Chapitre 1

Nombres complexes

A partir de la deuxième moitié du XVIIe, les géomètres utilisent de façon de plus en plus courante le symbole -1 dans les identités algébriques et les recherches relatives aux résolutions d'équations.
En 1740, Euler donne la formule $\cos x = \frac{1}{2}(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})$, et en 1748,
la formule $e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$, x est réel.
Dontzig dit de cette dernière qu'elle contient "les symboles les plus importants, union mystérieuse dans laquelle l'arithmétique est représentée par 0 et 1, l'algèbre par -1 , la géométrie par p et l'analyse par e".
(Dalmedico et al, Une histoire des mathématiques, 1986).

Cauchy ne se ralliera explicitement à la représentation géométrique des nombres complexes qu'en 1874. […] et s'est convaincu que la "notion de quantité géométrique […] comprendra comme cas particulier la notion de quantité algébrique.

Chapitre 1

Nombres complexes

I. Rappels et compléments

I. 1 Définition et opérations sur les nombres complexes

Activité 1

Déterminer l'écriture cartésienne de chacun des nombres complexes ci-dessous.

$(2-2i)(1+i)^2$; $\left(-\sqrt{2}-i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+i\sqrt{3}\right)$; $(1+i)^4(1-i)^{20}$.

Théorème et définition (rappel)

Il existe un ensemble appelé ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$ et vérifiant les propriétés ci-dessous.

1. L'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
2. Il existe un élément de $\mathbb{C}$, noté i, tel que $i^2=-1$.
3. L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.
4. Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de façon unique sous la forme $z=a+ib$, où a et b sont des réels.

Conséquences

Soit $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$, où a, a', b et b' sont des réels.

- $z=z'$, si et seulement si, $a=a'$ et $b=b'$.
- $z=0$, si et seulement si, $a=b=0$.
- z est réel, si et seulement si, $b=0$.
- z est imaginaire, si et seulement si, $a=0$.

Activité 2

Soit $z=a+ib$, où a et b sont des réels.
Le conjugué de z est le nombre complexe $\bar{z}=a-ib$.

Soit les nombres complexes $z=-1+2i$ et $z'=i$.

1. Donner l'écriture cartésienne de z^2 et z^3, ainsi que de leurs conjugués.
2. Donner l'écriture cartésienne de zz', $(zz')^2$, $(zz')^3$, ainsi que de leurs conjugués.
3. Donner l'écriture cartésienne de $\frac{z}{z'}$, $\left(\frac{z}{z'}\right)^2$, $\left(\frac{z}{z'}\right)^3$, ainsi que de leurs conjugués.

Propriétés

- Pour tous nombres complexes z et z',
$\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$; $\overline{zz'}=\overline{z}\,\overline{z'}$; $\overline{\left(z^n\right)}=\left(\overline{z}\right)^n$; $n\in\mathbb{N}^*$.
- Pour tout nombre complexe z et tout nombre complexe non nul z',
$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$; $\overline{\left(\frac{1}{z'^n}\right)}=\frac{1}{\left(\overline{z'}\right)^n}$, $n\in\mathbb{Z}$.
- $z+\overline{z}=2\,\mathrm{Re}(z)$; $z-\overline{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)$; $z\overline{z}=\left(\mathrm{Re}(z)\right)^2+\left(\mathrm{Im}(z)\right)^2$.
- $z=\overline{z}$, si et seulement si, z est réel.
- $z=-\overline{z}$, si et seulement si, z est imaginaire.

I. 2 Affixe d'un point, affixe d'un vecteur

Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

1. Placer les points A, B et C d'affixes respectives i, $1-3i$, $1+2i$.
2. Donner les affixes de leurs symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
3. Donner les affixes de leurs symétriques par rapport au point O.
4. Donner les affixes de leurs symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
5. Donner les affixes des vecteurs $\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}$, $-\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.
6. Déterminer l'affixe du centre de gravité du triangle ABC.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

- L'affixe d'un point $M(a,b)$ du plan est le nombre complexe $z=a+ib$ noté $\mathrm{Aff}(M)$ ou z_M. On dit aussi que le point $M(a,b)$ est l'image de z.
- Soit $\vec{w}$ un vecteur et M et N deux points tels que $\vec{w}=\overrightarrow{MN}$. Alors l'affixe du vecteur $\vec{w}$ est le nombre complexe noté $\mathrm{Aff}\left(\vec{w}\right)$ ou $z_{\vec{w}}$, vérifiant $z_{\vec{w}}=z_N-z_M$.
- Pour tous vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w_1}$ et tous réels α et β, $\mathrm{Aff}\left(\alpha\vec{w}+\beta\vec{w_1}\right)=\alpha\mathrm{Aff}\left(\vec{w}\right)+\beta\mathrm{Aff}\left(\vec{w_1}\right)$.

