Chapitre 4

Equations de droites, de plans et de sphères

La géométrie analytique est une approche de la géométrie dans laquelle on représente les objets par des équations ou inéquations.
Le plan ou l'espace est nécessairement muni d'un repère.
La géométrie analytique permet à l'inverse de représenter des fonctions mathématiques sous la forme de courbes, de graphiques. Elle est donc fondamentale pour la physique et l'infographie.

(Wikipedia)

Chapitre 4

Equations de droites, de plans et de sphères

Dans tout le chapitre, l'espace est orienté dans le sens direct.

I. Equations d'une droite et d'un plan.

Activité 1

L'espace est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On donne les points $A(0,-1,1)$, $B(2,1,3)$

et la droite

$$\Delta : \begin{cases} x=\alpha \\ y=-2+2\alpha \ ; \alpha \in \mathbb{R}. \\ z=1+\alpha \end{cases}$$

- Soit A un point, $\vec{u}$ un vecteur non nul et D la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Alors $D\left(A, \vec{u}\right)=\left\{M \ ; \ \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} \text{ où } \alpha \text{ est un réel}\right\}$.
- Deux droites de l'espace sont parallèles si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

1. Déterminer un point et un vecteur directeur de Δ.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ' passant par A et parallèle à Δ.
3. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

   b. Montrer que les droites (AB) et Δ sont sécantes en un point I que l'on précisera.

Activité 2

L'espace est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les points $A(-1 , 2 , 1)$, $B(1 , -6 , -1)$ et $C(2, 2, 2)$.

L'espace est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

- Soit A un point, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et P le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Alors $P\left(A, \vec{u},\vec{v}\right)=\left\{M \ ; \ \det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u},\vec{v}\right)=0\right\}$.
- Soit A et B deux points et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires. Alors les plans $P\left(A, \vec{u},\vec{v}\right)$ et $P\left(B, \vec{u},\vec{v}\right)$ sont parallèles.

1. a. Vérifier que les points A, B et C sont non alignés.

   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan Q passant par O et parallèle à (ABC).
3. Soit le point $D(0, 0, 1)$.

Déterminer l'intersection de la droite (OD) avec chacun des plans (ABC) et Q.

Activité 3

L'espace est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(-1\ ,2\ ,1)$ et $B(-1,0,1)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de chacun des plans $(O,\vec{i},\vec{k})$ et $(O,\vec{j},\vec{k})$.
2. Déterminer une équation cartésienne de chacun des plans $(A,\vec{i},\vec{k})$ et $(B,\vec{j},\vec{k})$.

II. Vecteur normal à un plan

Activité 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit deux points $A(-5,10,2)$ et $B(-2,1,2)$

1. Déterminer une équation du plan P passant par le point $A(-5,10,2)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Si P est un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$, alors le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est normal à P.

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul . l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

2. Déterminer l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $\overrightarrow{BM}.\vec{n}=0$.

Exercice résolu 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit les points $A(1,1,1)$, $B(1,2,3)$ et $C(0,0,1)$.

1. Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à un plan de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, si et seulement si, $\vec{u}.\vec{n}=\vec{v}.\vec{n}=0$.

Si un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à un plan P, alors toute droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est perpendiculaire à P.

2. Justifier que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est normal au plan (ABC).
3. a. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.
   b. En déduire une équation cartésienne de (ABC).
4. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par O et perpendiculaire au plan (ABC).

Solution

1. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$ n'étant pas colinéaires, les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est orthogonal à chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui sont des vecteurs directeurs non colinéaires du plan (ABC). On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est normal au plan (ABC).

3. Le calcul donne $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$.

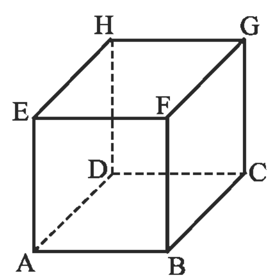
Par suite le plan (ABC) a une équation de la forme $2x-2y+z+d=0$. En remarquant que les coordonnées du point C vérifient l'équation précédente, on en déduit que le plan (ABC) a pour équation $2x-2y+z-1=0$.

