Chapitre 5

ETUDE DE FONCTIONS

I . Généralités

II . Exemples de fonctions rationnelles

III . Exemples de fonctions de type $x \mapsto \sqrt{ax^2+bx+c}$

Jean-Baptiste Fourier(1768-1830)

I. Généralités :

Activités préliminaires

Activité 1 :

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$.
1)Etudier la parité de f. Que peut-on dire alors de la courbe (C_f) ?
2)Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées. Donner l'équation de la tangente T à (C_f) en ce point.
Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat
3) Dresser le tableau de variation de f. En déduire les coordonnées des points où la courbe (C_f) admet une tangente horizontale.
4) Tracer T et (C_f) dans un repère orthogonal.

Histoire des courbes

C'est le Grec Apollonios de Perga(262-180 av JC) qui étudie les paraboles, les ellipses et les hyperboles comme sections planes d'un cône.

Activité 2 :

On donne la fonction g définie par $g(x) = \frac{x-1}{2x+3}$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_g de g. Calculer les limites de g aux bornes de D_g.
2) En déduire les équations des asymptotes à la courbe (C_g) .
3) Montrer que si $x \in D_g$,alors $(-3-x) \in D_g$ et $g(-3-x) = 1 - g(x)$. En déduire que (C_g) admet un centre de symétrie dont on donnera les coordonnées.
4) Dresser le tableau de variation de g et tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Activité 3 :

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1}{4}(x-3)^2(x+1)^2$. Soit (C_h) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
1) Montrer que $h(2 - x) = h(x)$. En déduire que la courbe (C_h) admet un axe de symétrie dont on donnera une équation.
2) a) Montrer que $h'(x) = (x-3)(x+1)(x-1)$.
   b) Dresser le tableau de variation de h.
   c) Etudier les branches infinies de la courbe (C_h).
   d) Tracer la courbe (C_h).

Activité 4 :

Soit r la fonction définie par : $r(x) = \sqrt{|x| - 2}$
1) Déterminer l'ensemble de définition D_r de r.
2) Montrer que r est paire. Interpréter graphiquement cette propriété.
3) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Quelle est l'allure de la courbe (C_r) au voisinage de $+\infty$?

Activité 5:

On donne la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 4}{x - 1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f
En déduire l'équation de l'asymptote verticale Δ .
2) a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 2$ est une asymptote oblique pour (C_f)

   b) Etudier la position de (C_f) par rapport à (D).

3) a) Vérifier que : $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2}$

   b) Dresser le tableau de variations de f .

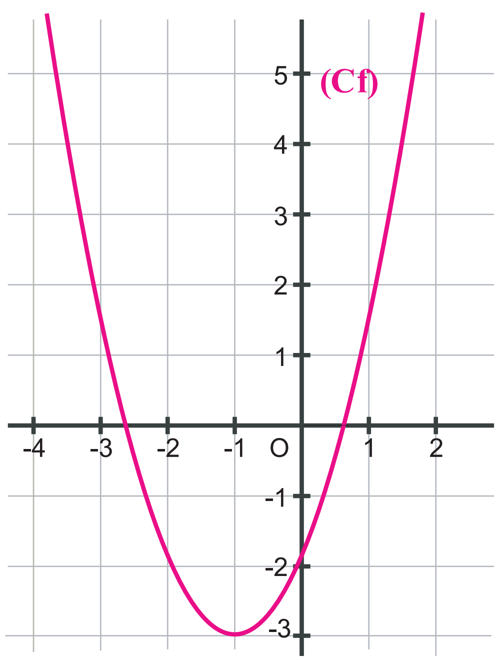
   c) Tracer Δ , (D) et (C_f) dans un repère orthogonal.

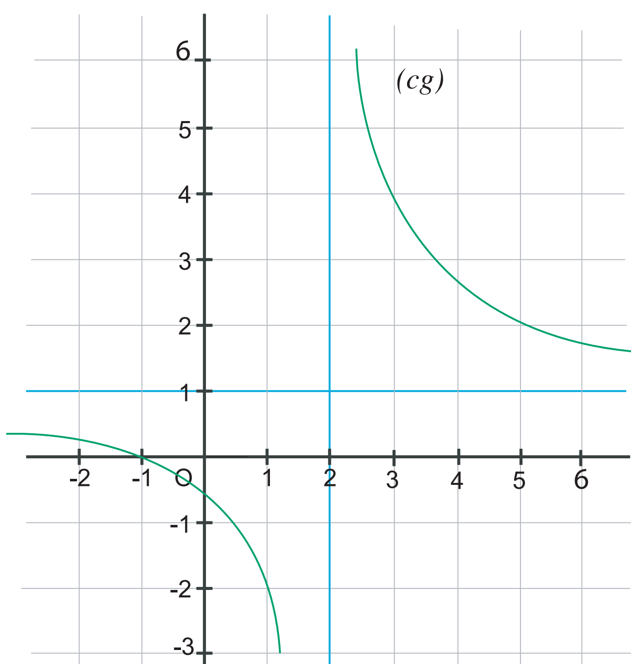
Activité 6 :

On donne la fonction f définie par: $f(x) = E(x) - x$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x.
1) Donner l'expression de $E(x)$ sur chacun des intervalles: $[-1,0[$, $[0,1[$ et $[2,3[$.
2) Montrer que f est périodique et de période 1.
3) Soit (C_1) et (C_3) respectivement les parties de la courbe représentative de f correspondant aux intervalles $[0,1[$ et $[2,3[$. Déterminer le vecteur de la translation qui transforme (C_1) en (C_3).

Activité 7 :

Les courbes suivantes représentent respectivement des fonctions f et g :





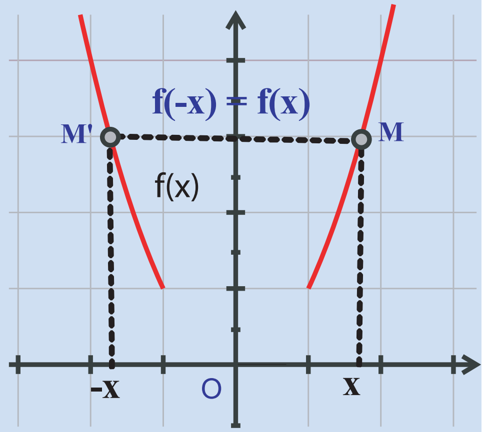
Donner les représentations graphiques de $|f|$ et $|g|$.