Exercice résolu 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soit A et B les points d'affixes respectives $2-2i$ et $-1+i$.
1. Montrer que les points O, A et B sont alignés.
2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z=k(2-2i)$, $k\in\mathbb{R}$.

Solution

1. Les points O, A et B sont alignés, si et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires,
ou encore, si et seulement si, il existe un réel k tel que $\text{Aff}\left(\overrightarrow{OA}\right)=k\text{Aff}\left(\overrightarrow{OB}\right)$.

Ce qui est le cas, puisque $\text{Aff}\left(\overrightarrow{OA}\right)=-2(-1+i)=-2\text{Aff}\left(\overrightarrow{OB}\right)$.

2. Soit $D=\{M;\ z=k(2-2i),\ k\in\mathbb{R}\}$.

Un point M appartient à D, si et seulement si, $\text{Aff}\left(\overrightarrow{OM}\right)=k\text{Aff}\left(\overrightarrow{OA}\right)$.

Ce qui équivaut à, $\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{OA}$. On en déduit que l'ensemble cherché est la droite (OA).

Propriété

Soit $\vec{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ deux vecteurs tels que $\overrightarrow{w_1}\neq\vec{0}$.

Les vecteurs $\vec{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ sont colinéaires, si et seulement si, $\dfrac{z_{\vec{w}}}{z_{\overrightarrow{w_1}}}$ est réel.

Démonstration

Soit $\vec{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ deux vecteurs tels que $\overrightarrow{w_1}\neq\vec{0}$.

Les vecteurs $\vec{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ sont colinéaires, si et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{w}=k\overrightarrow{w_1}$.

La relation $\vec{w}=k\overrightarrow{w_1}$ est équivalente à $\text{Aff}\left(\vec{w}\right)=k\text{Aff}\left(\overrightarrow{w_1}\right)$, ou encore à $\dfrac{\text{Aff}\left(\vec{w}\right)}{\text{Aff}\left(\overrightarrow{w_1}\right)}=k$.

Le théorème en découle.

Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soit A et B les points d'affixes respectives $1+2i$ et $i(1+2i)$.

1. Placer les points A et B.
2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux.

Propriété

Soit $\vec{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ deux vecteurs tels que $\overrightarrow{w_1}\neq\vec{0}$.

$\vec{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ sont orthogonaux, si et seulement si, $\dfrac{z_{\vec{w}}}{z_{\overrightarrow{w_1}}}$ est imaginaire.

Démonstration

Soit $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ deux vecteurs tels que $\overrightarrow{w_1} \neq \vec{0}$ et d'affixes respectives $z_{\overrightarrow{w}} = a + bi$ et $z_{\overrightarrow{w_1}} = a' + b'i$, a, b, a' et b' réels.

Les vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ sont orthogonaux, si et seulement si, $aa' + bb' = 0$.

Or, $\dfrac{z_{\overrightarrow{w}}}{z_{\overrightarrow{w_1}}} = \dfrac{a+bi}{a'+b'i} = \dfrac{(a+bi)(a'-b'i)}{a'^2+b'^2} = \dfrac{aa'+bb'+(a'b-ab')i}{a'^2+b'^2}$.

On en déduit que $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ sont orthogonaux, si et seulement si, $\dfrac{z_{\overrightarrow{w}}}{z_{\overrightarrow{w_1}}}$ est imaginaire.

Exercice résolu 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $\dfrac{z-i}{z-1}$ soit imaginaire.

Solution

Désignons par A le point d'affixe i , B le point d'affixe 1 et M le point d'affixe z tel que $z \neq 1$.

Le nombre complexe $\dfrac{z-i}{z-1}$ est imaginaire, si et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux et M est distinct de B.

