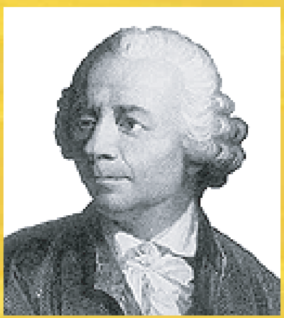
Chapitre 7

FONCTIONS EXPONENTIELLES

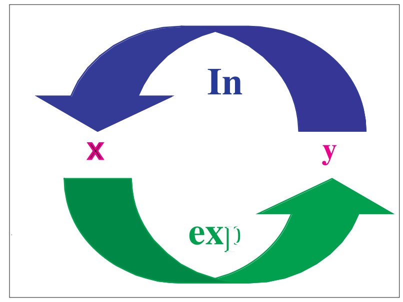


EULER Leonard
1707-1783

I. Fonction exponentielle :

➢ On sait que la fonction logarithme népérien est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
Elle admet une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0,+\infty[$.
Cette fonction est appelée **fonction exponentielle**, elle est notée ***exp***.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\exp"] &]0,+\infty[\\ x \arrow[r] & y \arrow[l, bend left, "ln"] \end{tikzcd}$$



$x \in \mathbb{R}$, $y \in\ ]0,+\infty[$; $\qquad y = exp(x) \Leftrightarrow x = ln\, y$

Ainsi $x \in\ ]0,+\infty[$ $\qquad exp\,(ln\,(x)) = x$

$x \in \mathbb{R}$, $\qquad ln\,(exp\,(x)) = x$

Activités de découverte

Activité 1 :

a) Déterminer $exp(0)$, $exp(1)$, $exp(-1)$, $exp(2)$, $exp(-2)$, $exp(\frac{1}{2})$ et $exp(-\frac{1}{3})$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ $\quad exp(n) = e^n$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\ exp(\frac{1}{n}) = \sqrt[n]{e}$

• On convient de remplacer pour tout $\quad x \in \mathbb{R}$ $\ exp(x)$ par e^x.
ainsi pour tout $\ x \in \mathbb{R}$, $\ exp(x) = e^x$

Cette nouvelle écriture est une extension des propriétés trouvées dans l'activité précédente.

Activité 2 :

a) a et b étant deux réels, on pose $\quad x = e^a$, $y = e^b$ et $z = e^{a+b}$.
Déterminer $ln\, z$ puis $ln(xy)$. En déduire que $e^a\, e^b = e^{a+b}$.

b) En écrivant d'une autre manière l'égalité $e^{b-b} = e^0$, montrer que $\quad e^{-b} = \frac{1}{e^b}$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a : $(e^a)^n = e^{na}$

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sqrt[n]{e^a} = e^{\frac{a}{n}}$.

A retenir

Définition

La fonction exponentielle , notée exp, est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien.

$$\begin{aligned} exp : \mathbb{R} &\to\ ]0,+\infty[\\ x &\mapsto exp\,(x) = e^x \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}, y \in \left]0,+\infty\right[\quad y = exp\,(x) \Leftrightarrow x = \ln y$

ou encore $\quad y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$

On a pour tout $x \in \mathbb{R} \quad ln(e^x) = x.$

Pour tout $x > 0 \quad e^{\ln x} = x$

Pour tous réels a et b on a : $e^a\, e^b = e^{a+b}, \quad e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b} \quad et \quad e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a : $\quad (e^a)^n = e^{na}$

Applications

1 A l'aide d'une calculatrice donner une valeur approchée à 10^{-4} près de $e^{1,2}$, $\quad e^{\sqrt{3}}$, $\quad e^{-\frac{1}{2}}$

2 Simplifier les écritures suivantes :

$e^{\ln 5}$, $e^{-\ln 2}$, $e^{2+\ln 3}$, $e^{\frac{1}{2}\ln 7}$

$\ln e^{-0,4}$, $\ln\sqrt{e^5}$ et $\ln e^{\frac{1}{2}\ln 3}$

Calculatrice :
Utiliser les 2 touches

2ndF et puis ln

3 Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

a) $e^x = 5$ $\qquad$ b) $e^x = -3$

c) $e^{2x-3} = e^3$ $\qquad$ d) $\dfrac{e^x}{e^{2x}+1} = \dfrac{1}{2}$

II. Etude de la fonction exponentielle

Activités de découverte

Activité 1:

a) Tracer, dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction logarithme népérien et en déduire celle de la fonction exponentielle.

b) Donner $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x$

c) En posant $y = e^x$ déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$.

