Chapitre 6

Variables aléatoires

Né en 1777 dans le duché de Brunswick (Allemagne), Carl Friedrich Gauss fut un véritable génie des mathématiques. Entre autres découvertes, on lui doit une constatation très simple. Dans une population donnée (les salariés d'une entreprise, des haricots dans un sac, etc.), si on classe les individus selon une caractéristique (leur taille, leur poids, leur QI, leur niveau de compétence), on s'aperçoit que, plus on s'approche de la moyenne sur le critère considéré, et plus il y a d'individus. Plus on s'en éloigne, et moins il y en a. Aux deux extrémités, il n'y a presque personne. La représentation graphique de cette réalité s'appelle une courbe de Gauss et prend la forme d'une cloche.

Chapitre 6

Variables aléatoires

A. Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini

I. Définition et propiétés

Activité 1

Une urne contient deux boules numérotées 4 et trois boules numérotées -2, indiscernables au toucher. On tire simultanément deux boules de l'urne.

1. a. Quelle est la probabilité de tirer deux boules numérotées 4 ?
   b. Quelle est la probabilité de tirer deux boules portant des numéros différents ?
   c. Quelle est la probabilité de tirer deux boules portant le même numéro ?
2. On note X l'application qui à tout événement élémentaire associe la somme des numéros des deux boules tirées. Quelles sont les différentes valeurs prises par X ?

Définition

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini.

On appelle aléa numérique ou variable aléatoire toute application $X: E \to \mathbb{R}$.

Notation

L'événement $\{a \in E \ ; \ X(a) = x_i\}$ est noté $(X = x_i)$.

L'ensemble $X(E)$ désigne l'ensemble des valeurs prises par X.

Activité 2

On lance une pièce de monnaie bien équilibrée trois fois de suite.

1. Déterminer l'ensemble de toutes les issues possibles.
2. On note X la variable aléatoire qui à chaque événement élémentaire associe le nombre de côtés « face » obtenus.
   a. Quelle est la probabilité de l'événement $(X = 0)$?
   b. Quelle est la probabilité de l'événement $(X = 1)$?
   c. Quelle est la probabilité de l'événement $(X = 2)$?
   d. Quelle est la probabilité de l'événement $(X = 3)$?

Définition

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire.

On appelle loi de probabilité de X ou distribution de X, l'application

$$P_X : X(E) \to [0,1]$$

$$x_i \mapsto p(X = x_i).$$

Conséquences

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini. Si X est une variable aléatoire sur E telle que $X(E)=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, alors $\sum_{i=1}^{n} p(X=x_i)=1$.

Démonstration

Les parties $(X=x_1)$, $(X=x_2)$,... et $(X=x_n)$ forment une partition de E.

On en déduit que $\sum_{i=1}^{n} p(X=x_i)=p(E)=1$.

Exercice résolu 1

Une entreprise organise un concours pour recruter un cadre. Trois candidats se présentent dans l'ordre. Chacun d'eux passe un test et le premier qui y satisfait est engagé.
La probabilité qu'a un candidat de réussir le test est p.
On définit la variable aléatoire X de la manière suivante :
$X=j$ si le $j^{\text{ème}}$ candidat qui se présente est engagé et $X=4$ si aucun candidat n'est engagé.
Déterminer la loi de X.

Solution

Dire que $X=1$, c'est dire que le premier candidat a été recruté. Donc $p(X=1)=p$.

Dire que $X=2$, c'est dire que le premier candidat n'a pas été recruté et le deuxième candidat a été recruté. Donc $p(X=2)=(1-p)p$.

Dire que $X=3$, c'est dire que les deux premiers candidats n'ont pas été recrutés et le troisième candidat a été recruté. Donc $p(X=3)=(1-p)^2 p$.

Dire que $X=4$, c'est dire que les trois candidats n'ont pas été recrutés.
Donc $p(X=4)=(1-p)^3$.

Remarquons aussi que $p+(1-p)p+(1-p)^2 p+(1-p)^3=1$.