Fonction paire

Soit f une fonction à variable réelle et D son ensemble de définition.
f est dite paire si et seulement si pour tout x de D on a :

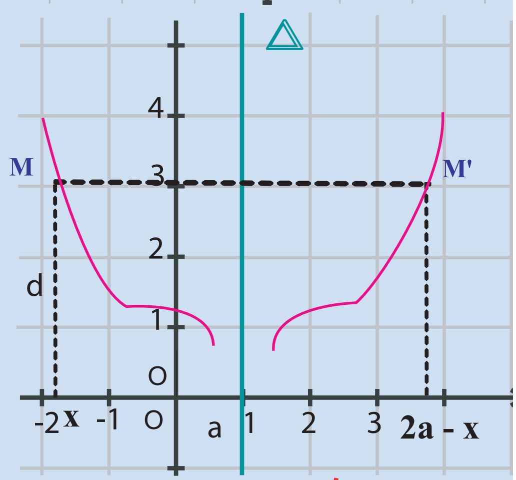
$$\begin{cases} -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$$

Sa courbe représentative dans un repère orthogonal admet la droite des ordonnées comme axe de symétrie.



Axe de symétrie

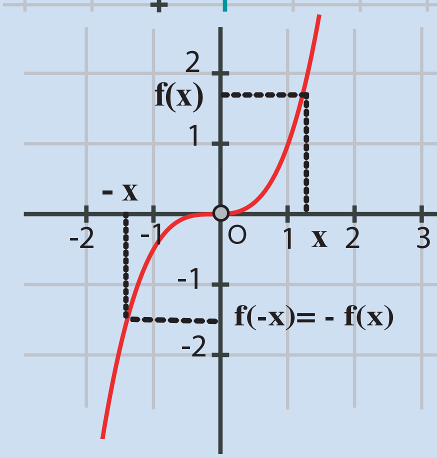
Soit f une fonction définie sur un ensemble D et C_f sa courbe repésentative relativement à un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$
La droite Δ d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe C_f ,si et seulement si pour tout $x \in D$
on a : $$\begin{cases} (2a - x) \in D \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$$



Fonction impaire

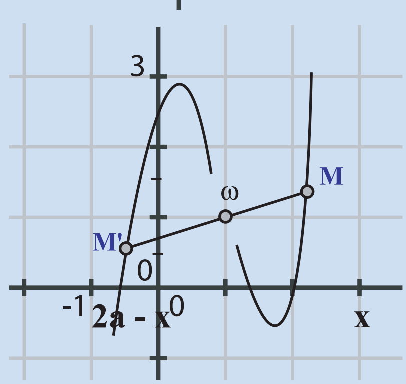
Soit f une fonction à variable réelle et D son ensemble de définition.
f est dite impaire si et seulement si pour tout x de D on a $$\begin{cases} -x \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

Sa courbe représentative admet l'origine des coordonnées comme centre de symétrie.



Centre de symétrie

Le plan est rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$
Soient I le point de coordonnées (a,b) et C_f la courbe représentative d'une fonction f définie sur un ensemble D $\subset$ IR.
Le point ω (a,b) est un centre de symétrie de la courbe C_f si et seulement si pour tout $x \in D$
on a : $$\begin{cases} (2a - x) \in D \\ f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$$



Périodicité

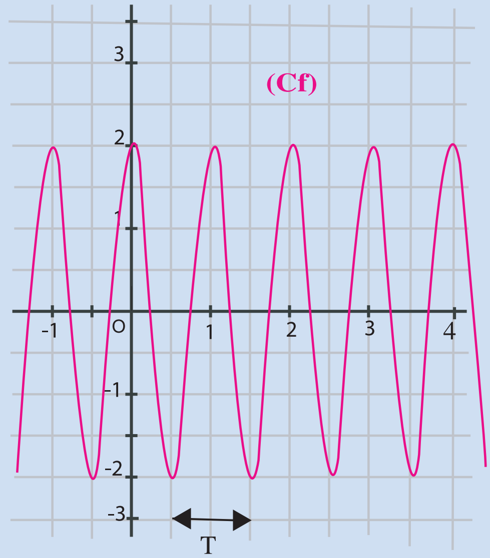
Soit f une fonction à variable réelle et D son ensemble de définition.

f est périodique s'il existe un réel non nul T tel que pour tout x de D on a :

$$\begin{cases} x+T \in D \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$$

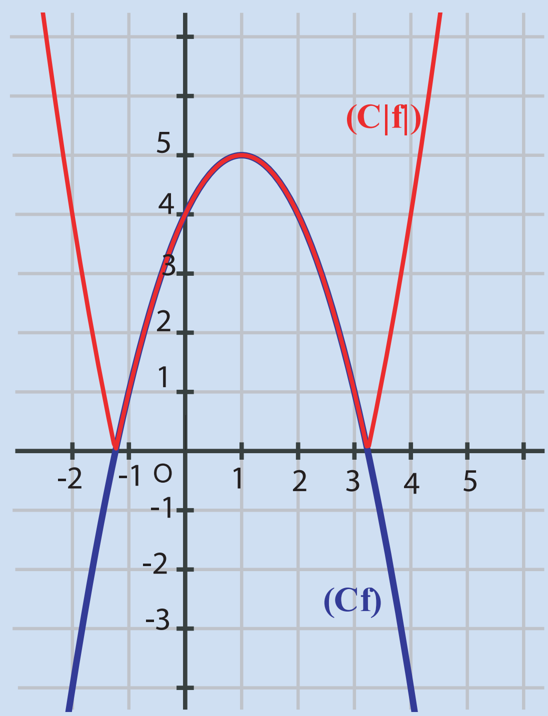
Le réel T est dit période de f

Sa courbe représentative dans un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ est invariante par la translation de vecteur $T\vec{i}$



Courbe représentative de $|f|$

La courbe représentative de $|f|$ s'obtient à partir de celle de f en conservant la partie de (C_f) dans le plan ($y \geq 0$) et en remplaçant la partie de (C_f) située dans le demi-plan ($y \leq 0$) par son symétrique par rapport à l'axe des abscisses.