Activité 2 :

a) En posant $X = -x$ déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

(on pourra écrire $e^x = (e^{\frac{x}{n}})^n$)

En déduire que $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

Activité 3 :

a) Montrer que la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) En considérant le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd} \ln y = x \arrow[r, "exp"] & y = e^x \arrow[l, bend left, "ln"] \end{tikzcd}$$

montrer que $(exp)'(x) = \dfrac{1}{(ln)'(y)}$. En déduire que $(exp)'(x) = (exp)(x)$

Activité 4 :

Calculer la valeur de la dérivée de la fonction exponentielle en 0.

En déduire que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Activité 5 :

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et f la fonction définie sur I par

$$f(x) = e^{u(x)}$$

Ecrire f sous la forme de la composée de deux fonctions et déterminer $f'(x)$.

A retenir

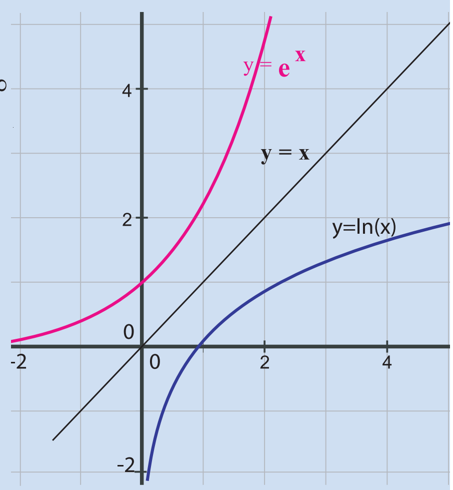
Limites

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0.$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$,

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$



Dérivées et Primitives

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$exp'(x) = exp(x) \ , \ x \in \mathbb{R} \ .$$

Si u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, alors la fonction *expou* est dérivable sur I et on a :

$$(exp \ o \ u)'(x) = u'(x) \ exp(u(x))$$

Une primitive de la fonction $x \longmapsto u'(x)\, e^{u(x)}$ est la fonction

$x \longmapsto e^{u(x)}$

Applications

1 Calculer les limites suivantes :

$a)\ \lim\limits_{x \to -\infty} (2x-1)e^{2x}$ $\qquad b)\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} - 2x$

$c)\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x}$ $\qquad d)\ \lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$

$e)\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x}-1}{x}$ $\qquad f)\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x^2}-1}{x}$

2 Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants :

$a)\ f(x) = \dfrac{1}{e^x}$ $\qquad b)\ f(x) = (2x-5)e^{2x}$

$c)\ f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2}$ $\qquad d)\ f(x) = e^{\cos x}$

3 Donner une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

$a)\ f(x) = \cos x\, e^{\sin x}$ $\qquad b)\ g(x) = e^{3x}$

$c)\ h(x) = x e^{x^2-1}$ $\qquad d)\ k(x) = \dfrac{1}{e^{2x}}$

III. Puissance rationnelle d'un réel positif.

Activités de découverte

Activité 1 :

a) x étant un réel strictement positif , écrire plus simplement :

$$e^{2\ln\pi}\ ;\ e^{-5\ln 7}\ ;\ e^{\frac{1}{2}\ln 3} \text{ et } e^{-4\ln x}$$

b) x étant un réel strictement positif et n un entier naturel , écrire chacun des réels x^n, x^{-n} et $\sqrt[n]{x}$ sous la forme de l'exponentielle d'un réel.

➢ x étant un réel strictement positif et n un entier relatif, on sait que $e^{n\ln x} = x^n$.

Si dans l'écriture $e^{n\ln x}$ on remplace n par le rationnel r, on obtient l'expression $e^{n\ln x}$ qui a toujours un sens, ceci suggère de définir x^r .

Ainsi pour tout $x > 0$ et pour tout rationnel r, on définit x^r par l'égalité

$$x^r = e^{r\ln x} \qquad \text{(lire } x \text{ puissance } r\text{)}$$

x^r est une **puissance rationnelle** de x

c) Ecrire sous forme exponentielle les réels $5^{\frac{3}{2}}$ et $2^{-\frac{3}{5}}$

Activité 2 :

n étant un entier naturel et x un réel strictement positif,

a) Montrer que $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

b) Montrer de même que si $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ on a : $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$

Activité 3 :

Soient a et b deux réels strictement positifs, r et r' deux rationnels.
Montrer, en utilisant la définition de la puissance rationnelle, les égalités suivantes :

$$\ln a^r = r\ln a \quad ; \quad a^{r+r'} = a^r a^{r'} \quad ; \quad a^{r-r'} = \frac{a^r}{a^{r'}}$$

$$\left(a^r\right)^{r'} = a^{rr'} \; ; \; \left(ab\right)^r = a^r b^r \quad ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

Activité 4 :

