Chapitre 5

Probabilités sur un ensemble fini

Un homme du monde a proposé deux problèmes à Pascal et Roberval,
le second fut à l'origine des calculs de probabilité.
C'est le problème "des points" ou "des parties" ou "de division".
Le prix d'un tournoi est gagné par le premier des participants qui obtient un certain nombre de points.
Comment partager ce prix si le tournoi est interrompu ?
Toutes les solutions qui en furent ensuite données étaient fausses.
Le calcul des probabilités fut présenté au monde en 1657 par Huyghens.
Pour la première fois, les concepts fondamentaux, énoncés et correctement utilisés, sont dans le domaine public.

(Dieudonné,
Abrégé d'histoire des mathématiques,
1978).

Chapitre 5

Probabilités sur un ensemble fini

I. Expériences aléatoires

Activité 1

On désigne par E l'ensemble des entiers naturels pairs inférieurs ou égaux à 100.
On note
A l'ensemble des entiers de E qui sont multiples de 10,
B l'ensemble des entiers de E qui sont multiples de 6,
C l'ensemble des entiers de E qui sont multiples de 15.

1. Dénombrer E, A, B et C.
2. Déterminer et dénombrer chacun des ensembles $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{A \cap C}$, $(A \cap B) \cup C$.

Activité 2

1. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot CHOIX ?
2. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot POSSIBLE ?
3. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot BACCALAUREAT ?

Exercice résolu 1

Une urne contient trois boules numérotées 1, 2 et 3.
On effectue 5 tirages, en tirant les boules une à une et en remettant chaque fois la boule tirée dans l'urne.

1. On note A_j l'ensemble des tirages qui n'amènent pas le numéro j.
   Déterminer le cardinal de A_1, A_2 et A_3.
2. On note $A_{2,3}$ l'ensemble des tirages qui n'amènent ni le numéro 2 ni le numéro 3.
   Déterminer le cardinal de $A_{2,3}$.
3. On note B l'ensemble des tirages qui n'amènent pas en même temps les numéros 2 et 3.
   Déterminer le cardinal de B.

Solution

1. Un tirage qui n'amène pas le numéro 1, amène soit le numéro 2, soit le numéro 3
   Donc le cardinal de A_1 est 2^5.
   De même le cardinal de A_2 est 2^5 et le cardinal de A_3 est 2^5.

2. Un tirage qui n'amène ni le numéro 2, ni le numéro 3 est un tirage qui amène obligatoirement le numéro 1. Donc le cardinal de $A_{2,3}$ est $1^5 = 1$.

3. Dire qu'un tirage n'amène pas en même temps les numéros 2 et 3, c'est dire que ou bien ce tirage n'amène pas 2 ou bien il n'amène pas 3.
Par suite , $B = A_2 \cup A_3$.

On en déduit que $\operatorname{card}(B) = \operatorname{card}(A_2 \cup A_3) = \operatorname{card}(A_2) + \operatorname{card}(A_3) - \operatorname{card}(A_2 \cap A_3)$.

Ce qui donne $\operatorname{card}(B) = 2 \times 2^5 - 1$.

Activité 3

Dans une librairie douze titres de revues différentes sont disponibles.
Trois clients commandent chacun une revue.

1. Combien y a-t-il de commandes possibles ?
2. Combien y a-t-il de commandes possibles si on suppose qu'aucun titre n'est choisi deux fois ?
3. Combien y a-t-il de commandes possibles si on suppose que les clients commandent la même revue ?
4. Combien y a-t-il de commandes si exactement deux clients choisissent le même titre ?

Définition et théorème

Soit $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un ensemble à n éléments et p un entier naturel non nul.

* Le nombre des p- uplets d'éléments de E est l'entier n^p.
* Le nombre de n- uplets d'éléments de E deux à deux distincts est l'entier $n!$

* Si $1 \le p \le n$ alors
• le nombre des p- uplets d'éléments de E deux à deux distincts est l'entier

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!},$$

• le nombre de parties à p éléments de E est l'entier $C_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$.

(L'entier C_n^p est aussi noté $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ et on convient que $C_n^0 = 1$).

Activité 4

Soit un entier $n \ge 2$ et un entier $2 \le p \le n$.

On considère un ensemble E de cardinal n et a, b deux éléments de E.

1. a. Déterminer le nombre des parties à p éléments contenant a et b.
   b. Déterminer le nombre des parties à p éléments contenant a ou bien b.
   c. Déterminer le nombre des parties à p éléments ne contenant ni a ni b.
2. En déduire que $C_n^p = C_{n-2}^{p-2} + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p}$.

Exercice résolu 2

On peint un cube de 5cm d'arête, puis on le découpe en petits cubes de 1cm d'arête, suivant des plans parallèles aux faces. On dispose les petits cubes obtenus dans une urne et on tire simultanément quatre cubes de cette urne.

1. Combien de cubes ont
   a. trois faces colorées?
   b. deux faces colorées?
   c. une face colorée?
   d. zéro face colorée?
2. Combien y a t-il de tirages possibles?
3. Combien de ces tirages amènent deux cubes exactement avec trois faces colorées ?
4. Combien de ces tirages amènent des cubes ayant au moins une face colorée ?

Solution

1. a. Les cubes ayant trois faces colorées sont situés aux sommets du grand cube. Il y en a 8.

b. Les cubes ayant deux faces colorées sont situés sur les arêtes du grand cube, sauf sur les sommets. Sur chaque arête, il y a 3 petits cubes qui ne sont pas sur les sommets. Le cube ayant douze arêtes, on en déduit que le nombre cherché est 36.

c. Les cubes ayant une face colorée sont situés au centre des faces du grand cube. Il y en a 9 sur chaque face. On en déduit que le nombre cherché est 54.

d. Le nombre de cubes n'ayant aucune face colorée est égal à $125-(8+36+54)=27$.