1 Soit la fonction f définie par: $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Montrer que le point A(-1,-2) est un centre de symétrie pour (C).

c) Montrer que pour tout réel $x \neq -1$ on a: $f(x)= x-1+\dfrac{4}{x+1}$

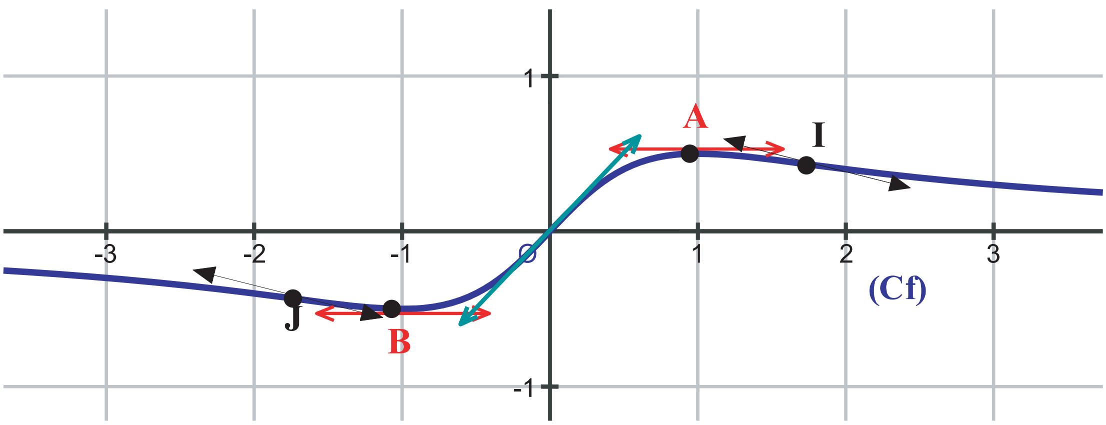
En déduire que (C) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique dont on donnera l'équation.

Etudier la position de (C) par rapport à Δ .

d) Etudier les variations de f sur l'intervalle $]-1, +\infty[$.

e) Etudier les branches infinies et déterminer les asymptotes de (C_f).

2 Le schéma suivant est une représentation graphique d'une fonction f .



f présente un maximum au point $A(1,\frac{1}{2})$ et un minimum au point $B(-1,-\frac{1}{2})$.

1) Expliquer le fait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Montrer que les points O, I et J sont des points d'inflexion de la courbe (C_f).

b) Quelle est l'équation cartésienne de la tangente à (C_f) au point O ?

4) Sachant que $f(x)=\dfrac{x+a}{bx^2+c}$. Déterminer, en utilisant les données et les résultats précédents, les réels a, b et c.

5) Déterminer les coordonnées des points I et J.

3 Le mouvement d'un solide M, fixé à un ressort, est donné par $x(t)=\cos(2\pi t+\pi)$.
Vérifier que ce mouvement est périodique et déterminer sa période .

4 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos(\frac{\pi}{2}x)$.
a) Monter que f est une fonction paire.
b) Monter que f est périodique de période 4.
c) Tracer la courbe représentative de f sur $\left[0,2\right]$. En déduire la courbe de f sur $\mathbb{R}$.

II. Exemples de fonctions rationnelles.

Exemple 1:

On donne la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x^2-2x-3}$. Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Montrer que la droite d'équation $x=1$ est un axe de symétrie pour la courbe (C_f).
3) Etudier les variations de f sur l'intervalle $[1,+\infty[$.
4) Etudier les branches infinies de (C_f) sur l'intervalle $[1,+\infty[$.
5) Tracer (C_f) sur $\mathbb{R}$.

Solution

1) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,3\}$

2) Pour montrer que la droite d'équation $x=1$ est un axe de symétrie pour (C_f), on montre que : $2-x\in D_f$ *et* $f(2-x)=f(x)$ pour tout $x\in D_f$

• $x\in D_f$ *alors* $x\neq-1$ *et* $x\neq3$ *donc* $(-x)\neq1$ *et* $(-x)\neq-3$

d'où $2-x\neq3$ *et* $2-x\neq-1$ donc $2-x\in D_f$

• $$f(2-x)=\frac{(2-x)^2-2(2-x)+2}{(2-x)^2-2(2-x)-3}=\frac{4-4x+x^2-4+2x+2}{4-4x+x^2-4+2x-3}=f(x)$$

3) $$f'(x)=\frac{(2x-2)(x^2-2x-3)-(2x-2)(x^2-2x+2)}{(x^2-2x-3)^2}=\frac{10(1-x)}{(x^2-2x-3)^2}$$

Tableau de variation de f :

• $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

• $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{x^2-2x+2}{(x+1)(x-3)}=\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{5}{4(x-3)}=+\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=-\infty$

• Signe de la dérivée : $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow 1\text{-}x \leq 0$. D'où $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in [1,+\infty[$.
D'où le tableau de variations de *f* sur $[1,+\infty[$.

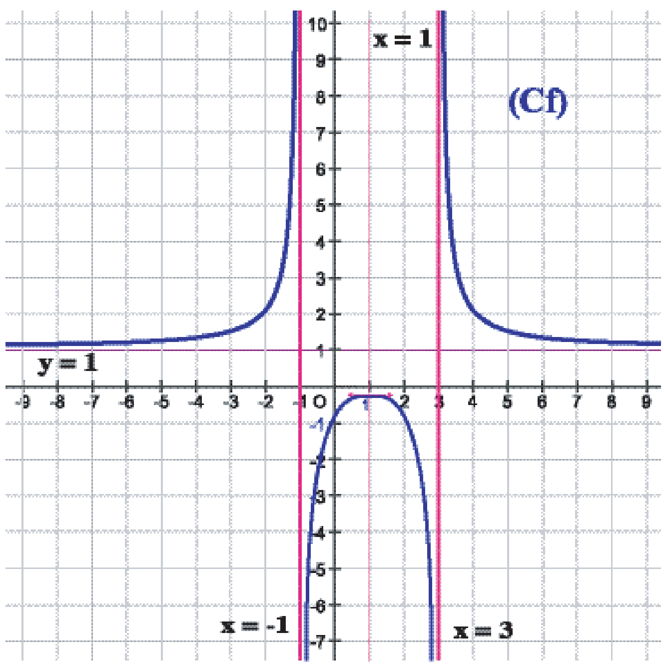
x	1		3		$+\infty$ 2
$f'(x)$	0	$-$	||	-	
$f(x)$	$-\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	1

4) Branches infinies de (C_f)
On a :

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. Donc la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale pour (C_f) .

