Chapitre 2

Equations à coefficients complexes

Les nombres complexes ont de riches propriétés algébriques et analytiques. Le théorème fondamental de l'algèbre établit que tout polynôme non nul possède autant de racines complexes (comptées avec leur multiplicité) que son degré. Les nombres complexes furent inventés au 16$^{\text{ème}}$ siècle par les mathématiciens Cardan, Bombelli et Tartaglia comme intermédiaires de calcul pour trouver des solutions aux équations polynomiales du troisième degré. Il semblerait que ce soit Héron d'Alexandrie qui ait inventé le nombre impossible.

(Wikipedia)

Chapitre 2

Equations à coefficients complexes

I. Equation $z^n = a, n \geq 2, a \in \mathbb{C}^*$

Activité 1

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): u^2 = -\frac{3}{4}$.

2. En déduire les solutions de l'équation $(E'): \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}$.

On note z_1 la solution de (E') dont la partie imaginaire est positive et z_2 la solution dont la partie imaginaire est négative.
Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

3. a. Montrer que $z^3 - 1 = (z-1)\left(\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)$.

b. Déduire de la deuxième question les solutions de l'équation $(E''): z^3 = 1$.

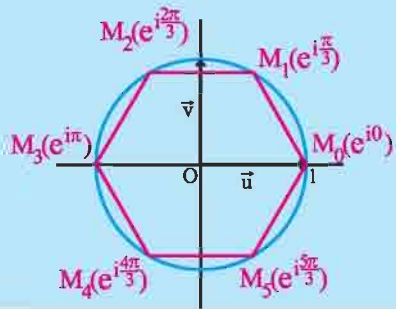
Théorème et définition

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, l'équation $z^n = 1$ admet dans $\mathbb{C}$ n solutions distinctes définies par $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, l'entier k appartenant à $\{0, 1, ..., (n-1)\}$.
Les solutions de l'équation $z^n = 1$ sont appelées racines nièmes de l'unité.

Conséquence

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Lorsque $n \geq 3$, les points images des racines nièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

Les points images des racines sixièmes de l'unité



Activité 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1. On pose $j=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

a. Vérifier que j est une racine cubique de l'unité.

b. Vérifier les égalités $j^3=1$, $j^2=\bar{j}$ et $1+j+j^2=0$.

c. Montrer que pour tout entier naturel n, $j^{3n}=1$, $j^{3n+1}=j$ et $j^{3n+2}=\bar{j}$.

Exercice résolu 1

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E):z^6=1$.

2. En déduire que la somme des solutions de (E) est nulle.

Solution

1. On sait que les solutions de (E) sont les nombres complexes

$z_0=1$, $z_1=e^{i\frac{2\pi}{6}}$, $z_2=e^{i\frac{4\pi}{6}}$, $z_3=e^{i\frac{6\pi}{6}}=-1$, $z_4=e^{i\frac{8\pi}{6}}$ et $z_5=e^{i\frac{10\pi}{6}}$.

2. Il découle de la question précédente que $z_2=z_1^2$, $z_3=z_1^3$, $z_4=z_1^4$ et $z_5=z_1^5$.

En remarquant que $z_1\neq 1$ et que $1+z_1+z_1^2+z_1^3+z_1^4+z_1^5=\dfrac{z_1^6-1}{z_1-1}$, on déduit que

$1+z_1+z_1^2+z_1^3+z_1^4+z_1^5=0$.

Activité 3

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^8=1$.

Activité 4

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E):z^3=8i$.

1. Montrer que z est une solution de (E), si et seulement si, $\dfrac{z}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}$ est une racine cubique de l'unité.

2. En déduire que l'équation (E) possède exactement trois solutions.

Vérifier que les solutions de (E) sont $z_k=2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$,

où k est un entier appartenant à $\{0, 1, 2\}$.

Théorème et définition

Soit a un nombre complexe non nul d'argument θ et un entier naturel $n \geq 2$.

L'équation $z^n = a$ admet dans $\mathbb{C}$, n solutions distinctes définies par

$z_k = r\, e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, où r est le réel strictement positif tel que $r^n = |a|$.

Ces solutions sont appelées les racines nièmes du nombre complexe a.

Démonstration

Posons $a = |a|\, e^{i\theta}$.

Considérons le réel $r > 0$ tel que $r^n = |a|$. On peut alors écrire $a = r^n \left(e^{i\frac{\theta}{n}}\right)^n$.

