Chapitre 6

LOGARITHME NEPERIEN

I . Définition et propriétés.

II . Encadrement de $ln\,(1+x)$ par des polynômes.

III . Etude de la fonction logarithme népérien.

IV . Calcul de limites.

V . Etude d'exemples de fonctions de type $x \mapsto ln(u(x))$

VI . F onction logarithme décimal.

Al Khawarezmi
Le mot LOGARITHME est une déformation du mot ALGORITHME qui lui même provient du nom du célèbre mathématicien arabe

I. Définition et propriétés :

Activités de découverte

Activité 1 :

Donner une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$x \mapsto x^2$; $x \mapsto \frac{1}{x^4}$; $x \mapsto x^{-3}$; $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ *et* $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ .Etudier le cas $n = -1$

Activité 2 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*_+$ par $f(x) = \frac{1}{x}$

f est continue sur $\mathbb{R}^*_+$ et l'on a $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}^*_+$

Elle admet donc des primitives définies sur $\mathbb{R}^*_+$. Parmi ces primitives une seule prend la valeur 0 pour $x = 1$. Cette primitive est appelée fonction **logarithme népérien.** On la note ***ln***

a) Déterminer le domaine de définition de la fonction ln.

b) Déterminer $ln(1)$.

c) Etudier la continuité de la fonction ln.

d) Sachant que $(ln)'(x) = \frac{1}{x}$, déterminer le sens de variation de la fonction logarithme népérien sur $]0,+\infty[$

e) Comparer $ln\, x$ et $ln 1$ dans chacun des cas $0 < x < 1$ et $x > 1$

f) Montrer que la fonction ln réalise une bijection de l'intervalle $]0,+\infty[$ sur l'intervalle image.

En déduire que l'on a : $ln\, a = ln\, b \Leftrightarrow a = b$; $a > 0$ et $b > 0$

$ln\,(a) < ln(b) \Leftrightarrow a < b$; $a > 0$ *et* $b > 0$

Activité 3 :

Soit $k > 0$. on considère la fonction f définie par : $f(x) = ln\, kx$

a) Déterminer le domaine de définition de f et calculer $f'(x)$.

b) Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(x) = ln\, x + \alpha$.

Déterminer α . En déduire que pour tout $x > 0$ et $y > 0$ on a : $ln\, x + ln\, y = ln\,(x\, y)$

c) En déduire que pour tout $x > 0$ et $y > 0$ on a :

$$ln\left(\frac{1}{x}\right) = -ln(x) \quad , \quad ln\left(\frac{x}{y}\right) = ln(x) - ln(y) \quad , \quad ln(x^n) = n\, ln(x) \quad , (n \in Z) \quad et \quad ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} ln(x)$$

Activité 4 :

1) On considère la fonction définie par $f(x) = ln\,(2x - 3)$.

Déterminer l'ensemble de définition de f

Calculer $f'(x)$.

2) Soit la fonction g définie par $g(x) = ln\, |2x - 3|$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de g

b) Calculer $g'(x)$ dans chacun des cas suivants : $x > \frac{3}{2}$, $x < \frac{3}{2}$. Que remarque-t-on ?

3) Soit h la fonction définie sur $]-\infty, \frac{3}{2}[$ par $h(x) = \frac{2}{2x-3}$

Déterminer la primitive de h qui s'annule pour $x = 0$

A retenir

Définition

La fonction logarithme népérien, notée *ln* ou *Log* , est la primitive de la fonction

$x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $]0,+\infty[$ et qui s'annule en 1.

$$(ln)'(x)=\frac{1}{x}\quad ,x>0\ ;\qquad ln(1)=0.$$

Propriétés

Pour tous réels $x>0$ et $y>0$ on a :

$$ln(x)=ln(y) \Leftrightarrow x=y$$
$$ln(x)<ln(y) \Leftrightarrow x<y$$

En particulier

$$ln(x)=0 \Leftrightarrow x=1$$
$$ln(x)>0 \Leftrightarrow x>1$$
$$ln(x)<0 \Leftrightarrow 0<x<1$$

Propriété fondamentale

Pour tous réels $x>0$ et $y>0$ on a : $ln(x\,y)=ln(x)+ln(y)$

Conséquences

$$ln\left(\frac{1}{x}\right)=-ln(x)$$

$$ln\left(\frac{x}{y}\right)=ln(x)-ln(y),$$

$$ln(x^n)=n\,ln(x)\quad (n\in\mathbb{Z})$$

$$ln(\sqrt{x})=\frac{1}{2}ln(x)$$

Théorème

Soit *u* une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle *I*

La fonction $ln \circ u$ est dérivable sur *I* et l'on a : $(ln\circ u)'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$

Conséquence

Soit *u* une fonction dérivable sur un intervalle *I* et telle que $u(x)\neq 0$ pour tout $x\in I$

Une primitive de $\frac{u'}{u}$ sur *I* est de la forme $x \longmapsto ln\,|u(x)|+k$

Calculatrice : utiliser la touche ln

1 a) A l'aide d'une calculatrice donner une valeur approchée à 10^{-4} près de $ln\ 2$ et $ln\ 5$.

b) En déduire une valeur approchée de $ln\ 4$, $ln\frac{1}{5}$, $ln\ (2{,}5)$ et $ln\ 10$.

2 Exprimer en fonction de $ln\ 2$ ou $ln\ 3$ les réels suivants :

$x = ln\ 8$; $y = ln\ \frac{1}{3}$

$z = ln\ 18 - 3\ ln\ 2$; $t = 3\ ln\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; $u = ln\ 15 + 2\ ln\ 10 - ln\ 125$.

3 Simplifier

$x = ln\ 36 - 2(ln\ 2 + ln\ 3)$ et $y = 2\ ln\ \frac{7}{3} + 2\ ln\ 35 - 2\ ln\ 5 - ln\ \frac{1}{9}$.

4 Simplifier

$a = 2\ ln\ (2+\sqrt{3}) + ln(7 - 4\sqrt{3})$ et $b = ln\frac{1}{2} + ln\frac{2}{3} + ln\ \frac{3}{4} + ln\ \frac{4}{5}$.

5 x, y et z sont des réels strictement positifs.