Soit r un rationnel strictement positif et x un réel strictement positif.
a) En remarquant que $\ln x^r = r\ln x$, montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} x^r \ln x = 0$ et que $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$

b) Vérifier que $\frac{e^x}{x^r} = e^{(x - r\ln x)}$

En remarquant que $x - r\ln x = x\left(1 - r\frac{\ln x}{x}\right)$, montrer que pour tout rationnel positif r, on a :
$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty$

c) Montrer que $x^n e^x = \frac{x^n}{e^{-x}}$

En déduire que pour tout entier positif n, on a : $\lim\limits_{x\to -\infty} x^n e^x = 0$

A retenir

Définition

x étant un réel strictement positif, et r un rationnel,
x^r est une puissance rationnelle de x définie par :

$$x^r = e^{r\ln x}$$

Propriétés

Si a et b sont deux réels strictement positifs, r et r' sont deux rationnels
on a :

$$\ln a^r = r\ln a \quad ; \quad a^{r+r'} = a^r a^{r'} \quad ; \quad a^{r-r'} = \frac{a^r}{a^{r'}}$$

$$\left(a^r\right)^{r'} = a^{rr'} \; ; \; \left(ab\right)^r = a^r b^r \quad ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

Applications

1 Simplifier les écritures suivantes :

a) $81^{\frac{2}{3}}$ b) $16^{\frac{3}{4}}$ c) $121^{\frac{3}{2}}$ d) $5^{\frac{3}{2}}\sqrt[6]{125}$

2 Ecrire sous la forme a^r où a est un réel strictement positif :

a) $\sqrt{\sqrt{a}}$ b) $a\sqrt{a}$ c) $\frac{\sqrt{a}}{a^2}$ d) $\sqrt[3]{a^2}$

IV. Fonction exponentielle de base *a*.

Activités de découverte

Activité 1 :

Soit a un réel strictement positif et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{x\ln a}$

a) Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$, $f(-1)$, $f(-3)$, $f(\frac{1}{2})$ et $f(-\frac{1}{2})$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, , $f(n) = a^n$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(\frac{1}{n}) = a^{\frac{1}{n}}$

d) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$, $f(\frac{p}{q}) = a^{\frac{p}{q}}$.

➢ On convient de remplacer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la notation $e^{x\ln a}$ par a^x.

Ainsi $e^{x\ln a} = a^x$

Pour $a \neq 1$, f est appelée **fonction exponentielle de base *a*.**

Activité 2 :

Montrer que pour tous réels x et x' et pour tous réels strictement positifs a et b on a :

$$a^x.a^{x'} = a^{x+x'} \quad , \qquad a^x.b^x = (ab)^x$$

$$a^x.a^{-x} = 1 \quad , \quad \frac{a^x}{a^{x'}} = a^{x-x'} \quad , \qquad (a^x)^{x'} = a^{xx'}$$

Activité 3 :

Soit a un réel strictement positif et $f_a(x) = a^x$.

a) Montrer que $f'_a(x) = a^x \ln a$.

b) On prend $a = 2$. Donner le tableau de variations de f_2 , déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2^x}{x}$ et tracer la courbe représentative de f_2.

c) On prend $a = \frac{1}{2}$. Montrer que $f_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{f_2(x)}$,déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f_{\frac{1}{2}}(x)}{x}$ et tracer la courbe. représentative de $f_{\frac{1}{2}}$

d) Vérifier que pour tout réel x, $f_2(-x) = f_{\frac{1}{2}}(x)$. En déduire que les courbes représentatives

de f_2 et $f_{\frac{1}{2}}$ sont symétriques par rapport à la droite des ordonnées.

A retenir

Définition et Notation

a étant un réel strictement positif et x un réel, on appelle fonction exponentielle de base a la fonction $x \longmapsto e^{x\ln a}$

et on note a^x le réel e^{xLna}.

$$a^x = e^{x\ln a}$$

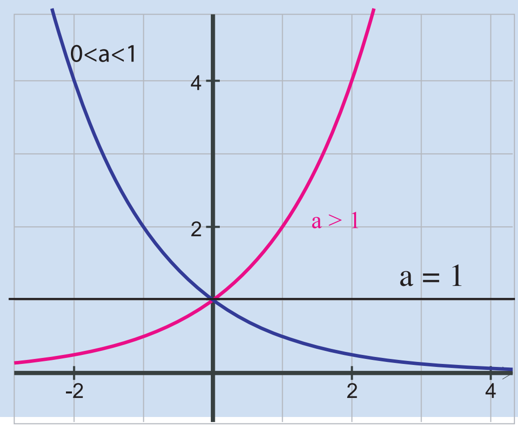
Propriétés

Pour tous réels x et x' et pour tous réels strictement positifs a et b on a :

$a^x.a^{x'} = a^{x+x'}$, $a^x.b^x = (ab)^x$

$a^x.a^{-x} = 1$, $(a^x)^y = a^{xy}$

Courbe représentative



Applications

1 Résoudre les équations suivantes :

$3^x = 15$, $10^x = 72$

$7^{x-1} = 5^x$, $4^x - 3.2^x + 2 = 0$

2 Sur un étang (de surface infinie…) une population de nénuphars double chaque jour (au premier jour elle est de un nénuphar). Comment modéliser le phénomène ?
Au bout de n jours on a 2^n nénuphars (n est un entier). Combien en a-t-on au bout de 16 jours 12 heures 45 minutes (… soit 16,53125 jours) ?