Il en résulte que l'équation $z^n = a$ est équivalente à l'équation $\left(\dfrac{z}{re^{i\frac{\theta}{n}}}\right)^n = 1$.

On en déduit que z est solution de l'équation $z^n = a$, si et seulement si, $\dfrac{z}{re^{i\frac{\theta}{n}}}$ est une racine nième de l'unité.

Par conséquent, l'équation $z^n = a$ admet exactement n solutions complexes de la forme

$z_k = re^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, où r est le réel tel que $r^n = |a|$.

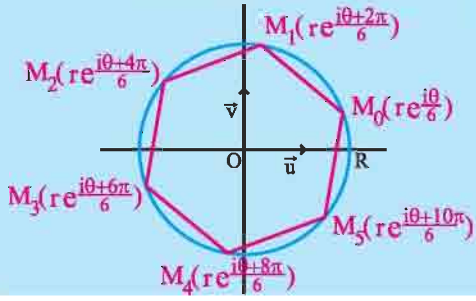
Conséquences

- Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées.

- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Lorsque $n \geq 3$, les points images des racines nièmes d'un nombre complexe non nul sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon r tel que $r^n = |a|$.

Les points images des solutions de l'équation $z^6 = |a|e^{i\theta}$



Activité 5

Déterminer les racines carrées, puis les racines quatrièmes du nombre complexe $u=-4i$.

Activité 6

Soit le nombre complexe $z=\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)}+i\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)}$.

1. Déterminer le module et un argument de z^2.
2. En déduire une écriture trigonométrique de z.

II. Résolution dans $\mathbb{C}$, de l'équation $az^2+bz+c=0,\ a\neq 0$

Activité 1 (Recherche des racines carrées d'un nombre complexe par une méthode algébrique)

Soit le nombre complexe $d=3-4i$.
On se propose de déterminer les racines carrées de d.
Remarquons d'abord que la recherche d'un argument du nombre complexe d ne conduit pas à un angle "remarquable".
Déterminons alors, sous forme algébrique, les solutions de l'équation $z^2=d$.
On pose $z=x+iy$ avec x et y deux nombres réels.

1. Montrer que l'équation $z^2=d$ équivaut à $\begin{cases} x^2-y^2=3, \\ 2xy=-4, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$
2. Vérifier que les couples (x,y) solutions de ce système sont $(2,-1)$ et $(-2,1)$.
3. Conclure.

Activité 2

Déterminer les racines carrées de $-8+6i$ et $1-2\sqrt{2}i$.

Activité 3

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2+2iz-\frac{7}{4}-i=0$.

1. Montrer que $z^2+2iz-\frac{7}{4}-i=0$, si et seulement si, $(z+i)^2=\frac{3+4i}{4}$.
2. Vérifier que $\left(\frac{2+i}{2}\right)^2=\frac{3+4i}{4}$.
3. En déduire les solutions de l'équation (E).

Activité 4

Soit a, b et c des nombres complexes tels que $a \neq 0$.

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E): az^2 + bz + c = 0$.

1. Montrer que l'équation $az^2 + bz + c = 0$ est équivalente à l'équation $\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

2. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

a. Montrer que si $\Delta = 0$, alors l'équation (E) admet une unique solution que l'on déterminera.

b. On suppose que $\Delta \neq 0$.

Dans ce cas, le nombre complexe Δ admet deux racines carrées opposées δ et $-\delta$.

Montrer que l'équation $az^2 + bz + c = 0$ est équivalente à l'équation

$\left(z + \frac{b - \delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b + \delta}{2a}\right) = 0$.

En déduire les solutions de (E).

Cette activité nous permet d'énoncer le théorème suivant.

Théorème

Soit a, b et c des nombres complexes tels que $a \neq 0$.
L'équation $az^2 + bz + c = 0$, admet dans $\mathbb{C}$, deux solutions (éventuellement confondues) définies par $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$, où δ est une racine carrée du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Conséquences

Si z_1 et z_2 sont les solutions de $az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$, alors

$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$, $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

Activité 5

Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations ci-dessous.

a. $z^2 - (1 - i)z + 2 - 2i = 0$.

b. $1 + z + z^2 = 0$.

c. $1 - z + z^2 = 0$.