Ecrire en fonction de $ln\ x$, $ln\ y$ et $ln\ z$ les réels suivants :

$A = \frac{1}{5} ln\, x^{10}$, $B=ln(\frac{x}{y})-ln(\frac{z}{y})$ et $C=ln(\frac{x^5}{y^4})$

6 Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $ln\ (3x - 2) = 2ln\ x$.

7 Résoudre, dans $\mathbb{R}$,l'inéquation $ln\ (x + 1) > 0$.

8 Calculer la dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x)=ln(x^2-1)$ b) $f(x)=ln|cos x|$

c) $f(x)=ln(\sqrt{x^2+1})$

9 Calculer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x)=\frac{1}{x-3}$ b) $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$

c) $f(x)=tan\, x$ d) $f(x)=\frac{1}{x\, ln\, x}$

II. Encadrement de *ln (1+x)* par des polynômes.

Activité:

On donne la fonction f telle que $f(x)= \ln(1+ x) - (x - \frac{x^2}{2})$, $x > -1$.

a) Montrer que $f'(x) = \frac{x^2}{x+1}$

b) En appliquant le théorème des accroissent finis à f sur l'intervalle $[0 , x]$ montrer qu'il existe un réel $c \in]0 , x[$ tel que $ln(1+x)-(x-\frac{x^2}{2})=\frac{x\,c^2}{1+c}$

c) En déduire que pour tout $x > 0$, on a $x-\frac{x^2}{2}\leq ln(1+x)\leq x-\frac{x^2}{2}+x^3$

d) **Application**

Donner une valeur approchée de $ln\,(1,1)$ à 10^{-3} près.

Donner une valeur approchée de $ln\,(1,3)$ à 10^{-2} près.

III. Etude de la fonction logarithme népérien

Activité 1 :

La fonction logarithme népérien est définie et continue sur $]0 , +\infty[$.

Compléter le tableau suivant :

x	100	10000	10^{13}	10^{24}	10^{50}	10^{100}	10^{1000}
$ln\,x$							

On peut voir que $ln\,x$ prend des valeurs de plus en plus grandes lorsque x devient de plus en plus grand. On admet que $ln\,x$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} ln\,x=+\infty$$

Activité 2 :

En posant $X=\frac{1}{x}$ et en utilisant $\lim_{X\to+\infty} ln\,X=+\infty$, montrer que : $\lim_{x\to 0^+} ln\,x=-\infty$

Activité 3 :

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = ln\,x - \sqrt{x}$.

a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f\,'(x)\leq 0$ pour tout $x\geq 4$.

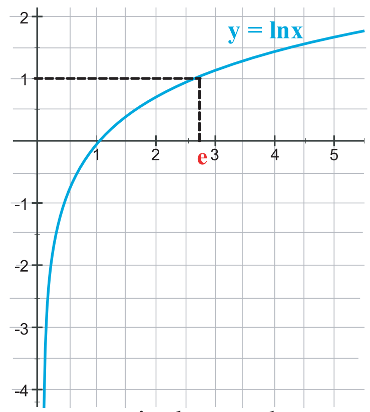
b) Donner une valeur approchée de $f(4)$. En déduire que $0\leq ln\,x\leq\sqrt{x}$ pour tout $x\geq 4$

c) Montrer alors que $\lim_{x\to+\infty}\frac{ln\,x}{x}=0$

Courbe représentative de la fonction logarithme népérien

Sachant que $(ln)'(x)=\frac{1}{x}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$, et en tenant compte des résultats des activités 1 et 2 précédentes, on peut dresser le tableau de variations de la fonction *ln* et tracer sa courbe représentative.

x	0		$+\infty$
$ln'(x)$		+	
$ln(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$



Cette courbe admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale, et admet une branche parabolique de direction asymptotique celle de l'axe des abscisses.
Comme la fonction *ln* réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, l'équation $ln\ x = 1$ admet une unique solution notée ***e***.

on a : $e = 2{,}718281828\ldots$ **et** $ln\ e = 1$

Activité 4 :

Calculer $ln\ e^8$, $ln\ e^3$, $ln\ \frac{1}{e^2}$ et $ln\ e^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ et $ln\sqrt{e}$

En déduire la résolution des équations suivantes :

$ln\ x = 3$, $ln\ x = 8$, $ln\ x = -2$ et $ln\ x = n$, $(n \in \mathbb{Z})$ et $ln\ x = \frac{1}{2}$.

A retenir

La fonction logarithme népérien est telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Elle définit une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
Le réel e est l'unique solution de l'équation $ln\ x = 1$.
On a : $e = 2{,}718281828\ldots$; $ln\ e = 1$
Pour tout entier relatif n
l'équation $ln\ x = n$ admet pour unique solution le réel e^n.
$(\ ln\ x = n \Leftrightarrow x = e^n\ )$

Applications

1 Simplifier les écritures suivantes :

$A = \ln e^5 - \ln e^3$ $\qquad B = \ln(e^{-3})$

$C = \ln 2 + \ln(8e) - \ln(4e^3)$ $\qquad D = \ln\left(\frac{1}{e^3}\right) - \left(\ln \frac{1}{e^3}\right)^3$

2 Résoudre, dans IR, les équations suivantes :

a) $\ln(5 - x) = 2$ $\qquad$ b) $\ln \frac{x-2}{2x+1} = 0$ $\qquad$ c) $(\ln x)^2 + 3\ln x + 2 = 0.$

IV. Calculs de limites.

Activités de découverte

Activité 1:

Calculer le nombre dérivé de la fonction ln en 1. En déduire la valeur de chacune des limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x - 1} \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h}$$

Activité 2 :

a) En posant $X = \frac{1}{x}$ et sachant que $\lim_{X\to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$. Montrer que $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$

et en déduire que pour tout entier $n \geq 2$ on a : $\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$

b) En posant $X = \sqrt{x}$, montrer que $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x = 0$

Activité 3 :

a) Sachant que $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a : $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.

b) En posant $X = \sqrt{x}$, montrer que $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$

A retenir

La fonction logarithme népérien est telle que :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0 \quad (n \geq 2) \qquad \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Exemples de calcul de limites