L'ensemble cherché est donc le cercle de diamètre [AB], privé du point B.

I. 3 Module d'un nombre complexe

Activité 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_B = 1 - i\sqrt{3}$.

Calculer OA, OB et AB.

> Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
>
> • Soit $z = a + ib$ et $M(a, b)$ le point d'affixe z.
> On appelle module de z le réel positif, noté $|z|$, défini par $|z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$.
>
> • Pour tous points M et N d'affixes z_M et z_N, $|z_N - z_M| = MN$.

Activité 6

Soit $z = 2 - i$ et $z' = -3 + 4i$.

1. Donner les écritures cartésiennes de $z + z'$; zz' ; $\dfrac{z}{z'}$; z^4 ; $\left(\overline{zz'}\right)^2$.
2. Calculer les modules de $z + z'$; zz' ; $\dfrac{z}{z'}$; z^4 ; $\left(\overline{zz'}\right)^2$.

Propriétés

Soit deux nombres complexes z et z'.

$|z| = 0$, si et seulement si, $z = 0$; $|z+z'| \le |z| + |z'|$; $|kz| = |k||z|$, $k \in \mathbb{R}$.

$|zz'| = |z||z'|$; $|\bar{z}| = |z|$; $|z|^2 = z\bar{z}$; $|z^n| = |z|^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$, $z \ne 0$; $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$, $z \ne 0$; $\left|\frac{1}{z^n}\right| = \frac{1}{|z|^n}$, $z \ne 0$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Activité 7

Calculer les modules de $(1+i)^5$, $\frac{(1+i)^{11}}{(1-i)^6}$ et $(1-i)^5$.

Exercice résolu 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 1 + 2i| = 2$.
2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z + 2 - i| = |\bar{z} - 2 + 2i|$.

Solution

1. Considérons le point A d'affixe $1 - 2i$ et un point M d'affixe z.
L'égalité $|z - 1 + 2i| = 2$ est équivalente à $AM = 2$.
On en déduit que l'ensemble cherché est le cercle de centre A et de rayon 2.
2. On sait qu'un nombre complexe et son conjugué ont même module.
Il en résulte que $|\bar{z} - 2 + 2i| = |z - 2 - 2i|$.
Considérons les points K et L d'affixes respectives $-2 + i$ et $2 + 2i$.
Soit M un point d'affixe z. L'égalité $|z + 2 - i| = |\bar{z} - 2 + 2i|$ est équivalente à
$|z + 2 - i| = |z - 2 - 2i|$, ou encore à $KM = LM$.
On en déduit que l'ensemble cherché est la médiatrice du segment $[KL]$.

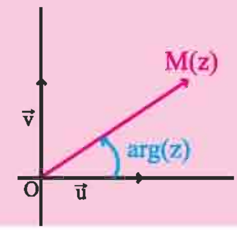
I. 4 Argument d'un nombre complexe non nul

Activité 8

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Placer les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -i$; $z_B = 4$; $z_C = 2 + 2i$ et $z_D = -1 + i$ et déterminer, graphiquement, un argument de chacun de ces nombres complexes.
2. Soit A_1, B_1, C_1 et D_1 les symétriques respectifs de A, B, C et D par rapport à l'axe des abscisses.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit z un nombre complexe non nul et M son image. On appelle argument de z et on note $\arg(z)$ toute mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.



Déterminer un argument de chacun de leurs affixes.

3. Reprendre la question précédente pour les symétriques respectifs de A, B, C et D par rapport à O.
4. Reprendre la question précédente pour les symétriques respectifs de A, B, C et D par rapport à l'axe des ordonnées.

Activité 9

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soit M un point distinct de O tel que $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right) \equiv \theta\ [2\pi]$.

On désigne par M_1, M_2 et M_3 les symétriques respectifs de M par rapport à l'axe des abscisses, au point O et à l'axe des ordonnées.

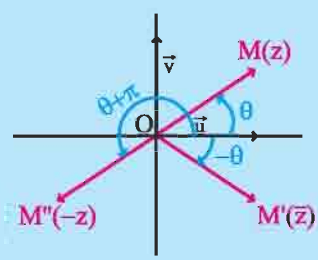
Déterminer $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM_1}}\right)$; $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM_2}}\right)$; $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM_3}}\right)$ en fonction de θ.