4. La droite passant par O et perpendiculaire au plan (ABC) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

On en déduit que $\begin{cases}x=2\alpha\\y=-2\alpha\ ;\ \alpha\in\mathbb{R}\\z=\alpha\end{cases}$ est une représentation paramétrique de cette droite.

Activité 2

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH d'arête 1.
On munit l'espace du repère orthonormé direct $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.



1. Déterminer une équation cartésienne du plan (AFH).
2. En déduire une représentation paramétrique de la droite perpendiculaire à (AFH) passant par C.
3. Calculer la distance de C au plan (AFH).
4. Déterminer le volume du tétraèdre CAFH.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
La distance d'un point $M(x_0,y_0,z_0)$ au plan P d'équation $ax+by+cz+d=0$ est le réel $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

III. Position relative de plans

Activité 1

Deux plans sont parallèles, si et seulement si, leurs vecteurs normaux sont colinéaires.
Deux plans sont perpendiculaires, si et seulement si, leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Soit P, Q et R les plans d'équations respectives $P : 4x-2y+2z+3=0$, $Q : -2x+y-z+6=0$ et $R : x-2z+1=0$.

1. Montrer que les plans P et Q sont parallèles.
2. a. Montrer que les plans P et R sont perpendiculaires.
   b. Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.
3. Que peut-on dire des plans Q et R ?

Exercice résolu 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les points $A(2, 0, -1)$, $B(1, -1, 0)$ et $C(0, 1, 4)$.

1. a. Vérifier que les points A, B et C sont non alignés.
   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan Q passant par O et parallèle au plan (ABC).
3. a. Déterminer une équation du plan R passant par A et perpendiculaire à (AC).
   b. Montrer que R est perpendiculaire au plan (ABC).
4. Déterminer l'intersection Δ de (ABC) et R.

Solution

1. a. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$ n'étant pas colinéaires, les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Le calcul donne $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\3\\-3\end{pmatrix}$.

Par suite, le plan (ABC) a une équation de la forme $6x-3y+3z+d=0$. En remarquant que les coordonnées du point B vérifient l'équation précédente, on en déduit que le plan (ABC) a pour équation $2x-y+z-3=0$.

2. Les plans Q et (ABC) étant parallèles, ils ont des vecteurs normaux colinéaires.
On en déduit que Q a une équation de la forme $2x-y+z+d=0$. En remarquant que les coordonnées du point O vérifient l'équation précédente, on en déduit que le plan Q a pour équation $2x-y+z=0$.

3. a. Le plan R a pour vecteur normal $\overrightarrow{AC}$. On en déduit que le plan R a une équation de la forme $2x-y-5z+d=0$. Le point A étant un point de R, il en résulte que R a pour équation $2x-y-5z-9=0$.

b. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux. De plus, ce sont des vecteurs normaux respectifs des plans R et (ABC). Ce qui prouve que les plans R et (ABC) sont perpendiculaires.

4. La droite Δ a pour système d'équations cartésiennes $\begin{cases} 2x-y+z-3=0 \\ 2x-y-5z-9=0 \end{cases}$.

Le calcul donne $\Delta : \begin{cases} x=\alpha \\ y=-4+2\alpha \ ;\ \alpha\in\mathbb{R} \\ z=-1 \end{cases}$.

IV. La Sphère

Activité 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. Soit le point $I(1, 0, 2)$ et S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ vérifiant $x^2+y^2+z^2-2x-4z+4=0$.
   Montrer que M appartient à S, si et seulement si, $IM=1$.
2. Les points $A(1,1,2)$ et $B(1,-1,4)$ sont-ils des points de S ?

Définition

Soit R un réel strictement positif et I un point de l'espace. On appelle sphère de centre I et de rayon R, l'ensemble des point M de l'espace tels que $IM=R$.

Conséquence

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit le point $I(x_0,y_0,z_0)$ et R un réel strictement positif.

L'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ est la sphère de centre I et de rayon R.

Activité 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit deux points $A(x_0,y_0,z_0)$ et $B(x_1,y_1,z_1)$. Montrer que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ est la sphère de centre le milieu I de $[AB]$ et de diamètre $[AB]$.