Exemple 1 : Calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln(x-1)}{2x+1}$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln(x-1)}{2x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln(x-1)}{x-1} \cdot \dfrac{x-1}{2x+1}$

En posant $x - 1 = X$ on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{ln X}{X} = 0$

D'autre part $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{2x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln(x-1)}{2x+1} = 0.$

Exemple 2: Calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(ln\, x)^3}{x}$

On pose $x = X^3$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(ln\, x)^3}{x} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{(ln\, X^3)^3}{X^3} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{(3ln\, X)^3}{X^3} = \lim\limits_{X \to +\infty} 27(\dfrac{ln\, X}{X})^3 = 0$

Exemple 3: Calcul de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ln(x^2+x+1)}{x}$

On a : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ln(x^2+x+1)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ln(x^2+x+1)}{x+x^2} \cdot \dfrac{x+x^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ln(x^2+x+1)}{x+x^2} .(1+x)$

En posant $x + x^2 = u$, u tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ln(x^2+x+1)}{x} = \lim\limits_{u \to 0} \dfrac{ln(1+u)}{u} . \lim\limits_{x \to 0} (1+x) = 1 \,.\, 1 = 1$

Applications

Déterminer les limites suivantes :

$a)\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x - x$ $\qquad b)\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln x}$

$c)\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^2} + \ln x$ $\qquad d)\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(2x^2 + x + 1)}{x}$

$e)\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^3}$ $\qquad f)\ \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} - \ln x$

V. Etude d'exemples de fonctions de type $x \mapsto ln(u(x))$.

Exemple 1 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = ln(x^2 - 4x + 3)$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) a) Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

c) En déduire les branches infinies de (C_f) .
3) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

4) Tracer (C_f) .

Solution

1) f est définie pour tout réel x tel que $x^2 - 4x + 3 > 0$.
On a $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ donc $D_f =]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$.
2) a) Limites aux bornes de l'ensemble de définition. On a :

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} ln(x^2 - 4x + 3) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 - 4x + 3) = 0^+$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} ln(x^2 - 4x + 3) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to 3^+} (x^2 - 4x + 3) = 0^+$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} ln(x^2 - 4x + 3) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 4x + 3) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ln(x^2 - 4x + 3) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 4x + 3) = +\infty$

b) On a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2 - 4x + 3)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x^2 (1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2})}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{lnx^2}{x} + \frac{ln(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2})}{x} \right)$$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x^2}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} 2 \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1 - \frac{x}{4} + \frac{3}{x^2})}{x} = 0$ *car* $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{x^2} = 1$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0.$
En utilisant le même procédé, on obtient : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2ln|x|}{x} + \dfrac{ln(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2})}{x} = 0 \right)$

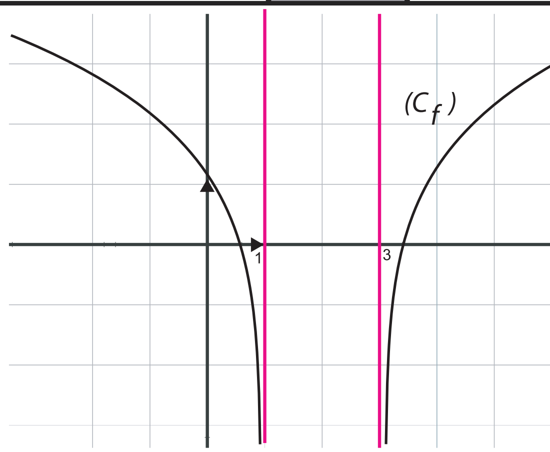
c) De ce qui précède, on déduit que *(C$_f$)* admet deux asymptotes verticales qui sont les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$ et comme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$,
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, alors *(C$_f$)* admet deux branches paraboliques de direction asymptotique celle de la droite des abscisses, respectivement au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.
3) f est dérivable sur D_f et on a : $f'(x) = \dfrac{2x - 4}{x^2 - 4x + 3}$.

Pour étudier le signe de $f'(x)$ il suffit d'étudier le signe de $(2x - 4)$ car $(x^2 - 4x + 3) > 0$ pour tout $x \in D_f$. Sachant que $(2x - 4) \geq 0$ pour tout $x \geq 2$ et $(2x - 4) \leq 0$ pour tout $x \leq 2$.

On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$ $-$ 1		3 $+$ $+\infty$
$f'(x)$			
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$		$-\infty$ ↗ $+\infty$

4) Courbe



Exemple 2

On donne la fonction f telle que $f(x) = ln\left|\frac{x-4}{x}\right|$. Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Monter que la courbe admet le point I(2,0) comme centre de symétrie.

3) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$. Interpréter géométriquement le résultat.

4) Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f sur $]-\infty, 2]$.

5) Tracer (C_f) .

Solution

1) $\left|\frac{x-4}{x}\right| \geq 0$, donc $ln\left|\frac{x-4}{x}\right|$ est définie pour $x \neq 0$ et $x \neq 4$, d'où $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0,4\}$

2) I (2,0) est un centre de symétrie , si et seulement si on a :

$$\begin{cases} x \in D_f \Rightarrow (4-x) \in D_f \\ f(4-x) = -f(x) \end{cases}$$

• Soit $x \in D_f$ on a $x \neq 0$ et $x \neq 4$ donc $-x \neq 0$ et $-x \neq -4$ d'où

$4-x \neq 4$ et $4-x \neq 0$. Donc $(4-x) \in D_f$

- $f(4-x)=ln\left|\dfrac{4-x-4}{4-x}\right|=ln\left|\dfrac{-x}{4-x}\right|=ln\left|\dfrac{x}{4-x}\right|=ln\dfrac{1}{\left|\dfrac{4-x}{x}\right|}=-ln\left|\dfrac{4-x}{x}\right|=-f(x)$

Donc I est un centre de symétrie pour (C_f) .

3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} ln\left|\dfrac{x-4}{x}\right|=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{x-4}{x}\right|=+\infty$

Donc la courbe C_f admet la droite des ordonnées comme asymptote verticale.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty} ln\left|\dfrac{x-4}{x}\right|=0$ car $\lim\limits_{x\to -\infty}\left|\dfrac{x-4}{x}\right|=1$

Donc la courbe C_f admet la droite des abscisses comme asymptote horizontale.