II. Espérance et variance d'une variable aléatoire

Définition

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur E telle que $X(E)=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

On appelle espérance mathématique ou moyenne de X le nombre $E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

Activité 1

On lance un dé de six faces numérotées de 1 à 6 et on désigne par X l'aléa numérique qui à chaque lancer associe le numéro obtenu et par Y l'aléa qui à chaque lancer associe 1 si le numéro obtenu est pair et -1 si le numéro obtenu est impair.
Calculer $E(X)$, $E(-3X)$, $E(Y)$ et $E(X+Y)$.

Théorème

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini, X et Y deux variables aléatoires sur E.

- Pour tout réel α, $E(\alpha X)=\alpha E(X)$.
- $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

Définition

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur E.

On appelle variance de X le nombre $V(X) = E\left(\left(X-E(X)\right)^2\right)$.

On appelle écart-type de X le nombre $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

Propriété

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini.

Si X est une variable aléatoire sur E alors $V(X)=E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2$.

Activité 2

Un marchand de glaces propose 5 parfums au choix.
Trois personnes choisissent, au hasard et indépendamment, un des parfums proposés.

1. a. Calculer la probabilité de l'événement « les trois personnes choisissent des parfums deux à deux différents ».
   b. Calculer la probabilité de l'événement « les trois personnes choisissent le même parfum».
2. On note X la variable aléatoire qui à chaque événement élémentaire associe le nombre de parfums choisis par les trois personnes.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance et l'écart-type de X.

Activité 3

Une enveloppe contient les douze figures d'un jeu de carte : les quatre rois, les quatre dames et les quatre valets.

1. On tire, simultanément et au hasard, cinq cartes de l'enveloppe.
   Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de rois obtenus.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer son espérance et son écart-type.
2. On tire, successivement et au hasard, cinq cartes de l'enveloppe en remettant chaque fois la carte dans l'enveloppe.

Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de rois obtenus.

a. Déterminer la loi de probabilité de Y.

b. Calculer son espérance et son écart-type.

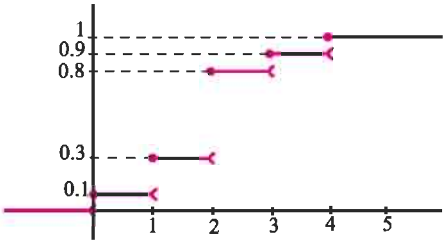
3. Comparer les résultats des questions 1.b et 2. b. Interpréter.

III. Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Activité 1

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur E.
On a représenté ci-contre la fonction

$$F: \mathbb{R} \to [0,1]$$
$$x \mapsto p(X \le x),$$



où $(X \le x)$ désigne l'ensemble $\{a \in E ; X(a) \le x\}$.

Déterminer graphiquement

1. les valeurs prises par X,
2. $p(X \le -1)$, $p(X \le 1.3)$, $p\left(X \le \frac{11}{3}\right)$, $p(X \le 1)$, $p(X < 2)$, $p(X = 2)$, $p(1 \le X \le 6)$,
3. la loi de probabilité de X.

Activité 2

Une pièce de monnaie est truquée de sorte que la probabilité d'obtenir pile est égale à 0.6.
On lance la pièce trois fois et on note X la variable aléatoire associant à cette épreuve le nombre de piles obtenus.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. On considère l'application $F: \mathbb{R} \to [0,1]$
$$x \mapsto p(X \le x).$$

Déterminer l'expression de F et la représenter.

Définition

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur E.
On appelle fonction de répartition de X, l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ par $F: x \mapsto p(X \le x)$.

Activité 3

Trois urnes contiennent chacune des jetons numérotés de 1 à 6. On tire au hasard un jeton de chaque urne, et on note X la variable aléatoire associant à chaque tirage le plus grand des numéros tirés.

1. Soit k un entier inférieur ou égal à 6.
   a. Dans chaque urne, quelle est la probabilité de tirer un numéro inférieur ou égal à k ?
   b. En déduire $p(X \leq k)$.
2. Déterminer la fonction de répartition de X et tracer sa courbe.
3. Déterminer la loi de probabilité de X.

IV. Loi binomiale

Activité 1

La probabilité qu'un joueur de fléchettes atteigne sa cible est égale à 0.9.