Cette activité démontre le théorème suivant.

Théorème

Soit A et B deux points distincts de l'espace. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ est la sphère de diamètre $[AB]$.

Activité 3

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit deux points $A(-1,1,0)$ et $B(0,1,1)$.

Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA=2MB$.

Activité 4

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Déterminer l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que

a. $x^2+y^2+z^2-2x+2y+2z+1=0$.

b. $x^2+y^2+z^2-2x+2y+2z+4=0$.

c. $x^2+y^2+z^2-2x+2y+2z+3=0$.

Théorème

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

L'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ est soit une sphère, soit un point, soit le vide.

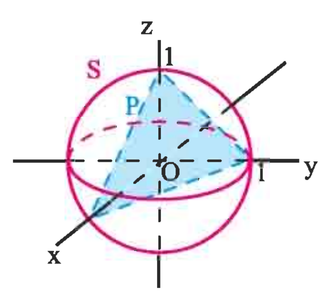
V. Intersection d'une sphère et d'un plan.

Activité 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit la sphère S de centre O et de rayon 1.

1. Soit P le plan d'équation $P: x+y+z-1=0$.
   Calculer la distance du point O au plan P.
   Que peut-on dire de la position relative de S et P ?
2. Reprendre la question précédente pour chacun des plans Q et R d'équations respectives
   $Q: x+y+z+2=0$ et $R: x+y+z+\sqrt{3}=0$.



Théorème

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit S une sphère de centre A et de rayon R. Soit P un plan, h la distance de A à P et H le projeté orthogonal de A sur P.
L'intersection de S et P est
- vide si $h > R$,
- réduite au singleton $\{H\}$ si $h = R$,
- le cercle de rayon $\sqrt{R^2 - h^2}$ et de centre H si $h < R$.

Activité 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit la sphère $S = \{M(x,y,z) ;\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 1\}$.

Etudier la position relative de S et de chacun des plans P, Q et R d'équations respectives $P : z = 0$; $Q : x + y = 0$ et $R : x = 1$.

Exercice résolu 3

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. Soit la sphère $S = \{M(x,y,z) ;\ x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2z = 3\}$.
   Préciser le rayon R et les coordonnées du centre I de la sphère S.
2. a. Vérifier que $A(-3,1,1)$ est un point de S.
   b. Déterminer une équation cartésienne du plan P tangent à S en A.
3. Soit l'ensemble $Q = \{M(x,y,z) \ ;\ MA = MI\}$.

a. Montrer que Q est un plan dont on précisera une équation cartésienne.
b. Montrer que l'intersection du plan Q et de la sphère S est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
c. Déterminer une équation cartésienne de la sphère S' tangente à P et Q respectivement en A et K.

4. Soit R le plan d'équation $2x + y - 2z - 6.5 = 0$.

Montrer que l'intersection du plan R et de la sphère S est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Solution

1. On vérifie facilement qu'un point $M(x,y,z)$ appartient à S , si et seulement si, $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$. Donc S est la sphère de centre $I(-1,2,-1)$ et de rayon 3.

2. a. Il suffit de s'assurer que les coordonnées de A vérifient l'équation de la sphère. Ce qui est bien le cas.

b. Le plan P contient A et le vecteur $\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$ est normal à P.

On en déduit que P a pour équation $-2x-y+2z-7=0$.

3. a. Le plan Q est le plan médiateur du segment $[IA]$ et le vecteur $\overrightarrow{IA}$ est normal à Q.

En remarquant que le milieu $K(-2,\ 1.5,\ 0)$ de $[IA]$ est un point de Q, on en déduit que le plan Q est d'équation $-2x-y+2z-2.5=0$.

b. La distance de I à Q est le réel $IK=1.5$, qui est strictement inférieur au rayon de la sphère.

On en déduit que $Q\cap S$ est un cercle de centre K et de rayon $\sqrt{9-\frac{9}{4}}=3\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c. La sphère S' tangente à P et Q respectivement en A et K a pour centre le point J milieu du segment $[KA]$ et pour rayon JA.