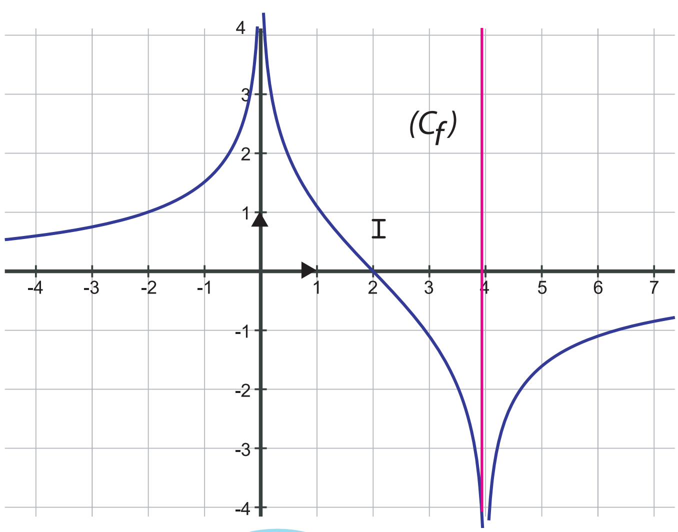
4) On sait que la dérivée de $ln|u(x)|$ est $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ donc $f'(x)=\dfrac{\dfrac{4}{x^2}}{\dfrac{x-4}{x}}=\dfrac{4}{x(x-4)}$

d'où le signe de $x(x-4)$ et le tableau de variations de f sur $]-\infty, 2]$:

x	$-\infty$	0	2
$x(x-4)$	+	‖	-

x	$-\infty$	0	2
$f'(x)$	+	‖	-
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$

5) Courbe C_f



VI. Fonction logarithme décimal.

Activité :

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{lnx}{ln10}$.

Calculatrice : utiliser la touche **log**

Donner le domaine de définition de f.

Montrer que pour tout $x > 0$ et $y > 0$, on a : $f(x\,y) = f(x) + f(y)$.

• La fonction $x \mapsto \dfrac{ln\,x}{ln10}$ vérifie toutes les propriétés de la fonction ln et vaut 1 pour x = 10.

On l'appelle fonction **logarithme décimal** et on la note **log**.

$$log\ x = \frac{ln\ x}{ln\ 10}$$

La calculatrice donne $ln10 = 2{,}302585\ldots$ et $\dfrac{1}{ln10} = 0{,}434294\ldots$ On écrit :

$$\log x = mlnx \quad \text{avec} \quad m = 0{,}434294\ldots$$

Application

La fonction logarithme décimal est d'un usage courant en chimie , en physique, en médecine,en astronomie etc … car elle se base sur le système décimal (base 10).

x étant un réel strictement positif, son écriture scientifique est :

$x = a.10^p$ avec $1 \leq a < 10$ et $p \in \mathbb{Z}$.

On a alors log x = log a + log (10^p). Ainsi log x = log a + p

Or $0 \leq \log a < 1$ et $p \in \mathbb{Z}$. donc p est la partie entière de log ($a.10^p$) et log a sa partie "décimale".

Exemple :

log 2856 = log (2,356.10^3) = log (2,356) + 3

La calculatrice donne log 2,356 = 0,3721... ; donc log 2356 = 3,3721...

Sans calculatrice déterminer la partie entière des nombres suivants :

log 42500, log 0,0073 et log $\dfrac{1}{8}$

Calcul du logarithme décimal log x `

```
Program LogDecimal ;
Uses Wincrt ;
Var  x,y:real;

 Begin
  writeln('              **** Calcul du logarithme décimal**** ');  writeln;
          repeat
     write('calculons le logarithme décimal de : ');
     read(x);writeln
     until x >=0 ;

         y:=ln(x)/ln(10);
         writeln('log(',x:4:4,')= ',y:4:10);

End.
```

Une autre méthode de calcul du logarithme décimal log x

```
Program LogDecimal ;
Uses Wincrt ;
Var  x:real;
    k,n:integer;
 Begin
 clrscr; writeln('              **** Calcul du logarithme décimal**** ');  writeln;
          repeat
     write('calculons le logarithme décimal de : ');
     read(x);writeln
     until x >=0 ;

     if x<1  then begin x:=1/x; write('-') end;
     n:=0;
       while x>=10.0 do begin n:=n+1; x:=x/10.0 end;
       write(n,'.');
       for k:=1 to 10 do
        begin
         x:=sqr(x); x:=x*sqr(sqr(x));
          n:=0; while x>=10.0 do begin x:=x/10.0; n:=n+1 end;
           write(n)
     end; writeln  ;

End.
```

Exercices et problèmes

1 Ecrire en fonction de $ln\,2$ et (ou) de $ln 5$ les nombres suivants :

$ln\,10$; $ln\,50$; $ln\,(0{,}5)$; $ln\,(12{,}8)$; $ln\,\frac{1}{2^3}$; $ln\sqrt{10}$; $ln\,0{,}001$

2 Simplifier :

$ln\,2 - 2\,ln\,8 - ln\frac{1}{16}$;

$ln\,16 - ln\,40 + \frac{1}{2}\,ln\sqrt{625} - ln\,0{,}625$;

$ln\,(\sqrt{2}+1) + ln\,(\sqrt{2}-1)$;

$ln\,(\sqrt{3}+1) + ln(\sqrt{3}-1)$; $ln\,2e - ln\,e^2$

3 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$

1) $ln\,x = 2$;
2) $ln\,x = -1$;
3) $ln\,(x+1) = ln\,(2x-3)$,
4) $ln\,(x-2) - ln\,(x-3) = 1$;
5) $2\,ln\,(x+1) - ln\,x = ln\,2$;
6) $(ln\,x)^2 - 2\,ln\,x = 0$

4 Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1) $ln\,x > 10$
2) $ln\,x < -50$
3) $ln\,(x^2 - 1) \leq ln\,3$
4) $ln\,(x+e) + ln\,(x-e) \leq 2 + ln\,3$
5) $ln\,(1-2x) \leq 1$

5 Résoudre, dans $\mathbb{R}^2$, le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 55 \\ ln\,x + ln\,y = 700 \end{cases}$$