V. Etude de fonctions du type $x \longmapsto e^{u(x)}$.

Exemple 1

On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{-x^2}$.
1) Déterminer l'ensemble de définition de f et montrer qu'elle est paire.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3) Dresser le tableau de variation de f sur $[0,+\infty[$.

4) Tracer la courbe représentative (C_f) de f.

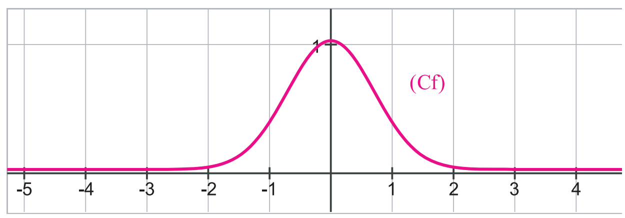
Solution

1) La fonction est définie sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $(-x) \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$. Donc f est paire.

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x^2} = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2) = -\infty$

3) $f(x)$ est de la forme $e^{u(x)}$ avec $u(x) = -x^2$. Comme la fonction $x \mapsto -x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a : $f'(x) = -2xe^{-x^2}$.
Comme e^{-x^2} est toujours positif, le signe de $f'(x)$ est celui de $(-2x)$.
4) Le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+$ est le suivant ainsi que sa courbe :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$+\infty$ 0



Exemple 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x + 2 - e^{\frac{1}{2}x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

c) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter géométriquement le résultat.

d) Montrer que la droite Δ d'équation $y = \frac{1}{2}x + 2$ est une asymptote pour la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

2) Etudier les variations de f.
3) Tracer Δ et (C).
4) Montrer graphiquement que l'équation $2e^{\frac{1}{2}x} = x + 4$ admet deux solutions α et β
Donner un encadrement de α et de β avec la précision permise par le graphique.

Solution

1) a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (\frac{1}{2}x + 2) - \lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{2}x} = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{2}x} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{1}{2}x + 2 - e^{\frac{1}{2}x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}x(1 + \frac{4}{x} - \frac{e^{\frac{1}{2}x}}{\frac{1}{2}x})$. L'expression $\frac{e^{\frac{1}{2}x}}{\frac{1}{2}x}$ est de la forme

$\dfrac{e^u}{u}$ avec u tendant vers $+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{2}x}}{\frac{1}{2}x}=+\infty$ et par suite $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}-\dfrac{e^{\frac{1}{2}x}}{\frac{1}{2}x}\right)=-\infty$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\frac{1}{2}x+2-e^{\frac{1}{2}x}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{x}-\dfrac{e^{\frac{1}{2}x}}{x}$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{2}x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2}\dfrac{e^{\frac{1}{2}x}}{\frac{1}{2}x}=+\infty$ car $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^u}{u}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$

Il en résulte que la courbe (C) présente au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite des ordonnées.

d) On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(\dfrac{1}{2}x+2)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-e^{\frac{1}{2}x})=0$. Donc la droite Δ est une asymptote pour (C).

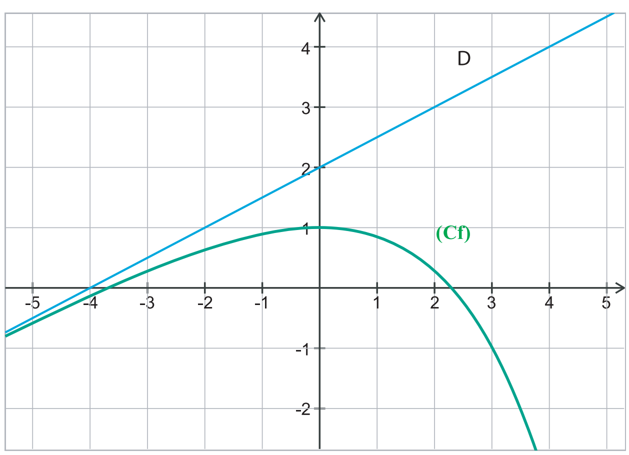
2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme somme de fonctions dérivables et on a :

$f'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}=\dfrac{1}{2}(1-e^{\frac{1}{2}x})$. $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow 1-e^{\frac{1}{2}x}\geq 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x}\leq 1 \Leftrightarrow x\leq 0$

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	0	+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