Propriétés

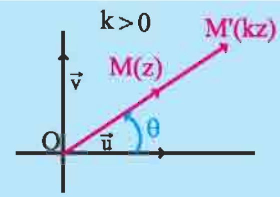
Soit z un nombre complexe non nul et k un réel non nul.

$\arg\left(\bar{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$.

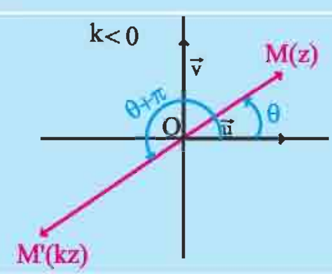
$\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)\ [2\pi]$.



Si $k > 0$ alors $\arg(kz) \equiv \arg(z)\ [2\pi]$.



Si $k < 0$ alors $\arg(kz) \equiv \pi + \arg(z)\ [2\pi]$.



I. 5 Ecriture trigonométrique

Activité 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Soit $z = -2\sqrt{3} + 2i$.

1. Déterminer l'écriture trigonométrique de z et placer le point d'affixe z.
2. En déduire l'écriture trigonométrique de chacun des nombres complexes $\bar{z}, -z, \frac{1}{2}z$ et $-\frac{3}{2}z$, puis placer leurs points images.

Soit z un nombre complexe non nul tel que $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$. Alors $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.
L'écriture précédente est appelée écriture trigonométrique de z.
Si M est l'image de z dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ alors M appartient au cercle de centre O et de rayon $|z|$ et à la demi droite $[OB)$ telle que $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OB}}) \equiv \theta\ [2\pi]$.

Activité 11

Soit les nombres complexes $z = 1 + 9i$ et $z' = 2 - 8i$.
Donner une valeur approchée de leurs arguments à 10^{-2} près.

Soit un nombre complexe non nul $z = a + ib$, a et b des réels.
$\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$, si et seulement si,
$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Activité 12

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Donner l'écriture trigonométrique de chacun des nombres complexes $z_A = 4$, $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

I. 6 Propriétés d'un argument d'un nombre complexe non nul

Activité 13

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls tels que $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = |z'|(\cos\theta' + i\sin\theta')$.

1. Donner les écritures trigonométriques de zz', $\frac{1}{z}$ et $\frac{z'}{z}$.
2. a. Montrer par récurrence, sur l'entier naturel n, que $z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$.

   b. En déduire que pour tout entier naturel n, $z^{-n} = |z|^{-n}(\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta))$.

Propriétés

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.

$\arg(zz') \equiv \arg(z)+\arg(z')\ [2\pi]$.

$\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$; $\quad \arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) \equiv \arg(z')-\arg(z)\ [2\pi]$.

$\arg(z^n) \equiv n\arg(z)\ [2\pi]$, $n \in \mathbb{N}$; $\arg\left(\dfrac{1}{z^n}\right) \equiv -n\arg(z)\ [2\pi]$, $n \in \mathbb{N}$.

Soit un nombre complexe non nul $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Pour tout entier n, $z^n = |z|^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$.

La formule précédente est appelée formule de Moivre.

Activité 14

Donner l'écriture trigonométrique de chacun des nombres complexes ci-dessous.

$(1+i)^6$; $(1-i)^9$ $\dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)^5}{\left(\sqrt{3}-i\right)^8}$; $\left(2\sqrt{3}-2i\right)^6\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$.

II. Ecriture exponentielle d'un nombre complexe

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

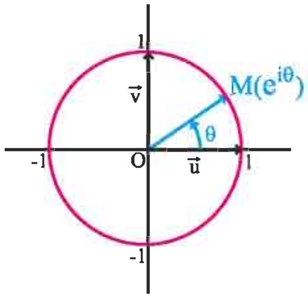
Soit les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$ et $z_C = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

1. Donner les écritures trigonométriques de z_A, z_B et z_C.
2. En déduire que les points A, B et C appartiennent au cercle trigonométrique.

Notation

Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $\cos\theta + i\sin\theta$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.
Un point M appartient au cercle trigonométrique, si et seulement si, M a pour affixe $z = e^{i\theta}$, où $\theta \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)\ [2\pi]$.