Activité 6

Déterminer les nombres complexes z_1 et z_2 vérifiant $\begin{cases} z_1 + z_2 = 1 + 2i, \\ z_1 z_2 = -1 + i. \end{cases}$

III. Exemples d'équations de degré supérieur ou égal à 3

Activité 1

Soit $a_1, a_2, ..., a_n$ des nombres complexes tels que $a_n \neq 0,\ n \geq 2$.

Soit $f : z \mapsto a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$.

Soit (E) l'équation $f(z) = 0$.

1. Montrer que si z_0 est une solution de (E), alors $f(z) = 0$, si et seulement si,

$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z = a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + ... + a_1 z_0$.

2. En déduire que si z_0 est une solution de (E), alors (E) est équivalente à l'équation $(z - z_0) g(z) = 0$, où g(z) est de la forme $a_n z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + ... + b_0$, avec b_{n-2}, ..., b_0 des nombres complexes.

Théorème

Soit $a_1, a_2, ..., a_n$ des nombres complexes tels que $a_n \neq 0,\ n \geq 2$.

Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$.

Si z_0 est un zéro de P, alors $P(z) = (z - z_0) g(z)$, où $g(z)$ est de la forme $a_n z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + ... + b_0$, avec $b_0, b_1, ..., b_{n-2}$ complexes.

Exercice résolu 2

On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E) : z^3 + (1 - 4i) z^2 - (7 + 3i) z + 6i - 2 = 0$.

1. Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire et la déterminer.
2. Résoudre l'équation (E).

Solution

1. Posons $z_0 = iy$ avec y réel.

z_0 est solution de (E), si et seulement si, $(iy)^3 + (1 - 4i)(iy)^2 - (7 + 3i) iy + 6i - 2 = 0$,

ou encore $-y^2 + 3y - 2 + i\left(-y^3 + 4y^2 - 7y + 6\right) = 0$.

On en déduit que z_0 est solution de (E), si et seulement si, $\begin{cases} -y^2 + 3y - 2 = 0 \ (*), \\ -y^3 + 4y^2 - 7y + 6 = 0 \ \ (**). \end{cases}$

L'équation $(*)$ admet deux solutions réelles qui sont 1 et 2. Seul le réel 2 vérifie l'équation$(**)$. Il en résulte que le réel 2 est l'unique solution du système précédent.

On en déduit que $z_0 = 2i$ est l'unique solution imaginaire de (E).

Il suit que $z^3+(1-4i)z^2-(7+3i)z+6i-2=(z-2i)(z^2+bz+c)$, avec b et c des nombres complexes.

Un développement et une identification terme à terme nous donnent $b=1-2i$ et $c\ =-3-i$.

L'équation (E) s'écrit alors $(z-2i)(z^2+(1-2i)z+-3-i)=0$,

ce qui équivaut à $z=2i$ ou $z^2+(1-2i)z-3-i=0$.

Les solutions de l'équation $(E_1): z^2+(1-2i)z-3-i=0$ sont $z_1=-2+i$ et $z_2=1+i$.

Il en résulte que l'équation (E) a pour ensemble de solutions $S=\{2i,\ -2+i,\ 1+i\}$.

Activité 2

Soit $f(z)=z^3+(2+2i)z^2+(2+i)z+3+i$, où $z\in\mathbb{C}$.

1. Vérifier que $f(i)=0$.
2. En déduire les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $f(z)=0$.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. L'équation $z^2+z+1=0$ a deux solutions
 - [ ] opposées.
 - [ ] conjuguées.
 - [ ] confondues.

2. L'équation $z^2-2z+2=0$ a pour solutions
 - [ ] $z_1=1-i$ et $z_2=1+i$.
 - [ ] $z_1=2i$ et $z_2=-i$.
 - [ ] $z_1=1-i$ et $z_2=2+i$.

3. L'équation $z^3-z^2+z-1=0$ admet
 - [ ] une seule solution réelle.
 - [ ] deux solutions réelles.
 - [ ] trois solutions réelles.

4. L'équation $z^4=-1$ admet
 - [ ] une solution réelle.
 - [ ] une solution imaginaire.
 - [ ] quatre solutions distinctes.