• $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$. Donc la droite d'équation $x = 3$ est une asymptote verticale pour (C_f).

5) Courbe



Exemple 2 :

Soit la fonction *f* définie par : $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Déterminer l'ensemble de définition de *f*.
2) Etudier la parité de *f* . Interpréter le résultat géométriquement.
3) Calculer les limites de *f* aux bornes de l'ensemble de définition.
   En déduire les asymptotes de *f* .
4) Etudier les variations de *f* .
5) Montrer que *f* admet un point d'inflexion .
6) Tracer (C_f) sur $\mathbb{R}$.

Solution

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2,2\}$

2) $x \in D_f$ alors $x \neq -2 \; et \; x \neq 2$ donc $(-x) \neq 2 \; et \; (-x) \neq -2$ d'où $-x \in D_f$

on a : $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 - 4} = -\dfrac{x}{x^2 - 4} = -f(x)$. Donc f est impaire .

Interprétation géométrique : L'origine du repère est un centre de symétrie pour (C_f).

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. De même $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2}{4(x-2)} = -\infty$. De même $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

Asymptotes :

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \; et \; \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale pour (C_f).

On a : $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \; et \; \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$. Donc la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale pour (C_f).

De même la droite d'équation $x = -2$ est une asymptote verticale pour (C_f).

4) f est dérivable sur son ensemble de définition et on a :

$$f'(x) = \frac{1(x^2-4) - 2x.x}{(x^2-4)^2} = \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2} = \frac{-(x^2+4)}{(x^2-4)^2}$$

f'(x) est toujours négative. on en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0 ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

5) f' est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2,2\}$ et on a :

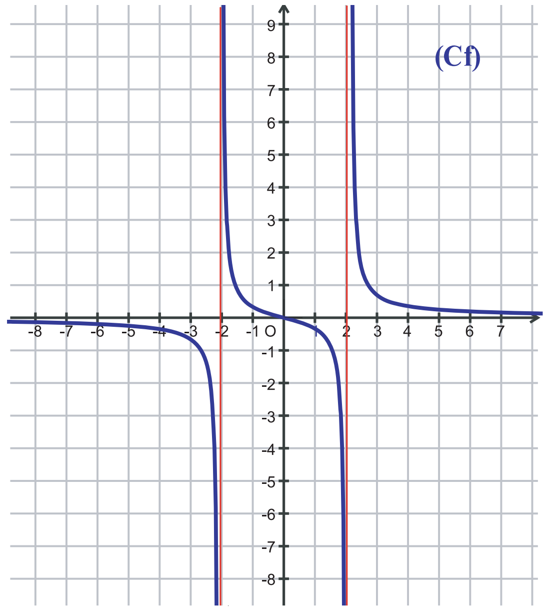
$$f''(x) = \frac{-2x(x^2-4)^2 - (-x^2-4)[2(x^2-4)(2x)]}{(x^2-4)^4} = \frac{-2x(x^2-4)[(x^2-4) + 2(-x^2-4)]}{(x^2-4)^4}$$

$$= \frac{-2x(x^2-4)(-x^2-12)}{(x^2-4)^4} = \frac{2x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

f'' s'annule et change de signe pour $x = 0$ et l'on a : $f(0) = 0$

Donc le point O(0,0) est un point d'inflexion pour (C_f).

6) Courbe



III. Exemples de fonctions de type $x \mapsto \sqrt{ax^2+bx+c}$

Exemple 1 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f .

2) Dresser le tableau de variation de f.

3) Montrer que la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe (C_f).

4) a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + \dfrac{1}{2}$ est une asymptote pour (C_f) au voisinage de $+\infty$

b) étudier la position de (C_f) par rapport à (D).

c) Montrer que la droite (D') d'équation $y = -x - \dfrac{1}{2}$ est une asymptote pour (C_f) au voisinage de $-\infty$. Etudier la position de (C_f) par rapport à (D').

5) Tracer la courbe (C_f).

Solution

$f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$

1) Le discriminant du polynôme $P(x) = x^2+x+1$ est $\Delta = -3$

donc $P(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ d'où $D_f = \mathbb{R}$.

2) On a: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. De même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

De même, puisque $P(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$ d'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $2(-\frac{1}{2}) - x \in \mathbb{R}$,

On a : $f(2.(-\frac{1}{2}) - x) = f(-1 - x) = \sqrt{(-1-x)^2 + (-1-x) + 1}$ donc

$f(-1 - x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1 - x - 1 + 1} = \sqrt{x^2 + x + 1} = f(x)$.

donc la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie pour (C_f)

4) a) On a :

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x+\frac{1}{2})] = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1} - (x+\frac{1}{2}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{[\sqrt{x^2+x+1} - (x+\frac{1}{2})][\sqrt{x^2+x+1} + (x+\frac{1}{2})]}{\sqrt{x^2+x+1} + (x+\frac{1}{2})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+x+1) - (x+\frac{1}{2})^2}{\sqrt{x^2+x+1} + (x+\frac{1}{2})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1} + (x+\frac{1}{2})} = 0 \quad .$$

On obtient $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x+\frac{1}{2})] = 0$

donc la droite (D) d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique pour (C_f).

b) Position de (C_f) et (D).

Pour cela on étudie le signe de $f(x) - (x + \frac{1}{2})$ sur $\mathbb{R}_+$. On a :

$$f(x) - (x + \frac{1}{2}) = \sqrt{x^2+x+1} - (x+\frac{1}{2}) = \sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} - (x+\frac{1}{2}) > \left|x+\frac{1}{2}\right| - (x+\frac{1}{2}) \geq 0$$

d'où (C_f) est au dessus de (D).

c) De même $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (-x - \frac{1}{2})] = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1} + (x+\frac{1}{2}) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1} - (x+\frac{1}{2})}$

Le dénominateur de la dernière expression tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$

donc $\lim_{x\to-\infty} [f(x) + (x+\frac{1}{2})] = 0$ et par conséquent la droite (D') d'équation $y = -x - \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique pour (C_f).