Conséquences

- $e^{i0}=1$, $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$, $e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i$, $e^{i\pi}=-1$.
- Pour tout réel θ et tout entier k, $e^{i\theta}=e^{i(\theta+2k\pi)}$.
- Pour tout réel θ, $\left|e^{i\theta}\right|=1$ et $\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$ et $-e^{i\theta}=e^{i(\theta+\pi)}$.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On donne les nombres complexes $z=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z'=e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

1. Donner le module et un argument de chacun des nombres complexes
   $-z$, $\bar{z}$, zz', $\frac{1}{z}$, $\frac{z}{z'}$ et z^n, $n\in\mathbb{Z}$.
2. Ecrire sous la forme $e^{i\theta}$ les nombres complexes zz', $\bar{z}$, $\frac{z}{z'}$, z^n, $n\in\mathbb{Z}$.

Les propriétés ci-dessous découlent des propriétés de l'argument du produit, de l'inverse ou du quotient de deux nombres complexes non nuls.

Propriétés

Soit deux réels θ et θ'.

$e^{i\theta}.e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$; $\frac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$; $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')}$; $\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}, n\in\mathbb{Z}$.

Exercice résolu 4

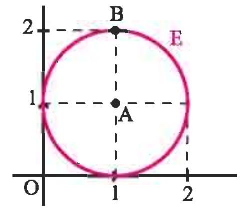
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On considère le nombre complexe $z=1+i+e^{i\theta}$, $\theta\in[0,2\pi[$ et on désigne par E l'ensemble des points M du plan d'affixe z .

1. Vérifier que le point B d'affixe $z_B=1+2i$ appartient à E.
2. Déterminer l'ensemble E.

Solution

1. On sait que $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. On peut alors écrire $z_B = 1+2i = 1+i+e^{i\frac{\pi}{2}}$.
Ce qui prouve que B appartient à l'ensemble E.



2. Soit A le point d'affixe $z_A = 1+i$ et M un point du plan complexe d'affixe z.
Le point M appartient à E, si et seulement si,
$z - z_A = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi[$,
ou encore, si et seulement si, AM = 1.
L'ensemble E est donc le cercle de centre A et de rayon 1.

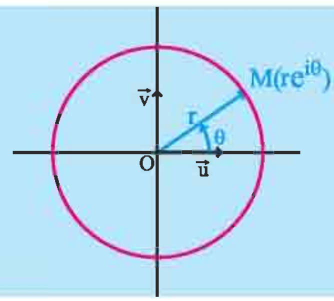
Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Donner l'écriture trigonométrique des nombres complexes
$z_1 = 2i$, $z_2 = -3i$, $z_3 = -\frac{5}{2}$, $z_4 = \sqrt{3}(1+i)$ et $z_5 = \frac{-2\sqrt{3}+2i}{5}$.
2. Ecrire chacun des nombres complexes précédents sous la forme $re^{i\theta}$, avec $r > 0$.

Théorème et définition

Tout nombre complexe non nul z, s'écrit sous la forme
$z = re^{i\theta}$, où $r = |z|$ et $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$.
L'écriture $z = re^{i\theta}$ est appelée écriture exponentielle de z.



Activité 4

On considère les deux nombres complexes $z = \sqrt{3}+i$ et $z' = -1+i$.

Donner l'écriture exponentielle des nombres complexes z, $\bar{z}$, z', $\overline{z'}$, zz', $\frac{1}{z}$, z^5, $\frac{z}{z'}$ et z'^2.

Activité 5

1. Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes $z = \sqrt{3} - i$ et $z' = 1+i$.
2. En déduire l'écriture cartésienne de $\frac{(1+i)^{14}}{(\sqrt{3}-i)^8}$.

Activité 6

1. Vérifier que pour tout réel θ, $1+e^{i\theta}=\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$.

2. Donner l'écriture exponentielle des nombres complexes $z=1+e^{i\frac{2\pi}{5}}$ et $z=1+e^{i\frac{3\pi}{5}}$.

III. Nombres complexes et trigonométrie

Théorème

Pour tout réel x et pour tout entier n,
$(\cos x+i\sin x)^n=\cos(nx)+i\sin(nx)$. (Formule de Moivre).
Pour tout réel x,
$\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$. (Formules d'Euler).