On en déduit que S' est la sphère de centre $J(-2.5\ ,\ 1.25\ ,0.5)$ et de rayon 0.75.

Par suite $S':(x+2.5)^2+(x-1.25)^2+(x-0.5)^2=0.75^2$.

4. la distance h du point I au plan R est le réel $\frac{|-2+2+2-6.5|}{\sqrt{9}}=1.5$

Soit $H(x_0,y_0,z_0)$ le projeté orthogonal du centre I de la sphère sur le plan R. Déterminons les coordonnées de H. On peut affirmer que les vecteurs $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{IA}$ sont colinéaires. Il existe donc un réel m tel que $\overrightarrow{IH}=\begin{pmatrix}-2m\\-m\\2m\end{pmatrix}$, ou encore tel que, $\begin{cases}x_0=-1-2m\\y_0=2-m\\z_0=-1+2m\end{cases}$.

En remarquant que H est un point de R, on obtient $m=-0.5$.

Ce qui nous donne $H(0\ ,\ 2.5\ ,\ -2)$.

Par suite $R\cap S$ est un cercle de centre H et de rayon $r=\sqrt{9-\frac{9}{4}}=3\frac{\sqrt{3}}{2}$.

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Soit S la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2-x-y-z-\frac{1}{2}=0$.

 a. ☐ La sphère S a pour centre le point $I(0.5, 0.5, 0.5)$ et pour rayon 0.25.

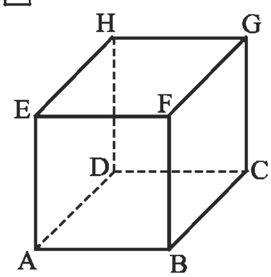
 ☐ La sphère S a pour centre le point $I(0.5, 0.5, 0.5)$ et pour rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

 ☐ La sphère S a pour centre le point $I(1, 1, 1)$ et pour rayon 0.5.

 b. L'intersection de la sphère S et du plan d'équation $x+y+z+\frac{1}{2}=0$ est

 ☐ un cercle. ☐ un point. ☐ le vide.

2. Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube d'arête 1.
 On munit l'espace du repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



 a. Le plan (BCH) a pour équation,

 ☐ $x+y-1=0$. ☐ $x+z-1=0$. ☐ $y+z-1=0$.

 b. le système d'équations $\begin{cases} x+z-1=0 \\ y=1 \end{cases}$ est celui de

 ☐ la droite (HG). ☐ la droite (HC). ☐ la droite (HD).

 c. L'intersection des plans d'équations $x+y-1=0$ et $x-y=0$ est

 ☐ la droite (HC).

 ☐ la droite (BD).

 ☐ la droite passant par le centre du carré ABCD et parallèle à (AE).

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Les plans d'équations $x-2y+z-1=0$ et $x+y+z-1=0$ sont perpendiculaires.
2. Soit P le plan d'équation $x+2y+3z+4=0$. Pour tous points A, B et C du plan P, le vecteur $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.
3. Le plan d'équation $x=0.5$ coupe la sphère S d'équation $x^2+y^2+z^2=1$ suivant un cercle de centre $I(0.5, 0, 0)$ et de rayon 0.5.
4. La sphère d'équation $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ est tangente à chacun des plans d'équations respectives $x=0$, $y=0$ et $z=0$.

Dans tous les exercices, l'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1 Dans chacun des cas ci-dessous donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

a. $A(1,-2,3)$; $B(-1,0,1)$.

b. $A(2,3.5,0)$; $B(2,-2,1)$.

c. $A(0,0,1)$; $B(-1,-1,-1)$.

2 Soit les droites

$$D:\begin{cases}x=1-\alpha\\ y=2+\alpha \quad \alpha\in\mathbb{R}\\ z=-1-\alpha\end{cases} \text{ et } D':\begin{cases}x=1+2\beta\\ y=2-2\beta \quad \beta\in\mathbb{R}\\ z=1+2\beta\end{cases}$$

Montrer que les droites D' et D sont parallèles.