Position de (C_f) et (D')

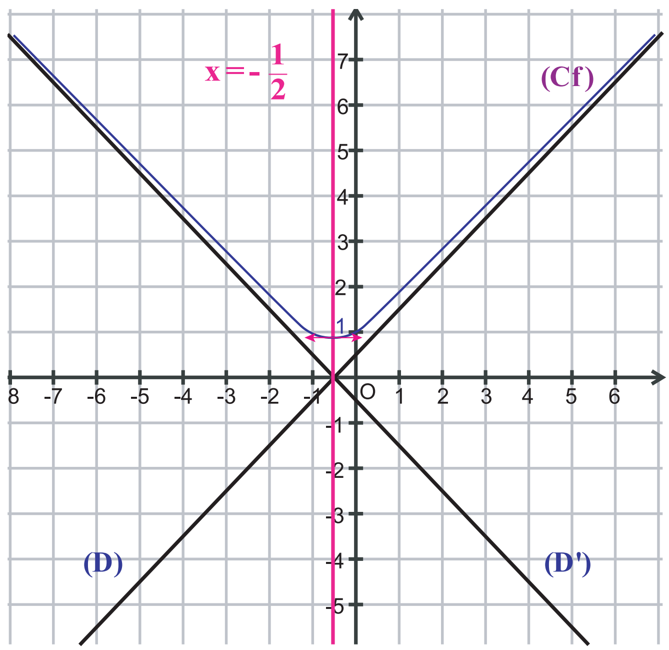
Pour cela on étudie le signe de $f(x) - (-x - \frac{1}{2})$ sur $\mathbb{R}_-$. On a :

$$f(x) - (- x - \frac{1}{2}) = f(x) + (x + \frac{1}{2}) = \sqrt{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + (x + \frac{1}{2})$$

on a : $f(x) + (x + \frac{1}{2}) > \left|x + \frac{1}{2}\right| + (x + \frac{1}{2}) \geq 0$

et par suite (C_f) est au dessus de l'asymptote (D').

5) Courbe (C_f).



Exemple 2 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{-2x^2 + 2x + 4}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Montrer que la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie pour (C_f). En déduire le domaine d'étude de f.

3) Etudier la dérivabilité de f au point 2. Interpréter géométriquement le résultat.

4) Dresser le tableau de variation de f sur $[\frac{1}{2}, 2]$.

5) Tracer la courbe (C_f).

Solution

1) On étudie le signe de $P(x) = -2x^2 + 2x + 4$.

Les racines de P sont -1 et 2 , d'où le tableau de signe de $P(x)$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

D'où $D_f = [-1,2]$.

2) Il faut vérifier que si $x \in [-1,2]$ alors $(1- x) \in [-1,2]$.

On a : $-1 \leq x \leq 2$ donc $-2 \leq - x \leq 1$ d'où $-1 \leq 1- x \leq 2$ d'où $(1-x) \in [-1,2]$

On a : $f(2.(\frac{1}{2}) - x) = f(1 - x) = \sqrt{-2(1-x)^2 + 2(1-x) + 4}$. Donc

$f(1-x) = \sqrt{-2+4x-2x^2+2-2x+4} = \sqrt{-2x^2+2x+4} = f(x)$

donc la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie pour (C_f).

On pourra étudier alors f sur $[\frac{1}{2}, 2]$.

3) On a :

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{-2x^2+2x+4}}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{2}\sqrt{-x^2+x+2}}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{2}\sqrt{-(x-2)(x+1)}}{x-2} =$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{2}\sqrt{(2-x)(x+1)}}{-(2-x)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{2}\sqrt{2-x}\sqrt{x+1}}{-(\sqrt{2-x})^2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{2}\sqrt{x+1}}{-\sqrt{2-x}} = -\infty$$

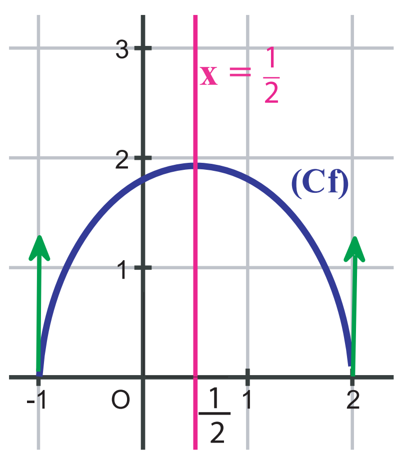
donc f n'est pas dérivable à gauche en 2 et (C_f) admet au point d'abscisse 2 une demi- tangente verticale.

4) f est dérivable sur $[\frac{1}{2}, 2[$ et on a : $f'(x) = \dfrac{-4x+2}{2\sqrt{-2x^2+2x+4}} = \dfrac{-2x+1}{\sqrt{-2x^2+2x+4}}$

$f'(x)$ a le même signe que $(-2x+1)$. D'où le tableau de variation :

x	$\frac{1}{2}$		2
$f'(x)$	0	$-$	‖
$f(x)$	2	$\searrow$	0

5) Courbe



1 f étant une fonction , C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé et Δ étant une droite d'équation $x = a$, montrer que Δ est un axe de symétrie pour C_f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-4}{4x^2+8x+5}$; $a=-1$

b) $f(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$; $a=2$

c) $f(x)=\sin x$; $a=\dfrac{\pi}{2}$

2 Montrer que C_f admet le point A comme centre de symétrie dans chacun des cas suivants

a) $f(x)=\sin x$; $A(\pi,0)$

b) $f(x)=x^3+3x^2+x-1$; $A(-1,0)$.

c) $f(x)=x^3+2$; $A(0,2)$.