Les formules de Moivre et d'Euler permettent d'établir un grand nombre de formules trigonométriques.
Elles permettent aussi d'exprimer des puissances de $\cos x$ et $\sin x$ à l'aide de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$.

Activité 1

Soit k un entier.

Montrer que pour tout réel x différent de $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $e^{2ix}=\dfrac{1+i\tan x}{1-i\tan x}$.

Activité 2

1. En utilisant la formule de Moivre et la formule du binôme de Newton, montrer que $\cos(3x)=\cos^3 x-3\cos x\sin^2 x$ et $\sin(3x)=3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x$.
2. Exprimer $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de puissances de $\cos x$ et de $\sin x$.

Exercice résolu 5

Linéariser $\sin^5 x$, $x\in\mathbb{R}$.

En transformant une expression contenant une puissance de $\cos x$ ou de $\sin x$ sous une forme qui ne contient aucun produit de fonctions circulaires, on dit qu'on a linéarisé l'expression donnée.

Solution

En utilisant la formule d'Euler, on obtient $\sin^5 x = \frac{1}{(2i)^5}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^5$.

La formule du binôme de Newton, donne

$$\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^5 = e^{5ix} - C_5^1\, e^{4ix}e^{-ix} + C_5^2\, e^{3ix}e^{-2ix} - C_5^3\, e^{2ix}e^{-3ix} + C_5^4\, e^{ix}e^{-4ix} - e^{-5ix}.$$

On obtient alors, $\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^5 = \left(e^{5ix} - e^{-5ix}\right) - 5\left(e^{3ix} - e^{-3ix}\right) + 10\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$.

Il en résulte que $\sin^5 x = \frac{1}{16}\left(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x\right)$.

Activité 3

Linéariser $\cos^3 x$, $\sin^3 x$, où x est un réel.

Activité 4

Linéariser $\sin^2 x.\cos^3 x$.

QCM

Cocher la réponse exacte.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit les points $M(z)$ et $M'(z')$.

1. a. La distance MM' est égale à

☐ $|z - z'|$. ☐ $||z| - |z'||$. ☐ $|z + z'|$.

b. Si $\arg(z) \equiv \arg(z')\ [2\pi]$, alors

☐ O, M et M′ sont alignés. ☐ $z = z'$. ☐ $|z| = |z'|$.

c. Si $\arg(z) \equiv \arg(iz')\ [2\pi]$ et $|z| = |z'| = 1$, alors

☐ $z = z'$ ☐ $z = iz'$. ☐ $z = -z'$.

2. Si A, B et C sont trois points d'affixes respectives z_A, z_B et z_C tels que $z_B - z_A = 4(z_C - z_A)$, alors

☐ ABC est isocèle. ☐ (AB) et (AC) sont perpendiculaires. ☐ A, B et C sont alignés

3. Si A, B et C sont trois points d'affixes respectives z_A, z_B et z_C tels que $z_B - z_A = 4i(z_C - z_A)$, alors

☐ ABC est isocèle. ☐ (AB) et (AC) sont perpendiculaires. ☐ (AB) et (AC) sont parallèles.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes non réels.

Le conjugué de $Z = z_1 + iz_2$ est $\overline{Z} = z_1 - iz_2$.

2. Soit z un nombre complexe. Si z^3 est réel alors nécessairement z est réel.

3. Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.

Si $|z| = |z'|$ alors nécessairement $z = z'$ ou $z = -z'$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1 Mettre les nombres complexes ci-dessous sous forme algébrique.

$2i+\frac{1}{i}-1$; $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$; $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$; $\frac{(1-i)(2+i)}{i-2}$.

2 Calculer le conjugué de chacun des nombres complexes ci-dessous.

$\frac{(3-2i)(5+i)}{3i(7+2i)}$; $\left(\frac{i-3}{1+i}\right)^2$;

$(2-i)(3+2i)(2+i)(3-2i)$.

3 On donne les nombres complexes

$z_1=\frac{(11+13i)(11-13i)-(3-5i)-(3+5i)}{(7+3i)+(7-3i)}$;

$z_2=\frac{3-7i}{9+2i}$; $z_3=\frac{3+7i}{9-2i}$.

Montrer, sans effectuer de calcul, que z_1 est réel, z_3+z_2 est réel et z_3-z_2 est imaginaire.

4 Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z dans chacun des cas suivants.