1. On suppose que le joueur effectue deux tirs et on note X la variable aléatoire associant à cette épreuve le nombre de succès réalisés.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Déterminer la probabilité de l'événement « le joueur atteint au moins une fois sa cible ».
2. On suppose que le joueur effectue dix tirs et on note Y la variable aléatoire associant à cette épreuve le nombre de succès réalisés.
   a. Calculer la probabilité des événements suivants « le joueur réalise neuf succès », « le joueur réalise au moins un succès ».
   b. Déterminer la loi de probabilité de Y.

Théorème et définition

Soit E une expérience aléatoire constituée de n épreuves identiques, indépendantes et n'ayant que deux issues : succès ou échec.
Soit p la probabilité de l'événement succès.
On considère la variable aléatoire X associant à cette expérience le nombre de succès réalisés au cours des n épreuves.
Alors la loi de probabilité de X est donnée par :

$p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

On dit que X suit une loi binômiale de paramètre (n, p).

Notation et vocabulaire

La loi binomiale de paramètre (n, p) est notée $B(n, p)$.

Lorsque $n = 1$, on dit que X suit une loi de Bernoulli.

Activité 2

Un mobile se déplace sur un axe $(O, \vec{i})$.

A l'instant $t = 0$, il est au point O, à chaque seconde, son abscisse augmente de 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ ou diminue de 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

1. A l'instant $t = 2$
   a. Quelle est la probabilité qu'il soit au point d'abscisse 2 ?
   b. Quelle est la probabilité qu'il soit au point O ?

2. A l'instant $t = n$
   a. Quelle est la probabilité qu'il soit au point d'abscisse n ?
   b. Quelle est la probabilité qu'il soit au point d'abscisse $-n$?

Activité 3

On lance n fois $(n \geq 1)$ un dé. On note A l'événement « obtenir au moins un 6 ».

1. Calculer $p(A)$ pour $n = 3$.
2. Exprimer $p(A)$ en fonction de n.
3. Combien de fois au moins faut-il lancer le dé pour que la probabilité de A soit supérieure ou égale à 0.9 ?

Espérance et variance

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale B(n, p). Alors
$E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

B/ Exemples de lois continues

I. La loi uniforme

Activité 1

1. a. Soit l'intervalle $I = [-1,1]$. Quelle est son amplitude ?

   b. Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = \dfrac{1}{2}$.

   Calculer $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

   c. Montrer que pour tout intervalle $[c,d]$ de $[-1,1]$, $0 \leq \int_{c}^{d} f(x)dx \leq 1$.

2. Soit f une fonction constante sur un intervalle $[a,b]$.

   a. Quelle valeur doit-on donner à f pour que $\int_{a}^{b} f(x)dx = 1$?

   b. Montrer que dans ce cas que $0 \leq \int_{c}^{d} f(x)dx \leq 1$, pour tout intervalle $[c,d]$ de $[a,b]$.

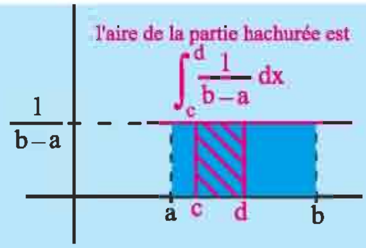
Définition

Soit un intervalle $[a,b]$ $(a < b)$. La fonction f définie sur $[a,b]$ par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ est appelée densité de la loi de probabilité uniforme sur $[a,b]$.
On appelle probabilité uniforme sur $[a,b]$ l'application qui à tout intervalle $[c, d]$ inclus dans $[a,b]$ associe le réel $P([c,d]) = \int_{c}^{d} f(x)dx$.

Conséquences

Pour tout réel c de $[a,b]$, $P(\{c\})=\int_c^c f(x)\,dx=0$.

Si on désigne par $\overline{[c,d]}$ le complémentaire de $[c,d]$ dans $[a,b]$, alors $P\left(\overline{[c,d]}\right)=1-P([c,d])$.



Activité 2

Un joueur lance une fléchette sur une cible circulaire de rayon 30 cm.
Le joueur n'est pas expérimenté de sorte qu'il atteint aléatoirement la cible.
On désigne par d la distance entre le centre de la cible et le point d'impact.