3 Déterminer dans chacun des cas suivants les branches infinies de la courbe représentative de f et déterminer leur nature.

a) $f(x)=\dfrac{3}{x^2-5x+6}$

b) $f(x)=\dfrac{4x-2}{x-1}$

c) $f(x)=\dfrac{2x^2-x+5}{x}$

d) $f(x)=x\sqrt{x-1}$

e) $f(x)=x+2-\dfrac{1}{x-2}$

f) $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+2x+5}{x+1}$

g) $f(x)=\sqrt{4x+2}$

h) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x}+1}$

4 Montrer que la courbe représentative de f admet la droite D pour asymptote oblique dans chacun des cas suivants :

a) $f(x)=\dfrac{2x^2-x+1}{x+2}$; $D : y=2x-3$

b) $f(x)=\dfrac{(x-2)^2-x+1}{x-2}$; $D : y=x-3$

c) $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2+x-5}{x^2+1}$; $D : y=2x+1$

d) $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$; $D : y=x+2$

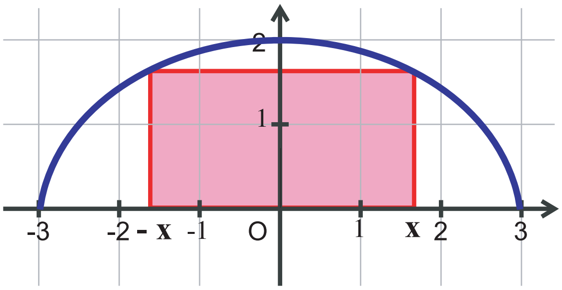
5 On donne la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{4x^2+4x+5}$, sa courbe représentative (C_f) dans un repère orthogonal et les droites $D : y = 2x + 1$ et $D' : y = -2x - 1$

a) Démontrer que ces droites sont des asymptotes pour la courbe (C_f).

b) Montrer que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a : $4x^2 + 4x + 5 \geq (2x+1)^2$
En déduire la position de C_f par rapport à D et D'.

c) Etudier les variations de f.

d) Tracer D , D' et (C_f).



Situation 1

La courbe suivante est la moitié d'une ellipse.
Elle représente la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$$

On construit sur cette courbe un rectangle comme l'indique la figure.

1) Montrer que l'aire *A(x)* de ce rectangle est égale à $\frac{4}{3}x\sqrt{9-x^2}$

2) Etudier les variations de la fonction *A* et dresser son tableau de variations.

En déduire la valeur de x pour laquelle cette aire est maximale.

Situation 2

La période d'un pendule formé d'une tige homogène de masse m, de longueur l, mobile autour d'un axe horizontal perpendiculaire à la tige en un point situé à la distance x du centre de gravité est :

$$T(x)=cm\sqrt{\frac{l^2}{12x}+x} \quad \text{où } c \text{ est une constante telle que } \quad c\approx 0{,}64$$

1) Déterminer $T(x)$ dans le cas où $m = 1Kg$ et $l=\sqrt{12}$.

2) On donne la fonction f définie $]0, +\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$.

a) Vérifier que: $f'(x)=\frac{x^2-1}{2x^2f(x)}$

b) Dresser le tableau de variations de f .

c) En déduire, pour $m = 1Kg$ et $l=\sqrt{12}$, la valeur de x pour laquelle $T(x)$ est minimale.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Interpréter géométriquement le résultat.

4) Tracer la courbe (C_f).

Avec l'outil informatique

Leonhard Euler (Bâle, 1707-Saint Pétersbourg, 1783

Situation (Méthode d'Euler)

Soit f une fonction vérifiant $f(1) = 0$ et, pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Avec l'approximation $f(a+h) \approx f(a)+f'(a)h$ on obtient une valeur approchée de $f(x)$ pour certains x et h voisin de zéro,
puis on construit la courbe (C_f).

Avec **un tableur**, on introduit les valeurs initiales dans la ligne 3 :
1 en A3, 1 en B3, 0,01 en C3 et 0 en D3
et **les formules :**

= A3+$C$3 en A4

= 1/A4 en B4

= D3+$C$3 en A4

La fonction f, décrite dans cette situation, est appelée fonction logarithme népérien Calculatrice touche : ln

	A	B	C	D
1-2	x	f '(x) = 1/x	pas : h	valeur approché de f(x)
3	1	1	0,01	0
4	1,01	0,99009901		0,01
5	1,02	0,98039216		0,01990099
6	1,03	0,97087379		0,029704912
7	1,04	0,96153846		0,03941365
8	1,05	0,95238095		0,049029034
9	.	.		.
10	.	.		.
11	.	.		.

Enfin, on étend ces trois formules jusqu'à la ligne 500.

Courbe (C_f)

Ensuite après avoir sélectionné les séries A3-A500 et D3-D500, l'assistant graphique nous livre la courbe approchée ci-dessous :
(Choisir Nuages de points puis l'option nuage de points avec lissage sans marquage des données cliquer sur Suivant)

1 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{-x^3+5x}{x^2+3}$$

et (C) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité de longueur 1 cm.

1) a) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f(x)=ax+\frac{bx}{x^2+3}$$

b) Montrer que f est impaire.

2) a)Montrer que $f'(x)=\dfrac{(x^2+15)(1-x^2)}{(x^2+3)^2}$

b) étudier les variations de f. Dresser son tableau des variations.

3) Soit D la droite d'équation $y=-x$. Montrer que D est asymptote à (C). Etudier la position relative de la courbe (C) et de la droite D.

4) Soit T la tangente à (C) au point d'abscisse 0.

a) écrire l'équation réduite de T.

b) étudier la position relative de la courbe (C) et de la droite T.

5) Construire D, T et (C). On précisera les coordonnées des points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

6) a) Tracer la courbe(C') image de (C) par la translation de vecteur $2\vec{j}$.

b) En déduire l'expression de la fonction g qui admet (C') pour représentation.

2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par :

$$f(x)=\frac{2x^2-5x+2}{3x}$$

et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Etudier la fonction f (limites aux bornes, dérivée et sens de variations).

On ne demande pas de construire la courbe dans cette question.

2) a) Montrer que, pour tout x non nul

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{3x}$$

où a, b et c sont trois réels que l'on déterminera.

b) En déduire que la droite d'équation $y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$ est asymptote à la courbe C.

3) a) Déterminer les coordonnées du point I, point d'intersection des deux asymptotes à la courbe C.

b) Montrer que I est le centre de symétrie de la courbe C.

4) On désigne par A et B les points d'intersection de C avec l'axe des abscisses.

a) Déterminer les coordonnées de A et B.

b) Déterminer les équations des tangentes à C en A et en B.

c) Calculer les coordonnées du point D, intersection des deux tangentes trouvées en (D. b)

5) a) Tracer la courbe C dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

Construire sur le même graphique les asymptotes, les tangentes en A et en B et le point D.

b) Montrer que le triangle ABD est rectangle en D.

c) Calculer, en cm², l'aire du triangle ABD.