3 Etudier dans chacun des cas la position relative de la droite D et du plan P.

$$\Delta:\begin{cases}x=2t+4\\ y=-3t-5,\ t\in\mathbb{R}\\ z=t+8\end{cases} \quad ; \quad P: x+y+z-5=0\ .$$

$$\Delta:\begin{cases}x=5t+4\\ y=3 \quad ,t\in\mathbb{R}\\ z=2t\end{cases} \quad ; \quad P: 2x-3y+4z-11=0\ .$$

4 Déterminer les coordonnées des points d'intersection du plan P d'équation $2x+3y-5z=20$ avec les droites $(O,\vec{i})$, $(O,\vec{j})$ et $(O,\vec{j}\wedge\vec{i})$.

5 Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que $AB=2$, $AD=1$ et $AE=1$.
On désigne par I le milieu [BD].
Soit $R=\left(A\ ,\ \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AD}\ ,\ \overrightarrow{AE}\right)$ un repère de l'espace.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HI).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (DEG).
3. En déduire que la droite (HI) coupe le plan (DEG) au milieu du segment [HI].

6 Soit le point $A(-1,-2,-3)$.

1. Déterminer une équation cartésienne des plans $P(A\ ,\ \vec{i}-\vec{j},\vec{k})$; $Q(A\ ,\ \vec{i}+\vec{j},\vec{i}+\vec{k})$; $R(A\ ,\ \vec{i}\wedge\vec{j},\ \vec{j}\wedge\vec{k})$.
2. Calculer les distances de O à chacun des plans P , Q et R .

7 On considère le tétraèdre OIJK tel que le repère $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OK})$ soit orthonormé direct.

1. Donner une équation cartésienne de chacun des plans des faces.
2. Soit le point $M\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.
Calculer la distance de M à chacune des faces du tétraèdre.
3. Montrer que les points O, I , J et M ne sont pas coplanaires et calculer le volume du tétraèdre OIJM.

8 Déterminer dans chacun des cas une équation du plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

a. $A(1,0,1)$; $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ b. $A(1,2,0)$; $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

c. $A(-1,2,-3)$; $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\-4\end{pmatrix}$.

9 Donner dans chacun des cas une représentation paramétrique de la droite passant par A et perpendiculaire au plan P.

a. $A(0,0,1)$; $P: -3x+2y-7=0$.

b. $A(1,-3,2)$; $P: y-5=0$.

c. $A(1,5,3)$; $P: y-5z+4=0$.

10 Soit P le plan d'équation $-x+5y-z=7$ et le point $A(1,1,5)$.

1. Vérifier que A n'appartient pas à P.

Soit $H(x_0,y_0,z_0)$ le projeté orthogonal de A sur P.

2.a. Justifier l'existence d'un réel k tel que $\overrightarrow{AH}=\begin{pmatrix}-k\\5k\\-k\end{pmatrix}$.

b. Déterminer les coordonnées de H.

11 On considère les points $A(1,-2,3)$, $B(2,0,3)$ et $C(0,-1,2)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés
2. Donner une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Donner une équation cartésienne du plan Q passant par le point $D(0,1,2)$ et parallèle au plan (ABC).
4. Déterminer l'intersection de la droite (OD) le plan (ABC).

12 Soit les deux plans P et Q d'équations

$P: 2x-y+2z-5=0$ et $Q: 2x+2y-z-4=0$.

1. Montrer que les plans P et Q sont perpendiculaires.
2. Calculer les distances du point $A(1,2,-1)$ à chacun des plans P et Q.
3. En déduire la distance de A à la droite d'intersection Δ des plans P et Q.
4. Déterminer une représentation paramétrique de Δ.
5. Déterminer les coordonnées du point M de Δ tel que la distance AM est minimale.

13 Pour tout réel m, on considère le plan P_m d'équation $(1+m)x+y-2mz-4-3m=0$.

Soit le point $A(0,3,-2)$.

1. a. Déterminer la distance de A à P_m.

b. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la distance de A à P_m est égale à $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Soit la droite $D:\begin{cases}x=1-2t\\y=3+2t,\quad t\in\mathbb{R}\\z=-1-t\end{cases}$

Montrer que pour tout m, la droite D est incluse dans P_m.

