} \sin x dx =$ $(a)\ \pi$ $(b)\ 2$ $(c)\ 0$

2 Répondre par vrai ou faux :

1) $\int_0^2 x^2 dx > 0$ 2) $\int_0^{-2} \sqrt{e^x + 1}\, dx \geq 0$

3) $\int_2^3 \ln x\, dx > 0$ 4) $\int_1^2 (x+4)\, dx \geq 0$

3 Calculer les intégrales suivantes :

$A = \int_1^4 \frac{x^2-1}{x} dx$, $B = \int_0^1 (t^2-t+2)dt$,

$C = \int_e^{e^2} \frac{1}{x\ ln\ x} dx$, $D = \int_1^e \frac{1}{t} e^{\ ln\, t} dt$,

$E = \int_0^1 \frac{e^{3x}+1}{e^x} dx$ $F = \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2} dt$,

$G = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, e^{\sin t}\, dt$, $H = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x e^{x^2} dx$,

$I = \int_1^{-1} \frac{1}{(4+2t)^2} dt$, $J = \int_{-1}^{0} \frac{1}{1-2t} dt$

$K = \int_0^x \frac{t}{(1+t)^3} dt$, $L = \int_1^e \frac{e^x}{e^x-1} dx$,

$M = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt$, $N = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{1+\cos u} du$

4 Soient $I = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+e^x} dx$

et $J = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{-x}+e^x} dx$.

1) Calculer $I+J$ et $J-I$.
2) En déduire les valeurs de I et J.

5 La population d'une ville est modélisée par la fonction f définie sur [0 ; 10] par :

$$f(x) = 50.(1{,}04)^x$$

où x est le rang donné depuis l'an 2000 et $f(x)$ le nombre d'habitants en milliers.

a) Calculer la population de cette ville après 10 ans.

b) Calculer la valeur moyenne de cette population entre 2000 et 2010.

6 En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$A = \int_0^1 t\, e^{-2t}\, dt$ $B = \int_1^e t\ ln\, t\, dt$

$C = \int_0^{ln2} (t^2+1)e^t\, dt$ $D = \int_1^e x^2 lnx\, dx$

$E = \int_0^{\pi} t\ \cos t\, dt$ $F = \int_1^e lnx\, dx$

$G = \int_0^1 x^2 e^x dx$

7 Soit (I_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt \\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \sin t\, dt, \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1) a) Calculer I_0 .

b) Calculer I_1 par une intégration par parties.

2) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$I_n = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n-1}\cos t\,dt$$

3) a) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que pour tout $n \geq 2$ on a :

$$I_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}$$

b) En déduire I_2 et I_3 . Puis la valeur de l'intégrale $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2t+t^2-t^3)\sin t\,dt$

8 Soit $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + x}{1 - x}$, $x \neq 1$.

1) Déterminer les réels a , b , c et d tels que $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c + \dfrac{d}{1 - x}$

2) Calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$

9 **1)** Soit $n \geq 1$. Calculer $\int_0^n e^{-t}\,dt$.

2) Calculer en fonction de n l'intégrale

$U_n = \int_0^n te^{-t}\,dt$ (par parties)

3) Soit $V_n = \int_0^n t^2e^{-t}\,dt$

Montrer que $V_n = 2U_n - n^2e^{-n}$, $n \geq 1$.

4) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

10 Les ventes mensuelles d'un produit durant une campagne publicitaire croissent suivant le modèle: $V(t) = \dfrac{600}{1+3e^{-0,5t}}$

où t désigne le nombre de mois écoulés à partir du début de la campagne publicitaire et $V(t)$ désigne le volume des ventes.

1) Quel était le volume des ventes au début de la campagne ?

2) Quel est le volume de vente maximum ?

3) Calculer le volume moyen des ventes au cours des 4 premiers mois.

11 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{e^x + 1}$.

1) Montrer qu'il existe deux réels a *et b* tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$f(x) = a + \dfrac{be^x}{e^x + 1}$

2) Calculer alors

$$\int_0^{\ln 2} f(x)\,dx$$

12 On se propose de calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3}dx \ .$$

1) Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx \quad \text{et} \quad B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$$

2) Déterminer les réels a,b et c tels que

$$\frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{a}{1+e^x} + \frac{b}{(1+e^x)^2}$$

3) En déduire $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2}dx$

4) En intégrant J par parties , exprimer I en fonction de J. En déduire I .

13 Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = e^x - 2$ et $g(x) = e^x - e^{-x}$.

1) Etudier les fonctions f et g et tracer leurs courbes représentatives C_f et C_g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(on prendra pour unité : 2 cm).

2) Déterminer le point commun à C_f et C_g.