1. Quelles sont les valeurs possibles de d ?
2. On partage l'intervalle $[0,30]$ en 10 intervalles de même amplitude.
   a. Quelle est l'amplitude de ces intervalles ?
   b. Le réel d a-t-il plus de chances d'appartenir à un intervalle plutôt qu'à un autre ?
   c. Quelle est selon vous la probabilité que d appartienne à l'intervalle $[0,30]$? $[4,5]$? $[9,10]$?

Dans l'activité précédente le réel d varie de façon aléatoire dans l'intervalle $[0,30]$, mais de façon équirépartie.
On dit alors que d est une variable aléatoire à valeurs dans $[0,30]$.

Définition

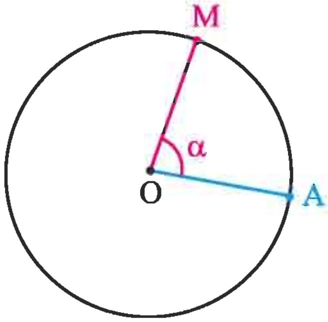
On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans un intervalle $[a,b]$ suit la loi de probabilité uniforme P si $P(c\le X\le d)=\frac{d-c}{b-a}$.

Activité 3

On considère un mobile M qui se déplace sur un cercle de centre O à partir d'un point A et qui s'arrête d'une manière aléatoire.
On mesure alors l'angle α que fait $[OA)$ avec $[OM)$.

Soit P la probabilité uniforme sur $[0,2\pi]$.

Calculer $P\left(\frac{\pi}{4}\le X\le \pi\right)$, $P\left(\frac{\pi}{4}\le X\le 3\frac{\pi}{2}\right)$ et $P(0\le X\le \pi)$.



Activité 4

On suppose que la durée (en minutes) du trajet qui sépare un employé de son travail est une variable aléatoire X à valeurs dans l' intervalle $[30,50]$ qui suit la loi de probabilité uniforme P.

1. Calculer $P(30 \le X \le 40)$ et $P(30 \le X \le 43)$.
2. On considère l'application $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 30 \\ P(30 \le X \le x) & \text{si } x \in [30,50] \\ 1 & \text{si } x > 50 \end{cases}$$

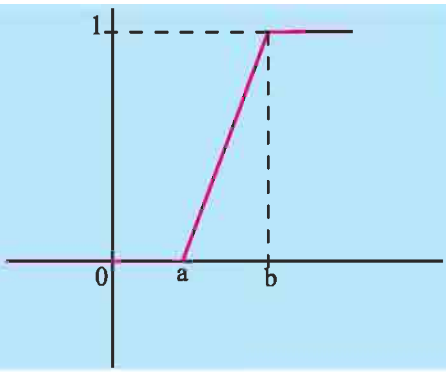
Déterminer l'expression de F et la représenter.

Définition

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité uniforme P sur l'intervalle $[a,b]$.

On appelle fonction de répartition de X, l'application $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ P(a \le X \le x) & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$



II. La loi exponentielle

Activité 1

1. Soit λ un réel strictement positif et f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

   a. Calculer $\int_0^x f(t)dt$ et $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)dt$.

   b. Montrer que pour tout intervalle $[c,d]$ de $[0,+\infty[$, $0 \le \int_c^d f(x)dx \le 1$.

Définition

Soit λ un réel strictement positif. La fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ est appelée densité de loi exponentielle.

On appelle loi de probabilité exponentielle de paramètre λ, l'application P qui

- à tout intervalle $[c, d]$ inclus dans $[0,+\infty[$ associe le réel $P([c, d]) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x} dx$,
- à tout intervalle $[c,+\infty[$ inclus dans $[0,+\infty[$ associe le réel $P([c,+\infty[) = e^{-\lambda c}$.

Conséquences

1. Pour tout réel $c > 0$, $P(\{c\}) = \int_c^c f(x)dx = 0$.
2. Pour tout réel $c > 0$, $P([0,c]) = \int_0^c f(x)dx = 1 - e^{-\lambda c}$.
3. $P([c,+\infty[) = 1 - P([0,c])$.