5. Le nombre $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ est une racine carrée de
 - [ ] $4i$.
 - [ ] $-4i$.
 - [ ] $2\sqrt{2}i$.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. L'équation $z^2=-3$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{C}$.
2. L'équation $z^4=z^2$ est équivalente à l'équation $z^2=1$.
3. Le nombre 0 est l'unique solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^4+z^2=0$.
4. Une équation du second degré dans $\mathbb{C}$ admet toujours deux racines opposées.
5. Soit z et a deux nombres complexes non nuls.

   $z^4=a^4$, si et seulement si, $z=a$ ou $z=-a$.
6. Soit z un nombre complexe. Si $z^3=i$ alors nécessairement z est imaginaire.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1 Déterminer les racines cubiques de $4\sqrt{2}(i+1)$.

2 Déterminer les racines quatrièmes de $8\sqrt{2}(-1-i)$.

3 Déterminer les racines cinquièmes de $32\,i$.

4 Déterminer les racines sixièmes de $32(i-\sqrt{3})$.

5 Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes.

$z^2=2i$; $z^2+4=0$; $z^2=-5+12i$; $z^2=e^{i\frac{\pi}{3}}$;
$z^2+i=0$; $(1-iz)^2=-1$, $(2z-1)^2-(i-z)^2=0$.

6 Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes.

1. $z^2+z+2=0$.
2. $z^2-2iz-1=0$.
3. $z^2-(4+2i)z+2+4i=0$.
4. $(2+i)z^2+(1-7i)z-5=0$.

7 Soit α un nombre complexe non nul.

1. Développer $(\alpha-i)^2$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2-\alpha(\alpha+i)z+i\alpha^3=0$.
3. On note r le module de α et θ un argument de α. Calculer en fonction de r et de θ le module et un argument de chacune des solutions de (E).

8 1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$E: z^2-(3+i)z+2(1+i)=0$.

b. Donner les solutions sous forme algébrique et trigonométrique.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E'): X^4-(3+i)X^2+2(1+i)=0$.

9 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$(E): z^4+az^2+b+12i=0$, où a et b sont deux nombres réels.

1. Déterminer les réels a et b sachant que $\sqrt{2}(1+i)$ est une solution de E.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation ainsi obtenue.

10 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$(E): z^2+(1+i)z+i=0$.

2. En déduire les solutions des équations ci-dessous.

a. $iz^2+(1-i)z-1=0$.

b. $z^4+(1+i)z^2+i=0$.

11 Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations ci-dessous.

1. $z^4+6z^2+25=0$.
2. $z^4+4z^2-77=0$.
3. $z^5=\bar{z}$.

12 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$(E): z^3-8z^2+24z-32=0$.

1. Vérifier que $z_0=4$ est une solution de (E).
2. Résoudre (E).
3. Déterminer la forme exponentielle des solutions.

13 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$(E): z^3-(3+4i)z^2-4(1-3i)z+12=0$

1. Montrer que l'équation admet une racine réelle que l'on déterminera.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

14 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$(E): z^3 = 2+11i$.

1. Vérifier que $z_0 = 2+i$ est une solution de (E).
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

15 1. On considère les nombres complexes

$\alpha = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $\beta = \frac{3+i\sqrt{3}}{2}$.

Ecrire α et β sous forme exponentielle.

2. Soit θ un réel de $]0,\pi[$.

a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 1 - e^{2i\theta} = 0$.
On désigne par z_1 la solution ayant une partie imaginaire négative et par z_2 l'autre solution.
b. Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
c. Déterminer θ pour que l'on ait $z_1 = \alpha$ et $z_2 = \beta$.

16 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$(E): z^2 + (1-2i)z - 2i = 0$.

Soit θ un réel. On considère. l'équation
$E_\theta : z^2 + \left(1-2e^{i\theta}\right)z - 2e^{i\theta} = 0$.

On désigne par z_1 la solution indépendante de θ et par z_2 l'autre solution.
On considère les points A et M d'affixes respectives z_1 et z_2.
Soit I le milieu de $[AM]$ et z_I l'affixe de I.

1. Vérifier que pour tout réel θ, $z_I + 0.5 = e^{i\theta}$.
2. Déterminer l'ensemble des points I lorsque θ varie dans $[0,2\pi[$.
3. Déterminer les valeurs de θ de $[0,2\pi[$ pour lesquelles les points O,A et I sont alignés.