6 Résoudre, dans $\mathbb{R}^2$, le système suivant:

$$\begin{cases} x+y=30 \\ ln\,x = 2ln12 - ln\,y \end{cases}$$

7 Dériver les fonctions suivantes:

a) $f(x) = x\,ln(x)$ b) $g(x) = \frac{ln(x)}{x}$

c) $h(x) = ln(x^2+1)$

d) $k(x) = ln(x + \sqrt{x^2+1})$

e) $u(x) = ln(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})$ f) $r(x) = ln(\frac{x+1}{x-1})$

g) $s(x) = ln(x^2 - 5x + 6)$ h) $t(x) = ln(|4x+8|)$

i) $v(x) = ln(\sqrt{x-1})$

8 Déterminer une primitive de f :

a) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ b) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

c) $f(x) = tan\,x$

9 Soit la fonction f définie $\mathbb{R}/\{1\}$ par

$$f(x) = \frac{-x^2+4x-3}{x-1}$$

1) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout x différent de 1, on ait :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$$

2) En déduire les primitives de f sur $]1, +\infty[$.

10 Calculer les limites éventuelles suivantes

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\,(7x)$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+} ln(x\sqrt{2})$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{ln\,x}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} ln(\frac{-x}{3})$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - ln\,x)$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln\,x}{x^2}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(0{,}8x)}{x}$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln\,x}{5x}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{1}{4}x^2 - ln\,x - 3)$ j) $\lim\limits_{x\to 1{,}5^-} ln(3-2x)$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} [ln(2x+1) - ln(x-3)]$ l) $\lim\limits_{x\to 0^+} ln(\frac{1+x}{x})$

11 calculer les limites éventuelles suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(-7+5x^2)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - \ln x)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x - \ln x)$ d) $\lim\limits_{x\to0^+} (x^5 \ln x)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^6}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^5 - x^2)}{x}$

g) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} + \ln x$ h) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1-x)}{x}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-1}{x\ln x}$ j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+\dfrac{1}{x})$ l) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+2\sin x)}{x}$

12 Soit $f(x) = \ln(3x^2 - x - 2)$

1) Donner le domaine de définition de f.

2) Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f.

3) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point A d'abscisse 8 .

4) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point B d'abscisse $-\dfrac{5}{6}$.

5) Tracer (sommairement) la courbe représentative de f, les deux tangentes précédentes et les points A et B .

6) Résoudre $f(x) = \ln(-5x - 3)$

13 Etudier et représenter graphiquement chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$ e) $f(x) = \ln\dfrac{x-2}{x+1}$

b) $f(x) = \ln(x^2+x+1)$. f) $f(x) = x - \ln x$

c) $f(x) = \ln(x^3 - 8)$ g) $f(x) = \ln(|x|) + x$

d) $f(x) = \ln(\dfrac{x-2}{x+1})$ h) $f(x) = x\ln x$

14 Le niveau sonore $d(I)$, en décibels (db), d'un son d'intensité I est donné par

La formule : $d(I) = \dfrac{10}{\ln 10}.\ln(\dfrac{I}{I_0})$

où I_0 est l'intensité du seuil d'audibilité de l'oreille humaine.

1) Une voix humaine produit un son dont l'intensité I est égale à $10^6\ I_0$

Calculer le niveau sonore $d(I)$, en décibels, atteint par cette voix humaine.

2) Dans cette question, I_1 et I_2 désignent des intensités quelconques; on suppose $I_1 \le I_2$

a) Montrer que

$$d(I_2) - d(I_1) = \frac{10}{\ln 10}\ln(\frac{I_2}{I_1})$$

b) Calculer cette différence $d(I_2) - d(I_1)$, arrondie au dixième le plus proche, lorsque $I_2 = 2\,I_1$

c) Déterminer $\dfrac{I_2}{I_1}$ lorsque $d(I_2) - d(I_1) = 15$,

puis justifier l'affirmation suivante : «115 décibels, c'est environ 32 fois plus fort que 100 décibels».

3) Calculer $\dfrac{I_1}{I_0}$, $\dfrac{I_2}{I_0}$, puis $\dfrac{I_2}{I_1}$ lorsque :

a) I_1 correspond a un niveau sonore de 90 db (au-delà de ce niveau, on considère qu'il y a danger et risque de surdité)

b) I_2 correspond à un niveau sonore de 120 db (c'est le niveau sonore atteint par un concert des «Who» en 1976).

15 On considère la fonction f définie sur $]0, 1[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{2}[\ln x - \ln(1-x)]$.

On désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 4 cm).

1) Déterminer les limites de $f(x)$ quand x tend vers 0, puis vers 1. Préciser les asymptotes à Γ Etudier les variations de f.

2) a) Montrer que Γ a pour centre de symétrie le point $A(\frac{1}{2}, 0)$.

b) Déterminer une équation cartésienne de la tangente (D) à Γ en A.

3) On pose $\varphi(x) = f(x) - 2x + 1$.

a) Etudier les variations de φ.

b) En déduire les positions de Γ et (D).

4) Tracer Γ et (D) dans le repère .

16 On a placé 1000 D le 01/01/2002 sur un compte d'épargne (placement à intérêts composés au taux de 3,5% par an). On note C_n le capital disponible sur ce compte n années plus tard.

1) Calculer C_1, C_2 et C_3. Démontrer que la suite (C_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

2) Exprimer C_n en fonction de n.

3) En utilisant la fonction ln, déterminer au bout de combien d'années, le capital initial aura doublé, au bout de combien d'années, le capital initial aura triplé.

17 **A)** Soit la fonction g définie par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

1) Étudier les variations de g.

2) Calculer $g(1)$ et en déduire que $g(x) \leq 0$ si $0 < x \leq 1$ et $g(x) \geq 0$ si $x \geq 1$.

B) Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x}$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

2) a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C_f) en $+\infty$.

b) Étudier les positions relatives de (C_f) et (D).

c) Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) Tracer (C_f) et (D) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

5) Déterminer la primitive F de f sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1

18 La dimension M d'une mémoire tampon intervenant dans un réseau téléinformatique est donnée par la formule

$$M(t) = -\frac{30}{\log t} - 10$$

où t représente l'intensité du trafic ($0 < t < 1$). On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,2 ; 0,8]$ par :

$$f(x) = -\frac{30}{\log x} - 10$$

1) Exprimer $f(x)$ à l'aide de $\ln x$.