Activité 2

On s'intéresse à la durée de vie t (en semaines) d'un appareil électronique.
On suppose que la probabilité que l'appareil soit encore fonctionnel au bout d'un temps t est une loi de probabilité exponentielle de paramètre 0.5.
Quelle est la probabilité que la durée de vie soit entre 100 et 200 semaines ?

Dans l'activité précédente le réel t varie de façon aléatoire mais selon une loi appelée loi exponentielle. On dit alors que t est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0.5.

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ,
si $P(c \le X \le d) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x}dx = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$ et $P(X \ge c) = e^{-\lambda c}$.

Activité 3

Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Déterminer λ sachant que $P(X \ge 10) = 0.5$
2. Déterminer alors $P(0 \le X \le 10)$, $P(100 \le X \le 300)$ et $P(X \ge 300)$.
3. On considère l'application $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par

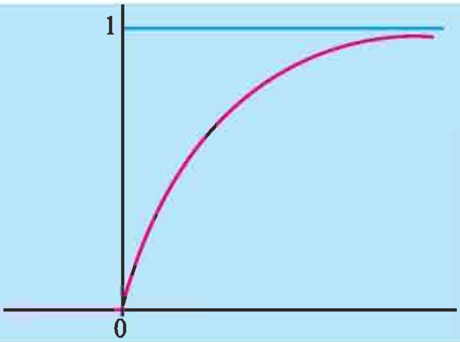
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ P(0 \le X \le x) & \text{si } x \in [0,+\infty[\end{cases}$$

   a. Déterminer l'expression de F.
   b. Calculer $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.
   c. Représenter F.

Définition

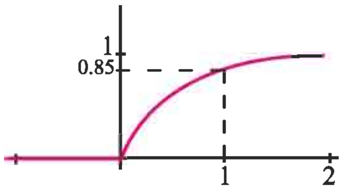
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité exponentielle P de paramètre λ.
On appelle fonction de répartition de X, l'application $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ P(0\leq X\leq x) & \text{si } x\in[0,+\infty[\end{cases}$$



Activité 4

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité exponentielle P de paramètre λ.
Dans la figure ci-contre on a représenté la fonction de répartition de X.



1. Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près du paramètre λ.
2. Calculer $p(X\geq 2)$.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètre 3 et $\frac{1}{3}$.

   a. La probabilité de l'événement $X > 2$ est

   □ $\left(\frac{1}{3}\right)^3$.   □ $\left(\frac{2}{3}\right)^3$.   □ $C_3^2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2$.

   b. L'espérance de X est égale à

   □ 1.   □ $\frac{2}{3}$.   □ $\frac{1}{3}$.

   c. Si F est la fonction de répartition de X alors $F(1)$ est égal à

   □ $\frac{7}{27}$.   □ $\frac{20}{27}$.   □ $\frac{6}{27}$.

2. Si X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0.1 alors l'arrondi au centième de $p(X > 10)$ est

   □ 0.63.   □ 0.37.   □ 0.91.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Dans une expérience aléatoire, la probabilité d'un événement A est égale à 0.2.

   On répète huit fois cette expérience de façon indépendante.

   La probabilité que l'événement A se réalise au moins une fois est égale à $1-(0.8)^8$.

2. Les situations de tirages sans remise obéissent à une loi binomiale.
3. La probabilité de choisir au hasard un réel entre 0 et 0.0000001 est égale à 0.
4. Si X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle

   alors $p(0 \leq X \leq 2) = p(0 < X \leq 2)$.

5. Le tableau ci-dessous décrit la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

x_i	-1	0	1
p_i	0.25	0.5	0.25

   a. L'espérance de X est nulle.

   b. La variance de X est nulle.

1 Le programme d'une épreuve d'examen comporte 100 questions. Un candidat n'en étudie que 80. Lors d'un examen, le candidat tire au sort trois questions, quelle est la probabilité qu'il ait étudiée
1. les trois questions proposées,
2. deux questions seulement,
3. une seule question,
4. aucune des trois,
5. au moins une des trois.

2 Deux joueurs X et Y s'entraînent au tir à la cible. Le joueur X est expérimenté et atteint sa cible 9 fois sur 10 et le joueur Y est débutant et atteint sa cible 4 fois sur 10.
X laisse Y s'entraîner et n'effectue qu'un tir sur trois.
Un des joueurs tire et la cible est atteinte.
Quelle est la probabilité que ce soit Y ?