14 Soit les deux plans P et Q d'équations

$P: x+2y+2z-1=0$ et $Q: 3x-4z=0$.

1. Montrer que P et Q sont sécants.
2. Montrer que l'ensemble des points équidistants de P et Q est constitué de deux plans perpendiculaires passant par la droite d'intersection de P et Q.

15 On considère les points $A(1,2,-1)$ et $B(2,1,1)$.

1. Déterminer une équation du plan Q passant par A et perpendiculaire à la droite (AB).
2. Pour tout réel m, on considère le plan P_m d'équation $x+y+m-3=0$.

a. Montrer que la droite (AB) est parallèle au plan P_m.

b. Pour quelle valeur de m, la droite (AB) est-elle incluse dans le plan P_m ?

c. Montrer que pour tout réel m, les plans P_m et Q sont perpendiculaires.

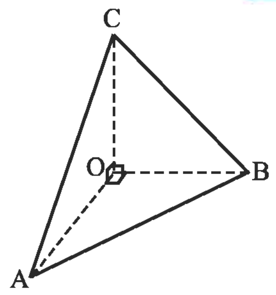
3. Soit B' et A' les projetés orthogonaux respectifs de B et A sur P_m.

Déterminer les valeurs de m pour lesquelles $ABB'A'$ est un carré.

16 Soit OABC un tétraèdre trirectangle tel que (OA), (OB) et (OC) sont deux à deux orthogonales et H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

On pose $OA=a$, $OB=b$ et $OC=c$ avec a, b et c trois réels strictement positifs.

On munit l'espace du repère $R=\left(O,\frac{1}{a}\overrightarrow{OA},\frac{1}{b}\overrightarrow{OB},\frac{1}{c}\overrightarrow{OC}\right)$.



1. a. Déterminer, à l'aide de a, b et c , une équation du plan (ABC).

b. En déduire que $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$

2. a. A l'aide d'un calcul de volume, exprimer l'aire du triangle ABC à l'aide de a, b et c.

b. Vérifier que le carré de l'aire de la face ABC est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces.

(C'est en 1738 que le mathématicien De Gua de Malves qualifia ce résultat de « généralisation du théorème de Pythagore à l'espace ».

17 Déterminer l'ensemble des points M(x, y, z).

1. $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z=0$.
2. $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+14=0$.
3. $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+16=0$.

18 Déterminer une équation de la sphère passant par $O(0,0,0)$, $A(1,1,1)$, $B(2,0,0)$ et $C(1,-2,2)$.

19 Déterminer, dans chacun des cas ci-dessous, une équation de la sphère de centre A et tangente au plan P.

$A(1,7,-1)$ et $P: x+y+z=0$.

$A(0,2,3)$ et $P: x-y+z+5=0$.

$A(5,3,1)$ et $P: 3x-2y-z+7=0$.

20 Donner une équation du plan P tangent en $A(1,4,-5)$ à la sphère de centre $I(1,3,-2)$.

21 Soit les points $A(2,0,0)$, $B(1,1,0)$ et $C(1,1,1)$.

Montrer que les plans (OAB) et (ABC) sont perpendiculaires.

Déterminer les équations des plans médiateurs des segments $[OA]$, $[OB]$ et $[OC]$.

Déterminer le centre et le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre OABC.

22 Déterminer, dans chacun des cas ci-dessous, le centre et le rayon du cercle d'intersection de la sphère S et du plan P.

1. $S: x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-13=0$ et $P: x+y+z-1=0$
2. $S: x^2+y^2+z^2-3x+5y-z=0$ et $P: x+2y+3z+5=0$.

23 Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer l'intersection de la sphère S et du plan P.