17 Soit a un nombre complexe non nul et l'équation $z^2 - 2z + 1 + a^2 = 0$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation.
2. On considère les points A et B d'affixes respectives $1+ia$ et $1-ia$.
On pose $a = a_1 + ia_2$, où a_1 et a_2 sont des réels.

a. Montrer que les points O, A et B sont alignés, si et seulement si, $a_1 = 0$.

b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux, si et seulement si, $|a| = 1$.

3. On suppose que $a = e^{i\alpha}$, où $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

a. Vérifier que pour tout réel x, $1 + e^{ix} = 2\cos\frac{x}{2}e^{i\frac{x}{2}}$ et $1 - e^{ix} = -2i\sin\frac{x}{2}e^{i\frac{x}{2}}$.
b. En déduire l'écriture sous forme exponentielle de chacun des nombres
Complexes $1+ia$ et $1-ia$.
c. Déterminer a pour que le triangle OAB soit rectangle isocèle en O.

18 Pour tout nombre complexe non nul z, on pose

$w = z + \frac{4}{z}$.

Soit θ un réel.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z + \frac{4}{z} = 4\cos\theta$.
2. Ecrire les solutions trouvées sous forme exponentielle.
3. A tout nombre complexe z, on associe le point M d'affixe z.
Déterminer et construire l'ensemble E des points M tels que w soit réel.
4. Soit A, B et C les points d'affixes respectives $2e^{i\theta}$; $4\cos\theta$ et $2e^{-i\theta}$, où θ est un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

a. Placer, pour $\theta = \frac{\pi}{6}$, les points A, B et C.

b. Vérifier que pour tout θ de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, les points A, B et C appartiennent à l'ensemble E.

c. Montrer que pour tout réel θ de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, OABC est un losange.
d. Pour quelle valeur de θ le quadrilatère OABC est un carré ?

19 Soit θ un réel de $[0, 2\pi[$.

1. a. Vérifier que $\left(e^{i\theta}-i\right)^2=-1+e^{2i\theta}-2ie^{i\theta}$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$z^2-2iz+2ie^{i\theta}-e^{2i\theta}=0$.

2. On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $e^{i\theta}$ et $2i-e^{i\theta}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct.
a. Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{C}_1$ décrit par le point M_1 lorsque θ varie dans $[0, 2\pi[$.

b. Calculer l'affixe du milieu I du segment $\left[M_1M_2\right]$.

c. Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{C}_2$ décrit par le point M_2 lorsque θ varie dans $[0, 2\pi[$.

3. a. Montrer que $\left(M_1M_2\right)^2=8(1-\sin\theta)$.

b. Déduire la valeur de θ pour laquelle M_1M_2 est maximale.

20 I. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$z^2+i\sqrt{3}z-i=0$.

II. Soit θ un réel de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation
$(E): z^2+(2i\sin\theta)z-2i\cos\theta=0$.

1. a. Vérifier que $(\cos\theta+i)^2=-\sin^2\theta+2i\cos\theta$.

b. Résoudre l'équation (E).

2. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $a=i$, $b=\cos\theta+(1-\sin\theta)i$ et $c=-\cos\theta-(1+\sin\theta)i$.
a. Déterminer θ pour que A, B et C soient alignés.
b. Déterminer θ pour que B et C appartiennent à un cercle de centre O.
Quel est le rayon de ce cercle ?

21 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$(E): z^2-2(1+i)z+\frac{1}{2}+i=0$.

2. Soit θ un réel de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. On considère l'équation

$E_\theta: 2z^2-(1+2\cos\theta+2i)z+\cos\theta+i=0$.

a. Montrer que l'équation E_θ admet une racine réelle que l'on calculera.
Calculer l'autre racine en fonction de θ.
On considère les points A et M d'affixes respectives $\frac{1}{2}$ et $\cos\theta+i$.

b. Déterminer et construire l'ensemble E des points M lorsque θ varie dans l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

c. Calculer AM en fonction de θ et en déduire la valeur de θ pour laquelle la distance AM est minimale.

22 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous.

$z^4=1$ et $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^4=1$.

23 1. Déterminer, sous forme trigonométrique, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation
$(E): z^3=4\sqrt{2}(-1+i)$.
2. En utilisant les racines cubiques de l'unité, écrire les solutions de (E) sous forme algébrique.
3. Déduire des questions précédentes les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

24 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6=-1$.

Mettre le polynôme x^6+1 sous la forme d'un produit de trois polynômes du second degré à coefficients réels.