3 Un dé cubique a trois faces portant le numéro 1, deux faces portant le numéro 2 et une face portant le numéro 3.
On lance le dé deux fois et on désigne par X la variable aléatoire qui donne la somme des nombres obtenus.
1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
3. Déterminer la fonction de répartition F de X et tracer sa courbe.

4 Un sac contient 10 jetons dont quatre sont rouges et six sont blancs.
On extrait les jetons un à un sans remise.
Soit X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier jeton rouge.
Trouver la loi de X, son espérance et sa variance.

5 On lance deux dés identiques bien équilibrés.
On note X la variable aléatoire égale au plus grand des nombres obtenus et Y la variable aléatoire égale au plus petit des nombres obtenus.
1. Déterminer les lois de X et Y.
2. Calculer l'espérance de X et celle de Y, ainsi que leurs variances.

6 Un standardiste répond à 90% des appels.
On appelle 10 fois le standard.
1. Quelle est la probabilité que le standardiste réponde aux 10 appels ?
2. Quelle est la probabilité que le standardiste réponde seulement à cinq appels ?
3. Quelle est la probabilité que le standardiste réponde à au moins un appel ?

7 On jette 20 fois une pièce de monnaie.
1. Déterminer le nombre moyen de faces obtenues.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre de faces égal à 10.
3. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre de faces compris entre 9 et 11.
4. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre de faces compris entre 8 et 12.
5. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre de faces compris entre 7 et 13.

8 Dans une production d'ampoules, la probabilité qu'une ampoule soit défectueuse est égale à 0.1.
Dans un lot de 400 ampoules, déterminer la moyenne et l'écart type de la distribution des pièces défectueuses.

9 On dispose de trois tétraèdres parfaitement équilibrés.
Chacun d'eux a une face peinte en bleu, une face peinte en jaune et deux faces peintes en rouge.
On lance simultanément les trois tétraèdres.
1. Quelle est la probabilité qu'aucune face rouge ne soit visible ?
2. Quelle est la probabilité qu'aucune face bleue ne soit visible ?
3. Soit A l'événement « les six faces rouges sont visibles.» Calculer $p(A)$.
4. On répète n fois l'expérience qui consiste à lancer les trois tétraèdres.
Calculer la probabilité p_n que l'événement A soit réalisé une et une seule fois.

10 1. On lance 2 dés non pipés. On désigne par A_2 « le total des numéros amenés est pair ».
Calculer $p(A_2)$.
2. On lance 3 dés non pipés.
On désigne par
A_3 « le total des numéros amenés est pair ».
Calculer $p(A_3)$.
3. On lance n dés non pipés.
On désigne par A_n « le total des numéros amenés est pair. »
Montrer par récurrence sur n que la suite $(p(A_n))$ est constante.

11 Dans une foire une publicité annonce « Un billet sur deux est gagnant, achetez deux billets »
Dans cet exercice, on suppose qu'effectivement, sur le nombre de billets en vente, exactement un billet sur deux est gagnant.
1. Un jour , cent billets sont mis en vente. Un promeneur en achète deux.
Calculer la probabilité qu'il ait au moins un billet gagnant.
2. Un autre jour, 2n billets sont mis en vente. Un promeneur en achète deux.
Soit p_n la probabilité qu'il ait au moins un billet gagnant.
a. Montrer que $p_n = \dfrac{3n-1}{4n-2}$.
b. Calculer p_1 et expliquer le résultat.
c. Montrer que pour tout entier n non nul,
$\dfrac{3}{4} \leq p_n \leq 1$.
3. Tous les jours, 2n billets sont mis en vente. Un promeneur revient chaque jour,
pendant 3 jours, acheter deux billets.
a. Quelle est la probabilité q_n, qu'il obtienne au cours des ces 3 jours au moins un
billet gagnant ?
b. Etudier la limite de la suite (q_n).