1. La sphère S est de centre O et de rayon 2 et $P: x+2y-z+1=0$.
2. $S: x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z=0$ et $P: x+y+z-1=0$.
3. $S: x^2+y^2+z^2-2x+3y-z=\frac{1}{2}$ et $P: x+2y+2z-1=0$
4. $S: x^2+y^2+z^2+2x-4y-4z+4=0$ et

$$P:\begin{cases}x=1+2\alpha-\beta\\ y=-1+\beta\\ z=1-\alpha\end{cases}\ ;\alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{R}.$$

24 Soit $A(0,1,0)$, $B(0,0,1)$ et $C(1,1,-1)$ et S la sphère de centre A et de rayon 1.

1. Déterminer l'intersection de S avec le plan (ABC).
2. Déterminer l'intersection de S avec le plan passant par A et perpendiculaire à (AC).
3. Déterminer l'intersection de S avec le plan passant par C et perpendiculaire à (AC).

25 On considère les points $A(1,-1,2)$ et $B(-1,1,-2)$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

2. Soit P le plan passant par A et perpendiculaire à (AB) et Q le plan d'équation $Q: x-y+2z+6=0$.

a. Donner une équation cartésienne de P.

b. Vérifier que le plan Q contient B et est parallèle à P.

3. On considère la sphère S tangente en B à Q et dont l'intersection avec P est le cercle de centre A et de rayon $2\sqrt{3}$.

On désigne par $I(a,b,c)$ le centre de S.

a. Montrer que I appartient à la droite (AB).

b. En déduire que $b=-a$ et $c=2a$.

c. Montrer que $IB^2-IA^2=12$ et en déduire que $a-b+2c=3$.

d. Déterminer les coordonnées de I et donner une équation cartésienne de S.

26 On considère les points $A(6,0,0)$, $B(0,6,0)$, $C(0,0,6)$ et $D(-2,-2,-2)$.

1. a. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. On note P le plan (ABC). Déterminer une équation du plan P.

c. Vérifier que la droite (OD) est perpendiculaire au plan P.

d. Donner une représentation paramétrique de (OD).

e. Soit H le projeté orthogonal de O sur P. Déterminer les coordonnées de H et montrer que H est équidistant des points A, B et C.

f. En déduire que (OD) est l'axe du cercle circonscrit au triangle ABC.

2. Soit Q le plan médiateur du segment $[CD]$.

a. Donner une équation cartésienne de Q.

b. Montrer que la droite (OD) coupe Q en un point I dont on déterminera les coordonnées.

3. Soit S la sphère de centre I et de rayon $3\sqrt{3}$.

a. Ecrire une équation cartésienne de S.

b. vérifier que les points A, B, C et D appartiennent à S.

c. Déterminer l'intersection de S et P.

27 Soit S la sphère d'équation $S: x^2+y^2+z^2+2x-2y-2=0$.

1. Déterminer le centre et le rayon de S.

2. Pour tout réel m, on considère le plan P_m d'équation $x+z+m=0$.

1. a. Montrer que l'intersection de P_0 et S est un cercle $\mathscr{C}$ dont on déterminera le centre et le rayon.

b. Montrer que $\left(O,\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}-\vec{k}),\vec{j}\right)$ est un repère orthonormé de P_0.

c. Soit M un point du plan P_0 et (X,Y) les coordonnées de M dans le repère $\left(O,\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}-\vec{k}),\vec{j}\right)$.

Déterminer X et Y à l'aide des coordonnées x, y et z du point M dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

En déduire une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(O,\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}-\vec{k}),\vec{j}\right)$.

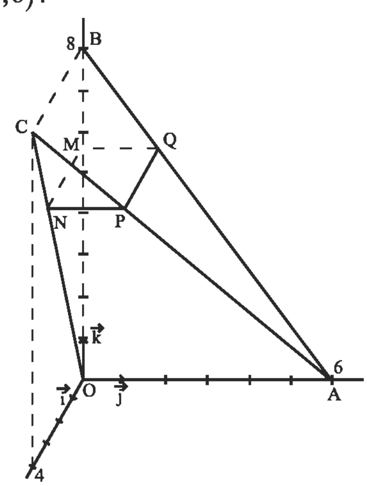
2. Etudier suivant les valeurs de m, la position relative de P_m et S.