3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Calculer l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre C_f et C_g et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

4) Etudier la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$. Interpréter géométriquement le résultat.

14 On définit la fonction f sur l'intervalle I =]-2; +∞ [par :

$$f(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{x + 2}$$

On appelle (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Déterminer trois réels a,b et c tels que

pour tout $x \in I$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+2}$

2) Etudier alors les variations de f sur I.

Préciser les limites de f aux bornes de I. Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?

3) Montrer que la courbe (C_f) admet une asymptote (D) oblique.

Etudier la position (C_f) par rapport à (D).

4) Tracer (C_f) ainsi que ses asymptotes:(unité graphique = 2 cm).

5) Pour $a \geq 1$, on définit la partie du plan A(a) comme étant l'ensemble des points M de coordonnées (x ; y) tels que:

$$1 \leq x \leq a \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)$$

a) Représenter la partie A(3) sur la figure.

b) Vérifier que

$$\int_1^3 [f(x)-3x+7]dx = 12\ln\frac{2}{3}$$

Quelle est l'aire de $A(3)$ en cm²?

c) Déterminer en fonction de a l'intégrale

$$I(a) = \int_1^a [f(x) - 3x + 7]dx$$

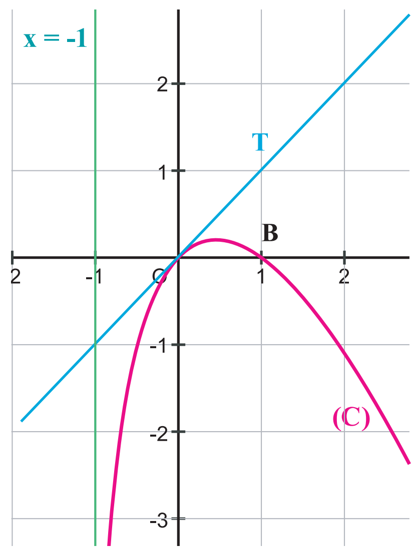
Quelle est l'aire de A(a) en fonction de a, en cm²? Quelle est la limite de cette aire si a tend vers $+\infty$?

15 **1)** La fonction f représentée ci-dessous par la courbe (C) est définie sur]-1, +∞[par

$$f(x) = (ax+b)\ln(x+1)$$

où a et b sont deux constantes. La courbe (C) passe par le point $B(1,0)$ et admet à l'origine une tangente T d'équation $y = x$.

Déterminer les réels a et b



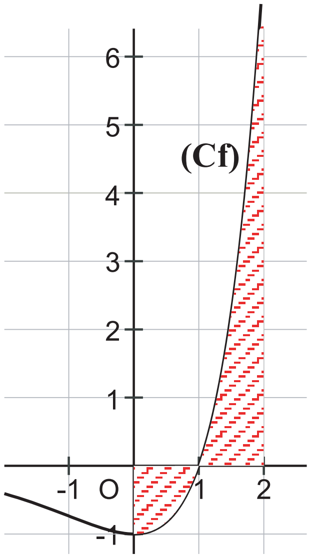
2) Soit la fonction F définie sur]-1,+∞[par

$$F(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} - \left(\frac{x^2}{2} - x - \frac{3}{2}\right)\ln(x+1)$$

a) Montrer que la fonction F est une primitive de f qui s'annule en 0.

b) Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$ Donner une interprétation géométrique de cette intégrale.

16 Soit f la fonction telle que $f(x) = (x - 1)e^x$. $x \in \mathbb{R}$; C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (voir figure).



1) Calculer , par une intégration par parties, chacune des intégrales suivantes

$$I=\int_0^1 f(x)dx \quad et \quad J=\int_1^2 f(x)dx$$

2) Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par C_f , $x=0$, $x=2$ et $y=0$

(La partie hachurée voir la figure)

17 **1)** Calculer, par parties, l'intégrale :

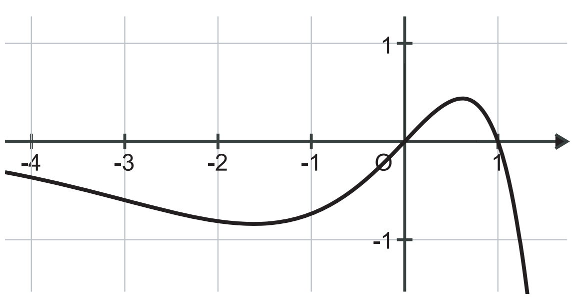
$$I = \int_0^{\alpha}(x-x^2)e^x dx \quad (\alpha \in \mathbb{R}-)$$

2) Soit $f(x) = (x - x^2)\, e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(unité = 2 cm) (Voir figure ci-dessous).

a) Calculer, en cm^2, l'aire $A(\alpha)$ de la région limitée par (C), $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et les droites $x = \alpha$ et $x = 1$.



b) calculer : $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} A(\alpha)$

18 **1)** Soit la suite (I_n) définie par

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{2x}\, dx \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

a) Montrer que $I_1 = \dfrac{e^2+1}{4}$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$2\, I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$ pour tout $n \geq 1$.

c) En déduire I_2 et I_3.