1. $z=a+i(a+1)$, $a\in\mathbb{R}$.
2. $z=2i\sin\frac{a}{2}$, $a\in[0, 2\pi[$.
3. $a(z-i)=i(z+1)$, $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

5 Calculer le module de chacun des nombres complexes ci-dessous.

$(1+i)^4$; $(2-3i)^2$; $(-2+i)(1-3i)(1-4i)$; $\frac{1-5i}{i+2\sqrt{3}}$.

6 1. Montrer que pour tout nombre complexe z, $|z|=1$, si et seulement si, $\bar{z}=\frac{1}{z}$.

2. En déduire que si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes tels que $|z_1|=|z_2|=1$ alors $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ est réel.

7 Soit z un nombre complexe. Déterminer z pour que les nombres complexes z, $1-z$ et z^2 aient le même module.

8 Pour tout nombre complexe $z=x+iy$ avec x et y réels, on considère le nombre complexe $z'=z^2$.

1. Exprimer en fonction de x et y la partie réelle et la partie imaginaire de z'.
2. Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tel que z' soit réel.
3. Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tel que z' soit imaginaire.

9 Soit A, B et C les points d'affixes respectives $2+i$, -1 et $3-2i$.

1. Déterminer l'affixe du point I milieu de $[BC]$.
2. a. Calculer AB, AC et BC.
b. Quelle est la nature du triangle ABC ?
3. a. Déterminer l'affixe du point D symétrique de A par rapport à I.
b. Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ?

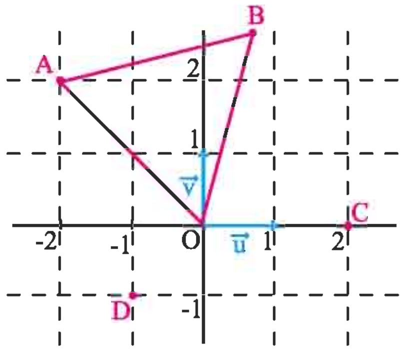
10 Placer dans le plan, les points A, B, C et D d'affixes respectives $-2+i$, $4i$, $\frac{7}{2}+2i$ et $\frac{3}{2}-i$

Quelle est la nature du quadrilatère ABCD?

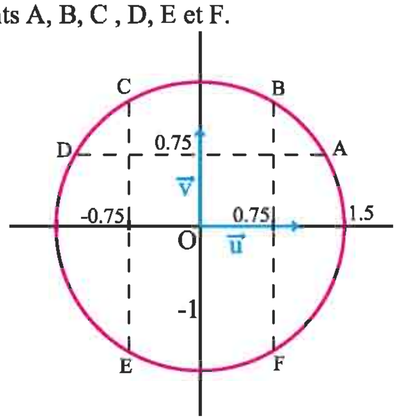
11 1. Déterminer et représenter l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $|\bar{z}-1+2i|=3$.

2. Déterminer et représenter l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $\frac{|iz+1-i|}{|\bar{z}+2+i|}=1$.

12 Dans le graphique ci-dessous le triangle OAB est équilatéral. Déterminer le module et un argument des affixes z_A, z_B, z_C et z_D des points A, B, C et D.



13 Déterminer à l'aide du graphique ci-contre, un argument des affixes z_A , z_B , z_C , z_D , z_E et z_F des points A, B, C , D, E et F.



14 Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants.

a. $-8i$; $\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$; $3i+\sqrt{3}$; -2.5 ; $\sqrt{2}-\sqrt{6}i$; $5+5i$.

b. $\dfrac{3\left(1+i\sqrt{3}\right)}{(1+i)^2}$; $\dfrac{1+i}{1-i}$; $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\right)^3$; $(1-i)^5(1+i)^3$.

15 Soit $z_1=1+i$ et $z_2=\sqrt{3}-i$.

1. Déterminer $|z_1|$, $\arg(z_1)$, $|z_2|$ et $\arg(z_2)$.
2. Donner la forme algébrique et la forme trigonométrique de z_1z_2 .
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

16 Soit $z_1=-1+i\sqrt{3}$ et $z_2=1+i$.

1. Déterminer $|z_1|$, $\arg(z_1)$, $|z_2|$ et $\arg(z_2)$.
2. Déterminer $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$ et $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

17 Mettre sous la forme algébrique les nombres complexes ci-dessous.

e^i ; $e^{-i\frac{\pi}{4}}$; $e^{2i\frac{\pi}{3}}$; $\dfrac{e^{i\pi}}{4}$; $2ie^{i\frac{\pi}{6}}$.