2) Montrer que $f'(x) = \dfrac{30\ln 10}{x \ln^2 x}$.

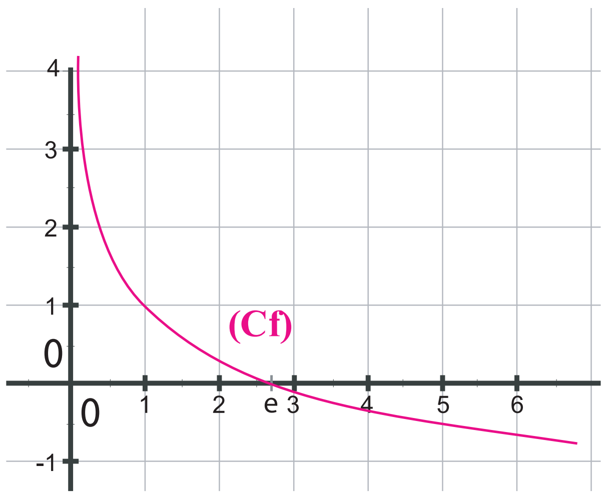
3) Dresser le tableau de variation de f .

4) Représenter graphiquement f.

5) Déterminer l'intensité du trafic à 0,01 près pour une dimension de mémoire tampon de 64 (par le calcul et graphiquement).

19 Le repère utilisé est orthonormé : unité : 1 cm.

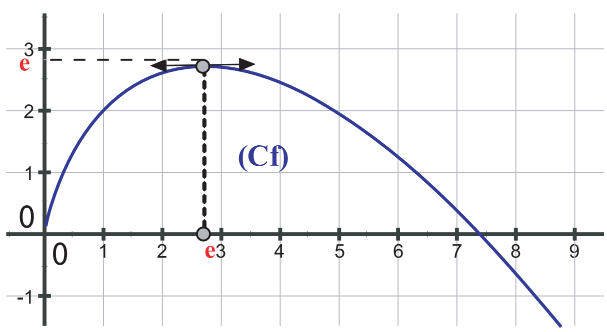
La figure ci-dessous est la représentation graphique C_f de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 - \ln x$.

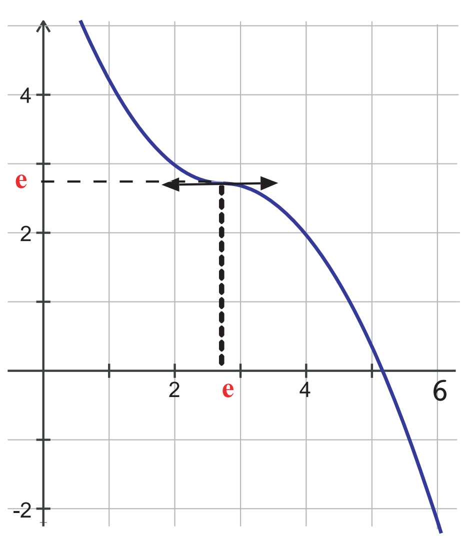


1) a) Démontrer par le calcul que f est monotone sur $]0; +\infty[$

b) En déduire le signe de f sur $]0; +\infty[$

2) L'une des deux fonctions représentées ci-dessous est une primitive de f. Justifier que l'une des courbes ne peut convenir.





3) La bonne fonction est appelée g.
Elle est définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = ax \ln x + cx + b$ où a, b et c sont trois réels.

a) Calculer $g'(x)$ en fonction de a et b.

b) En déduire les valeurs de a et de b.

4) Sur le graphique, on observe que $g(e) = e$. En déduire la valeur de c.

20 La fonction f est définie sur $]-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x+1)$$

1) a) Calculer la limite de f en -1^+. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) a) Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f.

b) Dresser le tableau des variations de f. Préciser la valeur exacte du maximum de f.

3) Déterminer les branches infinies de (C_f) . Tracer la courbe (C_f).

4) a) Montrer qu'il existe deux réels α et β, tels que $\alpha < 0 < \beta$, et $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

b) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de α et de β .

c) En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-1;+\infty[$

5) Soit g la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par:
$g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$

a) Calculer $g'(x)$

b) En déduire l'expression de la primitive de f s'annulant pour $x = 0$

21 On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2}{x} + \ln x$

On note C sa courbe représentative et C' la courbe d'équation $y = \dfrac{2}{x}$

1) a) Calculer $f(1)$

b) Calculer la valeur exacte puis la valeur approchée à 10^{-2} près de $f(e)$ et de $f(\frac{1}{2})$

c) Calculer $f(\frac{1}{e})$ en fonction de $ln\ e$ et $f(\frac{3}{4})$ en fonction de $ln\ 2$ et de $ln\ 3$

2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3) Calculer $f'(x)$, en déduire les variations de la fonction f et tracer la courbe C

4) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 1. Tracer T

5) Etudier la position relative des courbes C et C'. Tracer C' et contrôler le résultat sur le graphique.

e) Calculer les coordonnées du point d'intersection entre l'asymptote D et la courbe C. Etudier la position de la courbe C par rapport à la droite D.

f) Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe C et la droite D.

2) Montrer que la fonction H définie par

$$H(x) = -\frac{1}{x}(1 + ln\,x)$$

est une primitive de la fonction h

définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $h(x) = \frac{ln\,x}{x^2}$

En déduire une primitive de f

22 **A)** Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x^3 - 1 + 2\ ln\ x$

1) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.

2) Dresser le tableau de variation de la fonction g.(les limites ne sont pas demandées)

3) Calculer g(1).

4) Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$

B) On considère la fonction f définie sur

$]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x - 1 - \frac{ln\,x}{x^2}$

On appelle C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités : 3 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées).

1) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

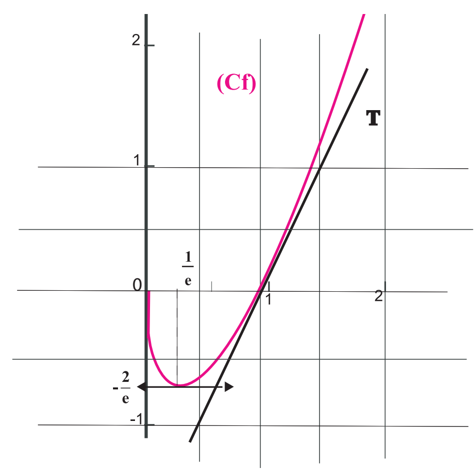
b) Montrer que la droite D d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à C. Y a-t-il une autre asymptote à C ? Si oui donner son équation.

c) Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on peut écrire $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

d) En utilisant les résultats de la partie A, déterminer le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de la fonction f.

23 La courbe ci-dessous est la représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle$]0 ; +\infty[$.

La droite (T) est sa tangente au point d'abscisse 1.



1) Par lecture graphique :

a) Donner les valeurs de $f(\frac{1}{e})$ et de $f'(1)$

b) Dresser le tableau de signe de f sur l'intervalle $]0 ; 3]$

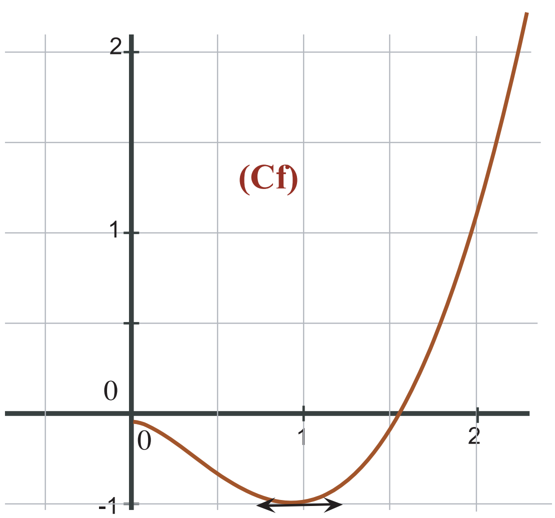
2) On admet que f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = (ax + b)\ln x$ où a et b sont des nombres réels.

a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et b.

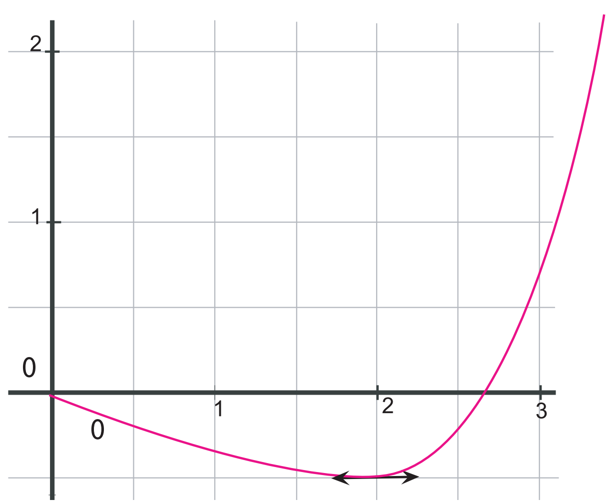
b) Déterminer alors les valeurs de a et b en utilisant la question 1.*a*.

3) L'une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique d'une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

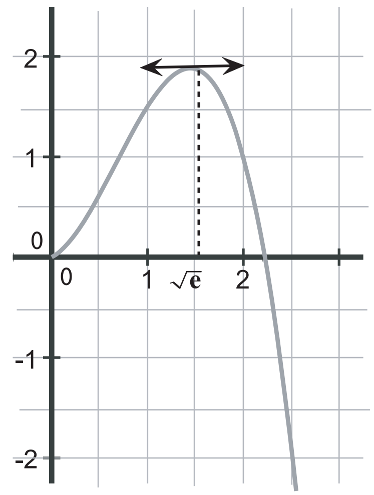
Indiquer le numéro de cette courbe en précisant les raisons du choix.



Courbe1



Courbe2



Courbe3

4) On considère les fonctions G et H définies sur $]0\,;+\infty[$ par

$G(x) = (1 - \ln x)x^2$ et $H(x) = x^2(\ln x - \frac{1}{2})$

L'une d'entre elles est la primitive de f sur $]0\,;+\infty[$ dont la représentation graphique a été choisie à la question précédente. Laquelle ? Justifier la réponse.

24 Une plaque chauffante est constituée de deux éléments comportant chacun 7 résistors en série. Chaque résistor dissipe une puissance de 330 watts .

Les échanges de chaleur entre la plaque et l'air ambiant sont estimés à 7,5 watts par degré de différence de température entre la plaque et l'air ambiant. (A = 7,5 W/°C). La température de l'air ambiant est supposée constante et égale à 24°C.

Dans ces conditions, le temps t mis pour que la plaque atteigne la température T est donné par :

$$t(T) = -1000\frac{\ln(1-\frac{T}{640})}{0{,}9625}\ ;\ (T < 640)$$

1) a) Calculer le temps nécessaire pour porter la plaque de 24°C à 400°C.
b) Calculer la dérivée $t\,'(T)$.
c) En déduire le sens de variation de la fonction t (T) sur l'intervalle [50 ; 600].
Compléter le tableau suivant :

T	50	100	150	200	250	300	400	500	600
t(T)									

2)a) Représenter graphiquement la fonction $t\,(T)$ sur l'intervalle [50 ; 600].
b) Déterminer graphiquement la température atteinte en 20 min. Retrouver ce résultat par le calcul .

25 On considère la fonction f définie sur]-1,+ ∞ [par : $f(x)=ln(1+x)+\dfrac{2x}{1+x}$

et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\,)$

1) a) Vérifier que pour tout x de l'intervalle

]-1,+ ∞[on a : $f\,'(x)=\dfrac{x+3}{(x+1)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

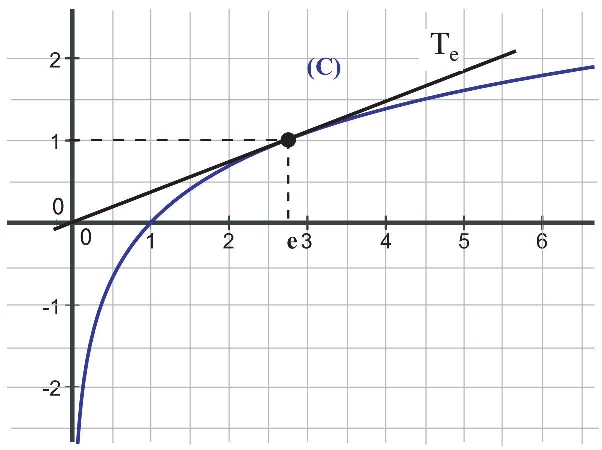
2) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle que l'on déterminera.