12 Dans une loterie, on suppose que chaque billet a une chance sur 100 d'être gagnant.
1. On suppose qu'on achète n billets et on note A l'événement « avoir au moins un billet gagnant ».
Exprimer en fonction de n la probabilité de l'événement A.
2. Combien de billets faut-il acheter pour que la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant soit supérieur à 0.5 ?

13 Un lot de n pièces contient une pièce défectueuse.
1. Une machine les teste une par une, jusqu'à détecter la pièce défectueuse.
Elle effectue le $n^{ème}$ test, dans le cas où il ne reste que la pièce défectueuse.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de tests effectués.
a. Quelle est la probabilité qu'il y ait un seul test ?
b. Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement deux tests ?
c. Déterminer la loi de probabilité de X.
d. Calculer l'espérance et la variance de X.
(On rappelle que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).
2. Dans cette question, on suppose que les tests sont effectués par un homme et que s'il ne reste que deux pièces, celui-ci ne fait alors qu'un test supplémentaire.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tests effectués.
a. Quelle est la probabilité qu'il y ait un seul test ?
b. Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement $n-1$ tests ?
c. Déterminer la loi de probabilité de Y.
d. Calculer l'espérance et la variance de Y.

14 On choisit un nombre x au hasard dans l'intervalle $[0,1]$.
1. Quelle est la probabilité que x soit égal à 0.1 ?
0.0005 ? 0.99999 ?
2. Quelle est la probabilité que x appartienne à l'intervalle $[0.5,1]$?

3. Quelle est la probabilité que x appartienne à l'intervalle $[0.001,\ 0.002]$?
4. Quelle est la probabilité que x soit plus petit que 0.99999 ?
5. Quelle est la probabilité que x soit plus gand que 0.99999 ?

15 Dans la journée, un bus passe toutes les 20 minutes à une station.
Soit X le temps d'attente d'une personne à cette station.
On suppose que X suit une loi uniforme sur $[0, 20]$.
1. Quelle est la probabilité que cette personne attende entre 2 et 5 minutes ?
2. Quelle est la probabilité que cette personne attende entre 10 et 13 minutes ?
3. Quelle est la probabilité que cette personne attende exactement 3 minutes ?
4. Quelle est la probabilité que cette personne attende moins de 3 minutes ?
5. Quelle est la probabilité que cette personne attende plus de 3 minutes ?

16 On suppose que la durée de vie X, exprimée en années d'une machine suit une loi exponentielle de paramètre 0.2.
1. a. Calculer la probabilité que $X = 10$.
   b. Calculer la probabilité que $X \leq 10$.
   c. Calculer la probabilité que $X \geq 10$.
2. Déterminer le réel c tel que $P(X \leq c) = P(X \geq c)$.

17 La durée de vie exprimée en années, d'un robot jusqu'à ce que survienne la première panne suit une loi exponentielle de paramètre 0.0005.
1. Calculer la probabilité qu'un robot ait une durée de vie comprise entre 5 et 8 ans.
2. Calculer la probabilité qu'un robot dépasse 5 ans de durée de vie.
3. Calculer la probabilité qu'un robot dépasse 8 ans de durée de vie.

18 Une machine fabrique des cylindres. On mesure l'écart X, en dixièmes de millimètres, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine.
On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre 1.5.
1. Calculer à 10^{-3} prés, $P(X \leq 1)$, $P(X \geq 2)$ et $P(1 \leq X \leq 2)$.
Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté.
Si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80% des cas.
Si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.
2. On prélève au hasard un cylindre dans la production.
a. Quelle est la probabilité qu'il soit accepté ?
b. On sait qu'il est accepté, quelle est alors la probabilité qu'il ait subit une rectification ?

19 La durée de vie d'une machine, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de
paramètre λ.
1. Déterminer λ à 10^{-1} prés, pour que $P(X > 6) = 0.3$.
Dans la suite de l'exercice on prendra $\lambda = 0.2$.
2. A quel instant t, à un mois prés, la probabilité qu'une machine tombe en panne pour la première fois est-elle de 0.5 ?
3. Calculer la probabilité qu'une machine n'ait pas de panne au cours des deux premières années de sa vie.
4. On considère un lot de cinq machines fonctionnant de manière indépendante.
Déterminer la probabilité que dans ce lot, il ait au moins une machine qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années.