3 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\,;5\}$,

par $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x-10}$

1) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-2\,;5\}$

on a : $f(x)=a+\dfrac{b}{x+2}+\dfrac{c}{x-5}$

où a, b et c sont des réels à déterminer.

2) Etudier les variations de f ; dresser son tableau des variations. On précisera les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3) Soit C la courbe représentative de f, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm.

a) Montrer que C possède trois asymptotes dont on donnera des équations.

b) étudier la position relative de C par rapport à son asymptote horizontale.
Préciser en particulier les coordonnées du point I, où C coupe son asymptote horizontale.
c) Déterminer l'équation réduite de la droite T, tangente à C au point I.
d) T coupe C en un point J. Déterminer les coordonnées de J.
e) Construire C, T et les trois asymptotes à C.

4 Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur IR par :

$$f(x) = x - 1 + \frac{2x}{x^2 + 1}$$

On désigne par C la courbe représentativede f dans v 0 0
un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
1) Etudier la fonction f.
2) Montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe C.
3) Montrer que le point I (0 ; -1) est centre de symétrie de la courbe C.
4) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe C en I, puis préciser la position de la courbe C par rapport à T.
5) Déterminer les points A et B de la courbe C, où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x - 2$.
6) Montrer que, pour tout x réel :

$$x - 2 \leq f(x) \leq x.$$

7) Tracer la courbe C, la tangente T, ainsi que les deux droites D et D' d'équations

$$y = x - 2 \quad \text{et} \quad y = x$$

5 Soit les fonctions f et g :

$$f(x) = x^3 - 3x \quad et \quad g(x) = x - \frac{4}{x}$$

et leurs courbes représentatives C_f et C_g dans un repère orthonormé.
1) Résoudre le système $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$

En déduire que C_f et C_g se coupent en deux points A et B en lesquels elles admettent la même tangente (C_f et C_g sont «tangentes» en A et B).
2) Etudier les positions relatives de C_f et C_g par rapport à ces tangentes.
3) Etudier la position de C_g par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$ et montrer que Δ est asymptote à C_g.
4) Etablir les tableaux de variations de f et g, puis tracer C_f et C_g.

6 Soit f la fonction définie sur $]1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - x}{x - 1}$$

On appelle C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.
1) Déterminer les limites aux bornes de l'intervalle. Qu'en déduit-on pour la courbe C_f ?
2) Montrer que C_f admet une asymptote Δ d'équation $y = 2x + 1$. étudier les positions relatives de la courbe C_f et de la droite Δ.
3) Calculer la dérivée de la fonction f .Etudier les variations de f. La fonction f admet-elle un maximum ? un minimum ?
4) Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f parallèle à la droite d'équation $y = 1 - 2x$.
5) Tracer la courbe C_f, la tangente T et la droite Δ sur le même graphique. (unités graphiques : 2cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées)
6) Soit C' image de C_f par la symétrie d'axe (Oy). Tracer C' et déterminer la fonction correspondante.

7 Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 1}{x + 1}.$$

On appelle C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1) a) Déterminer, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ Qu'en déduit-on pour la courbe C_f ?

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

2) a) Montrer que la courbe C_f admet une asymptote Δ d'équation $y = -x + 3$.

b) étudier les positions relatives de la courbe C_f et de la droite Δ.

3) Calculer la dérivée de la fonction f. étudier les variations de f.

4) Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1

5) Tracer la courbe C_f, la tangente T et la droite Δ sur le même graphique.

6) On considère la fonction g telle que

$$g(x) = \frac{-x^2+6x-7}{x-1} \text{ pour ; } x > 1$$

Montrer que C_g est l'image de C_f par la translation de vecteur $2\vec{i}$. Tracer alors C_g.

8 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a) Etudier les variations de f.

b) Montrer que C_f admet un point d'inflexion I que l'on déterminera.

c) Prouver que I est un centre de symétrie de C_f.

2) a)Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à C_f au point I.

b) Etudier la position relative de C_f par rapport à T.

3) Tracer C_f.

4)En utilisant la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$, prouver que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]1;2[$.

5) a)Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J qu'on précisera.

b)Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

c)Tracer $C_{f^{-1}}$ dans le même repère que f.

d)Déterminer D le domaine de dérivabilité de f^{-1} et calculer $(f^{-1})'(x)$ pour tout $x \in D$ par deux méthodes.

9 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3}{3x^2-6x+4}$$

Soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$

on a $f'(x) = 3\left(\frac{x(x-2)}{3x^2-6x+4}\right)^2$

2) En écrivant,

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{4}{3x^2-6x+4}\right)^2$$

calculer $f''(x)$. En déduire les points d'inflexion de C_f.

3) Trouver les réels a, b, c et d tels que pour

tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{3x^2-6x+4}$

4) Montrer que C_f admet une asymptote oblique Δ qu'on déterminera.

Etudier la position relative de C_f par rapport à Δ.

5) Montrer que I(1,1) est un centre de symétrie de C_f.

6) Ecrire une équation de T la tangente à C_f au point I.

Etudier la position de C_f par rapport à T.

7) Tracer Δ, T et C_f.

8) a) Prouver que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

On notera $g = f^{-1}$.

b) Etudier la dérivabilité de g sur $\mathbb{R}$.

c) Ecrire une équation de T' la tangente à C_g au point I.

d) Tracer T' et C_g dans le même repère.

10 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \sqrt{1+(x+1)^2} - x$$

1) a) Montrer que

$g'(x) < 0$ pour tout $x \leq -1$.

b) Montrer que pour tout $x \geq -1$, on a

$0 \leq x+1 \leq \sqrt{1+(x+1)^2}$. En déduire que $g'(x) \leq 0$ pour tout $x \geq -1$.

c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

d) Dresser le tableau de variation de g.

2) a) Montrer que la droite D: $y = -2x-1$ est une asymptote oblique à C_g au voisinage de $-\infty$

b) Ecrire une équation cartésienne de la tangente à C_g au point d'abscisse -1.

Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution réelle α et vérifier que $\alpha \in]1,2[$.

3) a) Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

c) Calculer de deux manières différentes

$$\left(g^{-1}\right)'(2)$$

4) Tracer les courbes représentatives de g et g^{-1} dans un autre repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

11 On considère la fonction f définie pour tout réel x appartenant à

$]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3x^2+4x-3}{x^2-1}$$

On note C_f la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Montrer que pour tout réel $x \neq -1$ et $x \neq 1$,

on a : $f(x) = a + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+1}$ où

a, b et c sont des réels que l'on déterminera.

2) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3) Déterminer la dérivée de f, étudier son signe et donner le tableau des variations de f.

4) Préciser les asymptotes à C_f. Tracer la courbe C_f et ses asymptotes. (unité 1 cm)

5) Déterminer l'équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0.

Tracer T sur le dessin précédent.

6) Montrer que la courbe C_f a pour centre de symétrie le point I de coordonnées (0 ; 3).

12 **1)** Résoudre, dans $\mathbb{R}^3$, le système suivant :

$$\begin{cases} x+y+z = 0 \\ x-y+z = 8 \\ 16x+4y+z = 3 \end{cases}$$

2) Soit $f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$

Trouver les réels a ,b et c tels que $f(1) = 0$ $f(-1) = \sqrt{8}$ *et* $f(4) = \sqrt{3}$.

3) On donne par la suite $a = 1$, $b = -4$ *et* $c = 3$

a) Montrer que $D_f =]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$.

b) Calculer $f(4-x)$. En déduire que la droite $x = 2$ est un axe de symétrie à la courbe (C_f).

c) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 2$ est une asymptote de (C_f) au voisinage de $+\infty$

d) Etudier les positions relatives de (C_f) et (D).
4) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 3.
b) Vérifier que le signe de f' est celui de $(x - 2)$ et dresser le tableau de variation de f.
5) Tracer (C_f) dans un repère orthonormé.

13 **1)** Résoudre,dans $\mathbb{R}^3$, le système suivant :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=-1 \\ 9x-3y+z=5 \end{cases}$$

2) Soit $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+2}$, $x \neq -2$

Trouver les réels a , b et c tels que :

$f(1)=\dfrac{1}{3}$, $f(-1)=-1$ et $f(-3)=-5$.

3) On donne par la suite $a = 1$, $b = 1$ et $c = 1$.
a) Vérifier que : $f(x)=x-1+\dfrac{1}{x+2}$
b)Montrer que le point I(-2,-3) est un centre de symétrie de la courbe (C_f).
c)Montrer que la droite (D) d'équation $y = x-1$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$.
Etudier les positions relatives de (C_f) et (D).
4) a)Vérifier que $f'(x)=\dfrac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$
b) Dresser le tableau de variation de f
5) Tracer (C_f) dans un repère orthonormé.

14 Soit $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$. On désigne par (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$
1) a) Montrer que f est définie sur

$I=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
c) Etudier la dérivabilité de f à gauche en -1 et à droite en 1, interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2) a) Montrer que :
$f'(x) > 0$ *si* $x > 0$ et $f'(x) < 0$ *si* $x < 0$.
b) Dresser le tableau de variation de f
c) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique pour C
d) Etudier la position de (C) et (D).
3) a) Montrer que la restriction g de f sur $[1,+\infty[$ est une bijection.
Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in [1,+\infty[$
b) Tracer (C) , (D) et $(C_{g^{-1}})$.

15 On considère, dans le plan P rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ le cercle (Γ) de centre O et de rayon 1. Soit A le point de coordonnées (1; 0) et A' le point de coordonnées (-1 ; 0).
1) Pour tout point H du segment [AA'], distinct de A et de A', on mène la perpendiculaire Δ
à la droite (AA').
La droite Δ coupe le cercle (Γ) en M et M'.
On pose $OH = x$. Calculer en fonction de x l'aire du triangle AMM'.
2) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(1-x)\sqrt{1-x^2}$$

Etudier les variations de f.
Montrer que le triangle AMM' d'aire maximale est équilatéral.

16 f est la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{x^4}{x^2-1}$$

1) a) Vérifier que pour tout x de $]1,+\infty[$:

$$f(x)=x^2+1+\frac{1}{x^2-1}$$

b) Etudier les limites de f en 1 et en $+\infty$.
2) Soit C la courbe de f et P la courbe de la fonction g définie sur $]1,+\infty[$ par $g(x) = x^2 + 1$.
Quelle est la limite de $f(x) - g(x)$ quand x tend vers $+\infty$?
Etudier la position de C par rapport à P.
3) Calculer la dérivée de f et étudier les variations de f.
4) Représenter graphiquement P et C.

Jean-Baptiste Fourier (qu'on connait aussi sous le nom de Joseph Fourier) est né le 21 mars 1768 à Auxerre. Il est le douzième des quinze enfants de son père. Alors qu'il n'a que 10 ans, il perd ses parents et est placé à l'école militaire d'Auxerre. Il réalise des études prometteuses en Français et en latin, mais son intérêt se porte, sur les mathématiques. Il lit notamment les 6 tomes du Cours de mathématiques de Bezout. Il rentre ensuite au séminaire, mais n'a pas vraiment la vocation et il retourne en 1789 enseigner à son ancienne école à Auxerre.

En 1794, il est de la première promotion de l'Ecole Normale Supérieure, où ses professeurs ont pour nom Lagrange, Laplace et Monge. Elève le plus brillant, il profite de cet excellent entourage pour s'investir beaucoup dans la recherche mathématique. En 1797, il remplace Lagrange à la chaire d'analyse et de mécanique de l'Ecole Polytechnique, bien qu'il n'ait pas encore à son actif de découverte majeure.

Quand Fourier regagne la France en 1801, Napoléon n'a pas oublié ses excellents états de service, et le nomme préfet de l'Isère, sans que l'on sache si Fourier lui-même désirait ce poste. Il reste que Fourier fut un excellent préfet, qui mena à bien plusieurs projets d'importance. C'est à Grenoble que Fourier réalise l'essentiel de ses travaux les plus importants. Son obsession est le problème de la chaleur, c'est-à-dire l'étude de l'évolution de la température d'un corps au cours du temps. De 1802 à 1807, il trouve l'équation de la propagation de la chaleur dans les corps solides, puis trouve une méthode pour la résoudre, ce qui est maintenant l'analyse de Fourier. Fourier décompose une fonction mathématique unique, mais difficile à décrire mathématiquement, en une somme infinie de fonctions en sinus et en cosinus. Il est alors plus facile de décrire au cours du temps l'évolution de chacune de ces fonctions, et de retrouver la température au temps t en refaisant la somme.