3) courbe



4) $2e^{\frac{1}{2}x}=x+4 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x}=\dfrac{1}{2}x+2 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x}-\dfrac{1}{2}x-2=0 \Leftrightarrow f(x)=0.$

Donc les solutions de l'équation précédente sont les abscisses des points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses. Graphiquement on a deux points d'abscisses α et β telles que :

$-4<\alpha<-3$ et $2<\beta<3$

Apprendre à chercher

Situation1

Dans un pays, l'effectif de la population en 2006 est de 9 millions d'habitants. La population après t années est donnée par :

$$f(t) = 9.e^{0,04t}$$

1) A partir de quelle année la population aura-t-elle plus que doublé ?
2) On estime que les ressources du pays ne peuvent pas nourrir plus que 15 millions. Pendant combien d'années à partir de l'an 2006 la nourriture sera-t-elle suffisante ?

Situation2

Une forme de grippe est apparue dans une ville. Une étude a montré que l'évolution de l'épidémie est donnée par la fonction P et telle que $P(t) = \dfrac{20t}{1+19e^{-1,2t}}$ où t désigne le nombre de semaines écoulées depuis l'apparition de l'épidémie et P(t) désigne le nombre d'habitants (en milliers).

1) Quel est le nombre de personnes initialement atteintes ?
2) Si la situation ne change pas , combien de personnes en tout seront-elles atteintes ?

Situation3

Soit a,b et c des réels et la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = (ax + b)e^{cx}$

1) Calculer $F'(x)$. Que remarque-t-on ?.

2) On donne $f(x) = (2x - 3)e^{2x}$. En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer une primitive F de f.

Les calculs précédents donnent une méthode de recherche d'une primitive d'une fonction de la forme $x \longmapsto (ax + b)e^{cx}$, dite méthode d'identification.

Un programme qui donne une approximation de $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}$ à epsilon près.

Le calcul s'arrête lorsque $|\frac{x^n}{n!}| \leq epsilon$. ($x$ et epsilon données)
Exemple $e^2 \approx 7{,}389$

```
program exponentielle;
uses wincrt;
var
   x,e,s,p,f:real;
   i:integer;
begin
write('x= ');readln(x);
write('Epsilon = ');readln(e);
S:=1;
i:=1;
p:=1;
f:=1;
repeat
      p:=p*x;
      f:=f*i;
      S:=S+p/f;
      i:=i+1;
until abs(P/f) <= e;
writeln('La valeur approchée d''exponentielle de x = ',S);

end.
```

1 Ecrire plus simplement chacun des nombres suivants :

a) $\ln e^{-\frac{2}{3}}$ b) $e^{\ln 3}$ c) $e^{5\ln 3}-3e^{\ln 7}$

d) $\dfrac{e^{2\ln 3}}{e^{\ln 8}}$ e) $\dfrac{e^{3}}{e^{4+\ln 3}}$ f) $\ln\dfrac{e^{-3}}{(e^{2})^{-2}}$

2 Résoudre, dans IR ,les équations suivantes

a) $\exp(2x-3)=1$ **b)** $e^{x}=2$

c) $e^{-2x}=-2$ **d)** $\exp(3x+1)=e^{1-5x}$

e) $e^{4x}+1=3$ **f)** $e^{2x}=e^{x}$

g) $(e^{x})^{2}-3e^{x}+2=0$ **h)** $e^{x^{2}-16}=144$

i) $e^{(x-4)(2x-1)}=e$ **j)** $e^{-x}+e^{x}=2$

k) $e^{x}-5+\dfrac{6}{e^{x}}=0$ **l)** $2e^{x}(e^{x}-6e^{-x})=5e^{x}$

3 Résoudre,dans IR,les inéquations suivantes

a) $e^{3x+1}>0$ **b)** $e^{x-1}\leq -2$ **c)** $e^{-5x+2}<1$

d) $\exp(3x+14)>-3$ **e)** $e^{2x+2}-e^{3x-5}<0$

4 Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3e^{-2x+6}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}+3}{e^{x}}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\exp(\sqrt{x}-5)$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{2x}-e^{x}+2)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-x})$ **f)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{3x}-1}{3-e^{x}}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{3x}-2e^{x}+4)$ **h)** $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-2x^{2}-x+1}$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{-x}-3e^{2x}-2)$ **j)** $\lim\limits_{x\to0^{-}}\dfrac{1}{e^{x}-1}$

5 **1)** Démontrer que pour tout réel $x\neq 0$

$$\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}=\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}$$

2) Utiliser l'écriture la plus adaptée pour calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$

c) $\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$ **d)** $\lim\limits_{x\to0^{-}}\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$

6 Répondre par Vrai ou Faux :

1) $x\longmapsto \exp(x^{2})$ est la dérivée de la fonction f définie sur IR par: $f(x)=\exp(x^{2})$

2) $x\longmapsto -e^{-x}$ est la dérivée de la fonction g définie sur IR par : $g(x)=e^{-x}$

3) $x\longmapsto -\dfrac{1}{e^{2x}}$ est la dérivée de la fonction h définie sur IR par: $h(x)=\dfrac{1}{e^{x}}$

4) $x\longmapsto(3x^{2}-1)\exp(x^{3}-x+1)$ est la dérivée de la fonction k définie sur IR par : $k(x)=e^{x^{3}-x+1}$

5) La fonction *exp* est une primitive sur IR de la fonction *exp*.