2) Soient les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\, e^{2x}$ et $g(x) = x^3\, e^{2x}$.

a) Étudier la position relative de f et g .

b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C_f) , (C_g) , $x = 0$ et $x = 1$.

3) a) Montrer que $I_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$ et que (I_n) est décroissante.

b) Déduire de la question 1) b) et de la monotonie de (I_n) que :

$$\frac{e}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e}{n+2}$$

Déterminer alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n$

Maths et culture

Bernhard Riemann est né le 17 septembre 1826 à Hanovre.

De 1847 à 1849, c'est à Berlin qu'il poursuit ses études, avant de revenir à Göttingen préparer sa *Dissertation inaugurale* (selon la terminologie allemande) sous la direction de Gauss. Il la soutient en 1851 : elle concerne principalement la théorie des fonctions d'une variable complexe, dont il s'intéresse particulièrement aux propriétés géométriques. Il donne notamment la définition de ce qu'on nomme désormais une surface de Riemann.
Dans la foulée, Riemann prépare son habilitation pour devenir Privat Dozent. Il étudie désormais la représentation des fonctions par des séries trigonométriques, et au passage pose les jalons de **l'intégrale de Riemann** : contrairement à Cauchy, il ne se limite plus aux fonctions c ontinues.

L'intégrale de Riemann d'une fonction continue

On sait depuis Mercator et Leibniz, que si une fonction est positive, l'intégrale sur un intervalle [a,b] évalue l'aire sous la courbe. L'idée de Riemann fut de remplacer un arc de courbe sur chaque $[x_i, x_{i+1}]$ par un segment d'ordonnée $f(c_i)$, $x_i < c_i < c_{i+1}$: on parle de fonction en escalier.
Considérons un intervalle [a,b] sur lequel une fonction f est continue et soit :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$$

une subdivision s = (x_i) de [a,b] en n sous-intervalles. La somme :

$$S_n = (x_1 - x_0) f(c_1) + (x_2 - x_1) f(c_2) + (x_3 - x_2) f(c_3) + ... + (x_n - x_{n-1}) f(c_n)$$

sur cet intervalle, est une somme de Riemann attachée à f sur l'intervalle [a,b].
Si, lorsque n tend vers l'infini, de sorte que le plus grand des pas $x_i - x_{i-1}$ tende vers 0, la somme S_n admet une limite finie pour toute subdivision s et tout choix des c_i, on dit que *f* est intégrable au sens de Riemann. On démontre alors que cette limite ne dépend ni de s ni des c_i choisis. On l'appelle intégrale de *f* sur [a,*b*] au sens de Riemann et on écrit :

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \int_a^b f(x)dx$$ (le signe $\int_a^b$ est dû à Leibniz)

- Toute fonction numérique continue sur [*a*,*b*] est intégrable au sens de Riemann sur cet intervalle.
- Une fonction numérique bornée sur [*a*,*b*] est intégrable au sens de Riemann sur cet intervalle si et seulement si ses sommes de Riemann sont convergentes.

Approximation :

Ce principe permet ***le calcul approché d'intégrales*** en choisissant une subdivision régulière: de pas : $x_{i+1} - x_i = (b - a)/n$, indépendant de *i*, et un *n* "assez grand". On obtient une succession de rectangles approchant l'aire sous la courbe, en rose ci-dessus où ci est choisi ici au "milieu" de $[x_i ; x_{i+1}]$: on calcule :

$$Sn = h.f(c_i) \text{ , } i \text{ variant de } 0 \text{ à } n - 1$$

avec : $h = (b - a)/n$, $x_i = a + i.h$, $c_i = (x_{i+1} + x_i)/2 = x_i + h/2$.
Le passage à la limite fournit l'intégrale cherchée.

- les arcs de courbe $(M_i M_{i+1})$ étant remplacés par les segments "horizontaux" $[M_iN_{i+1}]$, on parle de la méthode des rectangles (méthode correspondant à la théorie ci-dessus). Mais la méthode converge "lentement" : elle nécessite de "grandes" valeurs de n pour obtenir un résultat acceptable.
- les arcs de courbe (M_iM_{i+1}) étant remplacés par les segments $[M_iM_{i+1}]$, ce qui a pour effet *d' accélérer*la convergence, on parle de la méthode des trapèzes (interpolation linéaire).