3) Soit h la fonction définie sur]-1,+ ∞ [par : $h(x) = f(x) - x$.

a) Dresser le tableau de variation de h.

b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet dans]-1, + ∞ [deux solutions 0 et α tel que $2 < \alpha < 3$.
c) En déduire la position relative de la courbe C et de la droite $D : y = x$.
4) a) Tracer D et C dans le même repère (On tracera la tangente T à C au point O et on prendra α = 2,8).
b) Tracer dans le même repère la courbe C ' représentative de f^{-1}, (On tracera la tangente T' à C ' au point O).

26 On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction *ln* dans un repère.



A)
Donner une équation de la tangente T_e à la courbe (C) au point e, puis vérifier que T_e passe par l'origine du repère.
B)
Soit a un réel strictement positif.
1) Donner une équation de la tangente T à (C) au point A d'abscisse a .
2) On considère la fonction g définie sur

]0, + ∞ [par : $g(x)=lnx - \dfrac{1}{a}x+1 - lna$

a) Justifier la dérivabilité de g sur $]0,+\infty[$ et calculer $g'(x)$.

b) Etudier le signe de $g'(x)$.

c) En déduire les variations de g puis son signe sur $]0,+\infty[$.

d) En déduire que la position de (C) par rapport à (T).

C)

1) En utilisant le résultat de la partie B, justifier que, pour tout x de $]0,+\infty[$, on a :

$$\ln x \leq x - 1$$

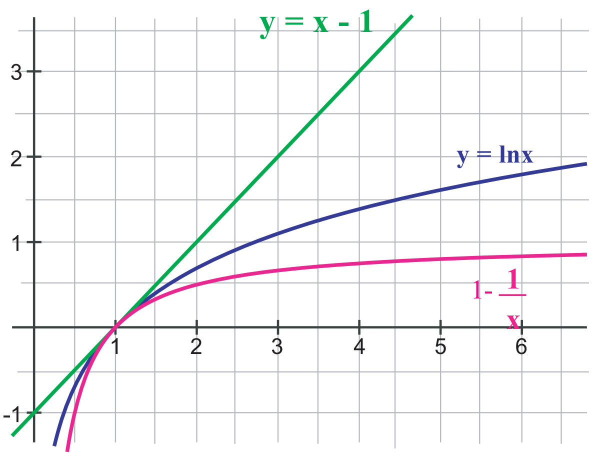
2) On considère la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par : $h(x)=\ln x-1+\dfrac{1}{x}$

Étudier les variations de h sur $]0,+\infty[$ et en déduire son signe.

3) Déduire des questions précédentes que, pour tout x de $]0,+\infty[$, on a :

$$1-\frac{1}{x} \leq \ln x \leq x-1$$

Interpréter graphiquement cet encadrement.



4) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} du logarithme népérien de chacun des nombres : 0,95 ; 0,98 ; 1,03 et 1,1

27 On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln x$

et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(I)

1) Dresser le tableau de variation de f

2) a) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.

b) Ecrire une équation cartésienne de la tangente T en I.

3) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat.

b) Tracer T et (C).(On prendra ln2 = 0,7)

(II)

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$g(x) = f(x) - x$$

1) Montrer que g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer g(1) et en déduire que pour tout réel x de $[1,+\infty[$ on a $f(x) \leq x$.

3) Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_0 = 2 \quad \text{et} \quad U_{n+1} = f(U_n).$$

a) Montrer , par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a : $U_n > 1$.

b) montrer que la suite U est décroissante.

c) En déduire que la suite U est convergente et calculer sa limite.

D'après BAC

Le mot LOGARITHME est une déformation du mot ALGORITHME qui lui même provient du nom du célèbre mathématicien arabe Al Khawarezmi. On doit à Al Khawarezmi plusieurs procédés pratiques de calcul auxquels les euoropéens donnaient le nom d'algorithme. Le LOGARITHME est un nouveau " ALGORITHME " qui permet de simplifier certains calculs.

John Napier est né à Merchiston Castle, aux environs d'Édimbourg. Vers la fin du XVIe siècle, préoccupé par le fait que le progrès scientifique était en quelque sorte freiné par des calculs numériques longs et pénibles, il concentra toutes ses forces au développement de méthodes susceptibles de réduire ce calcul fastidieux. Après vingt ans de travail, il livre en 1614 son célèbre traité intitulé Mirifici logarithmorum canonis descriptio, qui décrit son système de logarithmes et l'usage qu'il veut en faire.

Un second ouvrage, intitulé Mirifici logarithmorum canonis constructio, publié en 1619, contient le premier traité ainsi que les procédés de construction des tables de logarithmes.

La publication du traité de 1614 eut un impact considérable et, parmi les admirateurs les plus enthousiastes de ce nouveau système, il faut compter Henry Briggs (1561-1630), professeur de géométrie d'Oxford. C'est à Briggs que l'on doit la naissance des logarithmes en base 10, aussi appelés à «base vulgaire» ou logarithmes de Briggs.

On sait aujourd'hui que Jost Bürgi (1552-1632) a développé des idées similaires à celles de Napier, en Suisse, à la même époque. On prétend même de Bürgi a conçu l'idée de logarithme dès 1588, mais il perdit tous ses droits de priorité en publiant ses résultats quelques années après le Mirifici de Napier. Les travaux de Bürgi furent en effet publiés à Prague en 1620 sous le titre Arithmetische und geometrische Progress-Tabulen.

L'invention des logarithmes a eu un impact considérable sur la structure des mathématiques et décupla les méthodes de calcul des astronomes.