6) La fonction $f : x\longmapsto e^{-3x}$ admet pour primitive sur IR la fonction $f : x\longmapsto e^{-3x}$.

7) G définie sur IR par $G(x)=\exp(3x^{2}-5)$ est une primitive sur IR de la fonction $g : x\longmapsto 6x\exp(3x^{2}-5)$.

8) La fonction $h : x\longmapsto(e^{x})^{3}$ admet pour primitive sur IR la fonction $H : x\longmapsto\dfrac{1}{3}e^{3x}$.

9) $K : x\longmapsto\exp\left(\dfrac{1}{x^{2}}\right)$ est une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction k définie par :

$x\longmapsto -\dfrac{2}{x^{3}}\exp\left(\dfrac{1}{x^{2}}\right)$

7 Déterminer la dérivée de chacune des fonctions définies ci-dessous en précisant dans chaque cas l'ensemble de définition.

a) $f(x)=e^{-x}$ **b)** $f(x)=e^{2x}-3e^{x}+4$

c) $f(x)=(x+1)e^{x}$ **d)** $f(x)=\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$

e) $f(x)=\ln(3+e^{-x})$ **f)** $f(x)=2e^{x}$

g) $f(x)=2x+e^{x}$ **h)** $f(x)=x.e^{x}$

i) $f(x)=x^{2}.e^{x}$ **j)** $f(x)=(2x+1)e^{x}$

k) $f(x)=(x^{2}-1)e^{x}$

8 **1)** Déterminer l'ensemble de définition, puis une primitive des fonctions:

a) $f(x) = 2e^x$ **b)** $f(x) = 2x + 1 + e^x$

c) $f(x) = - e^x + x^2$

2) Montrer que $F(x) = (x + 1)e^x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$, de $f(x) = (x + 2)e^x$

3) Montrer que $F(x) = (x^2 - 1)e^x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$, de $f(x) = (x^2 + 2x - 1)e^x$

9 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x + 1 - e^x$.

1) étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, et dresser le tableau des variations de f .

2) Etudier les branches infinies de C_f..

3) Montrer que C_f coupe l'axe des abscisses en un unique point A et construire C_f..

4) En déduire la courbe représentative de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = -|x| + 1 - e^{|x|}$$

10 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = 2x + 5 - 2e^x.$$

1) Donner les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

2) a) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, et dresser le tableau des variations de f.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et α ($\beta < 0$ et $\beta > 0$).

c) Donner les valeurs arrondies de α et de β à 10^{-1} près.

3) Construire C_f et faire apparaitre α et β.

4) En déduire la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \left|2x + 5 - 2e^x\right|$$

11 On considère la fonction $f : f(x) = e^{2x} - e^x$

1) a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition .

b) Donner l'équation de l'asymptote au graphe de f

2) Dresser le tableau de variation de f , puis construire le graphe de f

3) Déterminer une primitive de f

12 Soit f la fonction définie pour tout x appartenant à $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{2(1-x)}$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Justifier les éléments contenus dans le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{e^2}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

2) Préciser la branche infinie au voisinage de $+\infty$

3) Tracer C dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$

13 **A** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + e^x$.

On appelle C sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

1) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$

2) Etudier les variations de f.

3) Déterminer les coordonnées du point de C où la tangente T à C a pour coefficient directeur 3.

4) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α

b) Montrer que $\alpha \in]-1{,}0[$.

c) Etudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

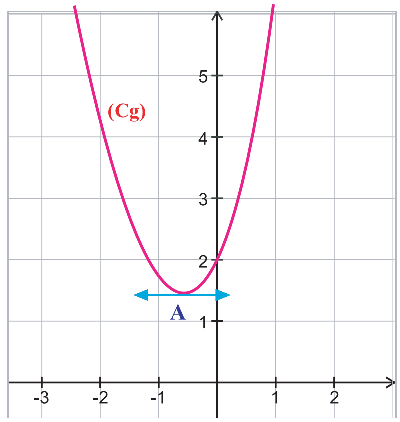
5) a) Démontrer que la droite D : $y = x$ est asymptote à la courbe C en $-\infty$.

b) Préciser la position de D par rapport à C.

c) Pour quelles valeurs de x la distance entre C et D (mesurée parallèlement à $(o, \vec{j})$) est-elle inférieure à 0,01 cm ?