18 Donner la forme exponentielle des nombres complexes ci-dessous.

$2\sqrt{3}-2i$; $-5-5i$; $-1+i\sqrt{3}$; $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$; $\cos\dfrac{\pi}{5}-i\sin\dfrac{\pi}{5}$.

19 1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$.

2. En déduire la forme algébrique de z^6 .

20 1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $-1+i$.

2. En déduire que $(-1+i)^{11}=32+32i$.

21 Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z dans chacun des cas suivants.

1. $z=2e^{i\theta}$, $\quad\theta\in[0, \pi]$.
2. $z=-2e^{i\theta}$, $\quad\theta\in[0, \pi]$.
3. $z=2+\cos\theta+i\sin\theta$, $\quad\theta\in[0, 2\pi[$.

22 Soit un réel θ de $]0,\pi[$.

1. Montrer que $1+e^{i\theta}=2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et

$1-e^{i\theta}=-2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

2. En déduire le module et argument de chacun des nombres complexes $1+e^{i\theta}$ et $1-e^{i\theta}$.

23 Donner la forme exponentielle du nombre complexe z dans chacun des cas suivants.

1. $z=\cos\theta-i\sin\theta,\quad \theta\in\mathbb{R}$.
2. $z=\sin\theta+i\cos\theta,\quad \theta\in\mathbb{R}$.
3. $z=-\cos\theta-i\sin\theta,\quad \theta\in\mathbb{R}$.
4. $z=1+i\tan\theta,\quad \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.
5. $z=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}},\quad \theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$.

24 On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O. Soit un point M de $\mathscr{C}$ d'affixe t telle que $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}})\equiv\alpha[2\pi]$, $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

On pose $u=t^3$ et $v=2t$.

1. Ecrire chacun des nombres complexes u et v sous la forme trigonométrique.

Soit $w=2t-t^3$, A, B et C les points d'affixes respectives u, v et w.

2. Placer, dans le plan, les points A, B et C lorsque $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

3. Déterminer les réels α pour lesquels O, A et B sont alignés.

4. On suppose dans la suite que $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

a. Quelle est la nature du quadrilatère OABC ?

b. Déterminer le réel α pour que OABC soit un rectangle.

25 Soit le nombre complexe $z=e^{i2\theta}-i$ avec $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$.

1. On désigne par M et M′ les points images respectives de z et $\bar{z}$. Déterminer l'affixe du point N pour que OMNM′ soit un losange.

2. a. Montrer que $z=2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$.

b. Mettre $\frac{z}{\bar{z}}$ sous la forme exponentielle.

c. En déduire la valeur de θ pour que OMNM′ soit un carré.

d. Construire le carré OMNM′ pour la valeur de θ trouvée.

26 Soit θ un réel de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O.

Soit un point M de $\mathscr{C}$ d'affixe z tel que $\arg(z)\equiv\theta\,[2\pi]$.

1. Placer les points A et B d'affixes respectives $z_A=1+\cos\theta$ et $z_B=-1+i\sin\theta$.

2. a. Montrer que le quadrilatère OAMB est un parallélogramme.

b. Montrer qu'il existe une valeur de θ tel que OABM est un losange.

c. Donner une valeur approchée de θ à 10^{-1} près.

3. On désigne par $\mathcal{A}(\theta)$ l'aire du parallélogramme OAMB.

Montrer que $\mathcal{A}(\theta)$ est maximale lorsque $\theta=\frac{\pi}{3}$.

27 Soit φ un réel de $]0,\pi[$ et z le nombre complexe défini par $z=\frac{1}{2}(\sin\varphi+i(1-\cos\varphi))$.

1. Déterminer en fonction de φ, le module et un argument de z.

2. Déterminer un module et un argument des nombres complexes $z_1=z-i$ et $z_2=\frac{z}{z-i}$.

On considère les points M et N d'affixes respectives z_1 et z_2.

1. Déterminer l'ensemble E décrit par le point M.
2. Déterminer l'ensemble F décrit par le point N.
3. Représenter les ensembles E et F.