28 On donne les points $A(0,4,-1)$, $B(-2,4,-5)$, $C(1,1,-5)$ et $D(1,0,-4)$.

1. Déterminer une équation de chacun des plans médiateurs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AD]$.

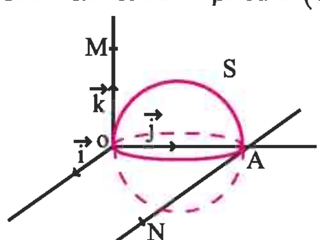
2. Montrer que ces trois plans ont un point commun I. En déduire une équation cartésienne de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

29 On considère les points $A(0,6,0)$, $B(0,0,8)$ et $C(4,0,8)$.



1. Montrer que
a. Les droites (BC) et (BA) sont orthogonales.
b. Les droites (CO) et (OA) sont orthogonales.
c. La droite (BC) est orthogonale au plan (OAB).
2. Déterminer le volume du tétraèdre OABC.
3. Montrer que les quatre points O, A, B et C se trouvent sur une sphère dont on déterminera le centre et le rayon.
4. A tout réel α de l'intervalle $]0,8[$ on associe le point $M(0,0,\alpha)$.
Le plan contenant M et orthogonal à la droite (OB) rencontre les droites (OC), (AC) et (AB) respectivement en N, P et Q.
a. Déterminer la nature du quadrilatère MNPQ.
b. La droite (PM) est-elle orthogonale à la droite (OB) ?
Pour quelle valeur de α la droite (PM) est-elle orthogonale à la droite (AC) ?
c. Déterminer MP^2 à l'aide de α. Pour quelle valeur de α la distance PM est-elle minimale ?

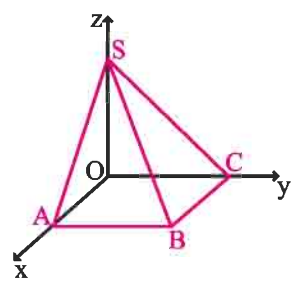
30 On désigne par S la sphère de centre $J(0,1,0)$ et de rayon 1.
Soit α et β deux réels donnés, M et N sont les points définis par $\overrightarrow{OM}=\alpha\vec{k}$ et $\overrightarrow{AN}=\beta\vec{i}$ où $A(0,2,0)$.



1. Déterminer une équation cartésienne de la sphère S.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (MN) à l'aide de α et β.
3. a. Montrer que la droite (MN) est tangente à la sphère si et seulement si $\alpha^2.\beta^2=4$.
b. Dans le cas où la droite (MN) est tangente à S, calculer les coordonnées du point de contact à l'aide de α et β.

31 Soit ABCD un tétraèdre. Le point G est le centre de gravité du triangle BCD.
Les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[CD]$.
Soit K le point tel que $5\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KD}=\vec{0}$.
Soit L le point défini par $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$.
On munit l'espace du repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$.
1. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, G, I, J, K et L.
2. Déterminer une représentation paramétrique de chacune des droites (IK), (JL) et (AG).
3. En déduire que les droites (IK), (JL) et (AG) sont concourantes.

32 Soit $\left(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OS}\right)$ un repère orthonormé de l'espace. Soit B le point de coordonnées $(1,1,0)$.
Soit P le plan d'équation $x+y=a$ où a est un réel de l'intervalle $]0,1[$.
Le but du problème est de déterminer la section du plan P avec la pyramide SOABC et le maximum de l'aire de cette section.
1. Déterminer une représentation paramétrique de chacune des droites (SA), (SB), (SC), (OC) et (OA).



2. On note I, J, K, L et M les points d'intersection respectifs du plan P avec les droites (SA), (SB), (SC), (OC) et (OA).
a. Déterminer les coordonnées des points I, J, K, L et M.
b. Vérifier que le quadrilatère IKLM est un rectangle.
c. Déterminer l'aire du pentagone IJKLM.
3. Soit f la fonction définie sur $]0,1[$ par
$f(x)=\frac{x\sqrt{2}}{4}(4-3x)$.
a. Etudier les variations de f sur $]0,1[$.
b. En déduire la position du plan P qui réalise le maximum de l'aire du pentagone IJKLM.
Vérifier qu'il s'agit d'un plan qui passe par le centre de gravité du triangle OAC.