6) Représenter C sur [-3 ; 2], ainsi que D et T.

B- On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^2 + 2e^x$ et soit (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé



1) a) En utilisant ce qui précède, étudier les variations de g.

b) Montrer que le point A où (C_g) admet une tangente horizontale a pour coordonnées

$$(\alpha,\ \alpha^2 - 2\alpha)$$

2) Déterminer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$

3) Pour m réel, on considère l'équation :

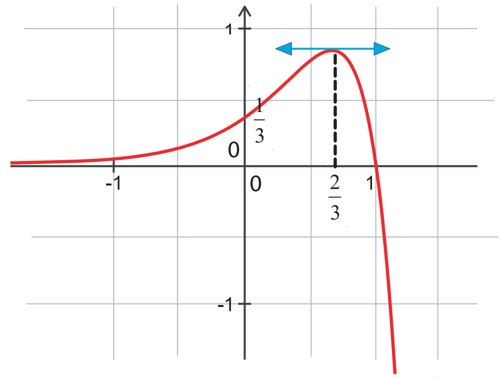
$$g(x) = m.$$

Discuter selon la valeur de m le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de cette équation

14 Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}.)$
La courbe C ci-après représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (ax + b)e^{cx}$,

où a,b et c sont trois réels que l'on se propose de déterminer.

On sait que la courbe C contient les points de coordonnées (1 ; 0) et $\left(0, \dfrac{1}{3}\right)$ et admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse $\dfrac{2}{3}$.



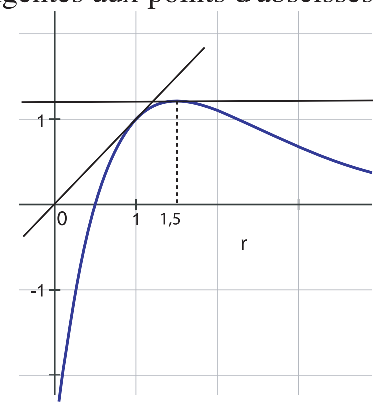
1) Par lecture graphique, dresser le tableau de variation de f.

2) Donner $f(0)$, $f(1)$ et $f'\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

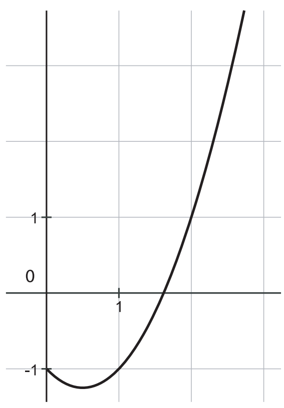
3) Exprimer $f'(x)$ en fonction de a, b et c.

4) Déduire des questions précédentes les réels a, b et c.

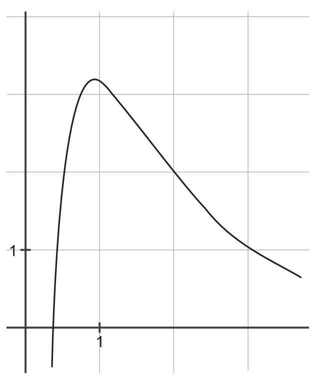
15 On donne ci-dessous la courbe Γ représentative d'une fonction f définie sur [0 ; 4] et ses tangentes aux points d'abscisses 1 et 1,5.



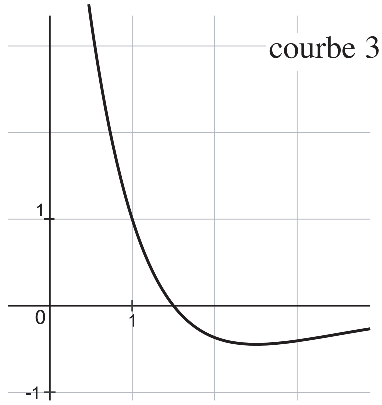
1) Lire graphiquement $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(1{,}5)$



courbe 1



courbe 2



2) Parmi les trois courbes (courbes 1 à 3), laquelle est susceptible de représenter $f\,'$, la fonction dérivée de f ?
Justifier la réponse à l'aide d'arguments graphiques.

3) On admet que $f(x) = (ax + b)e^{-x+1}$ où a et b sont deux réels fixés. Calculer $f\,'(x)$ puis utiliser la question 1) pour déterminer a et b.

4) On pose : $F(x) = -(2x + 1)e^{-x+1}$
Vérifier que F est une primitive de f sur [0 ; 4].

16 On place le 1/1/2007 un capital C sur un compte à intérêts composés au taux de 5,35 % par an.

1) Exprimer la somme présente sur le compte: après un an, après 2 ans, et après 3 ans.

2) Exprimer en fonction de l'entier naturel n, la somme présente sur le compte: après n ans.

3) Construire point par point le graphe de la fonction : $f(x) = 1{,}0535^x$, sur l'intervalle [0 ; 20].

4) Déterminer au bout de combien d'années la somme présente sur le compte représentera plus du double du capital de départ. Vérifier graphiquement

17 Un pays, qui avait 5 000 000 d'habitants, voit sa population baisser de 2% tous les ans

1) Exprimer le nombre d'habitants de ce pays: après un an, après 2 ans, et après 3 ans.

2) Exprimer en fonction de l'entier naturel n, le nombre d'habitants de ce pays après n ans.

3) Construire point par point le graphe de la fonction : $g(x) = 0{,}98^x$, sur l'intervalle [0 ; 20].

4) Déterminer au bout de combien d'années, ce pays aura perdu plus du quart de sa population. Vérifier graphiquement

18 Si à l'instant 0, un minerai contient $N(0)$ atomes d'une substance radioactive, on peut montrer qu'à l'instant t il n'en reste plus que

$$N(t) = e^{-at} N(0).$$

a) On appelle temps de demi-vie le temps T tel que pour tout $t > 0$: $N(t + T) = N(t)/2$.
Calculer T en fonction de a .

b) En déduire que $N(nT) = 2^{-n} N(0)$.

c) Estimer, en fonction de T, le temps qu'il faudra pour que le nombre d'atomes soit divisé par 1000, par 10^6. (On pourra utiliser le fait que $2^{10} \simeq 1024$, voisin de 1000.)

19 **I)** Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$\varphi(x) = e^x + x + 1.$$

1) a) Calculer les limites φ en $+\infty$ et en $-\infty$.
b) Etudier le sens de variation de φ

2) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que

$$-1{,}28 < \alpha < -1{,}27.$$

3) En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$.

II)
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x + 1}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 4 cm).

1) a) Montrer que $f\,'(x) = \dfrac{e^x\varphi(x)}{(e^x + 1)^2}$

b) En déduire le sens de variation de la fonction f.
2) Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$, et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
3) Soit T, la tangente à C au point d'abscisse 0.
a) Donner une équation de T
b) Etudier la position de C par rapport à T.
4) a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
b) Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est une asymptote à C,
c) Etudier la position de C par rapport à D.
5) Etablir le tableau de variations de f.
6) Tracer sur un même dessin C, T, et D.
La figure demandée fera apparaitre les points de C dont les abscisses appartiennent à [-2 ; 4].

20 La fonction f est définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x')=\dfrac{e^{x+2}}{(x+2)^2}$
1) Etudier la limite de f en $+\infty$. (On pourra poser $X = x + 2$.)
2) f' étant la fonction dérivée de f, montrer que $f(x)=\dfrac{xe^{x+2}}{(x+2)^3}$
3) Donner le tableau de variation de f.
4) Etudier les branches infinies de $(\mathscr{C}_f)$,puis tracer $(\mathscr{C}_f)$.

21 L'objet du problème est l'étude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + (x - 1)\, e^x$.
A) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = 2 + xe^x.$$
1) Etudier le sens de variation de g (les limites ne sont pas demandées).
2) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel x.
B) On appelle (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
1) a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) Montrer que la droite D d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$
c) Etudier la position de (C) par rapport à (D).
2) Calculer $f'(x)$ puis, à l'aide de la partie A, dresser le tableau de variation de f.
3) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans l'intervalle [0 ; 1], une solution unique x_0.
b) En déduire le nombre de solutions de cette équation dans $\mathbb{R}$.
c) Vérifier que $0{,}4 < x_0 < 0{,}5$.
4) Déterminer les coordonnées du point A de la courbe (C) où la tangente à la courbe est parallèle à l'asymptote (D).

22 Soient a et b deux nombres réels. On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = (ax + b)e^x.$$
1) Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et b.
2) Déterminer a et b pour que la courbe représentative de f passe par le point E (1,3e) et admette une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse (-3).
3) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.
4) Soit $F : F(x) = (cx + d)e^x$
Déterminer c et d pour que F soit une primitive de f qui s'annule au point 1.

Le nombre "e"

Les logarithmes sont des nombres artificiels utilisés pour obtenir le résultat de l'opération. Ils servent d'intermédiaires. Cependant, ces nombres intermédiaires sont transcendants, et, de la même manière que pour le nombre *Pi* des siècles auparavant, les mathématiciens vont faire émerger un symbole qui permettra de nommer en une lettre une infinité de chiffres, c'est le nombre e. Ainsi $ln(e) = 1$.

Même s'il sera étudié par Leibniz, Huygens ou encore Bernoulli, le nombre e sera nommé conventionnellement par le mathématicien Suisse Leonhard Euler (1707-1783) qui attribuera cette lettre en rapport, non pas avec son nom, mais avec la fonction exponentielle qu'elle décrit.