2. Le nombre de tirages possibles est $C_{125}^{4}=9691375$.

3. Pour obtenir deux cubes exactement ayant trois faces colorées, il faut que deux des cubes n'aient pas trois faces colorées. Le nombre de tirages possibles est $C_{8}^{2}\times C_{117}^{2}=190008$.

4. Pour obtenir des cubes ayant au moins une face colorée, il faut tirer les quatre cubes parmi
les cubes ayant une, deux ou trois faces colorées, c'est-à-dire parmi 98 cubes.
Le nombre de tirages amenant des cubes ayant au moins une face colorée est
$C_{98}^{4}=3612280$.

II. Définition d'une probabilité sur un ensemble fini

Définition

Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat est soumis au hasard et est donc imprévisible.
L'ensemble E des issues d'une expérience aléatoire est appelé univers.
Les éléments de E sont appelés événements élémentaires.
Une partie A de E est appelée événement.

Activité 1

Une expérience consiste à lancer une pièce de monnaie trois fois de suite.

On note à chaque fois le côté exposé (P pour pile et F pour face).

1. Dénombrer les issues de cette expérience.
2. Déterminer le cardinal de chacun des événements ci-dessous.
   A : « La face pile apparaît une seule fois »
   B : « Obtenir P pour la première fois au deuxième lancer »
3. Déterminer le cardinal de $A \cap B$ et de $A \cup B$.

Définition

Soit E l'univers fini d'une expérience aléatoire et $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des événements de E.
On appelle probabilité sur E, toute application p, de $\mathscr{P}(E)$ dans $[0,1]$ vérifiant les conditions ci-dessous.

- L'image $p(E)$ de E est égale à 1.
- L'image $p(\varnothing)$ de l'ensemble vide est égale à 0.
- L'image $p(A)$ d'un événement A, est la somme des images des événements

élémentaires de A, c'est-à-dire $p(A) = \sum_{a_i \in A} p(a_i)$.

Vocabulaire

Le triplet $(E, \mathscr{P}(E), p)$ est appelé espace probabilisé fini.

L'événement E est appelé événement certain.
L'événement vide est appelé événement impossible.
L'événement contraire d'un événement A est noté $\overline{A}$.
Deux événements sont dits incompatibles si leur intersection est vide.

Activité 2

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1. On suppose que la probabilité d'apparition de 6 est le triple de la probabilité d'apparition de chacun des nombres 1, 2, 3, 4 et 5.
   Déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire.
2. Déterminer la probabilité de chacun des événements ci-dessous.
   A « obtenir un nombre pair »,
   B « obtenir un nombre impair inférieur ou égal à 3 »,
   C « obtenir un nombre pair strictement supérieur à 3»,
   D « obtenir un multiple de 3 ou un nombre pair ».

Propriétés

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini et A et B deux événements de E.

- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$. • $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
- Si $A \cap B = \varnothing$ alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
- Si $A_1, A_2, ..., A_k$ sont des événements deux à deux incompatibles , alors
$p(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = p(A_1) + p(A_2) + ... + p(A_k)$.

Exercice résolu 3

Un appareil, fabriqué en très grande série, peut présenter deux sortes de défauts désignés par D_1 et D_2.

Dans un lot de 1000 appareils, on constate que 60 appareils ont le défaut D_1, 50 appareils ont le défaut D_2 et 20 appareils ont les deux défauts.

Un client achète un appareil. (on admet que son achat a été fait au hasard).

Déterminer les probabilités des événements suivants :

A : « L'appareil a les deux défauts ».

B : « L'appareil a au moins un défaut ».

C : « L'appareil n'a pas de défaut ».

D'_1 : « L'appareil a le défaut D_1 et n'a pas le défaut D_2 ».

D'_2 : « L'appareil a le défaut D_2 et n'a pas le défaut D_1 ».

D : « L'appareil a un seul défaut ».

Solution

On désigne par D_1 : « L'appareil a le défaut D_1 » et par D_2 :« L'appareil a le défaut D_2 ».

Il en résulte que $A = D_1 \cap D_2$.

D'après les données, 20 appareils parmi 1000 ont les deux défauts D_1 et D_2.

On en déduit que $p(A) = \dfrac{20}{1000} = 0.02$.

L'événement B est la réunion des événements D_1 et D_2. On en déduit que

$$p(B) = p(D_1) + p(D_2) - p(D_1 \cap D_2) == \frac{60}{1000} + \frac{50}{1000} - \frac{20}{1000} = 0.09$$

L'événement C est l'événement contraire de B. Par suite, $p(C) = 1 - p(B) = 0.91$.

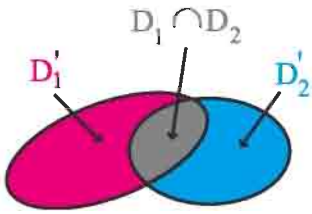
On vérifie facilement que $D_1 = D'_1 \cup (D_1 \cap D_2)$ et que D'_1 et $D_1 \cap D_2$ sont incompatibles.

Il en résulte que $p(D'_1) = p(D_1) - p(D_1 \cap D_2) = \dfrac{60}{1000} - \dfrac{20}{1000} = 0.04$.

De même $p(D'_2)=p(D_2)-p(D_1\cap D_2)=0.03$.

Il est clair que $D=D'_1\cup D'_2$ et les événements D'_1 et D'_2 sont incompatibles.

On en déduit que $p(D)=p(D'_1\cup D'_2)=0.07$.



III. Equiprobabilité

Lorsqu'on lance une pièce de monnaie bien équilibrée, on jette un dé non pipé ou on effectue un tirage au hasard, les issues ont la même probabilité de réalisation, on dit qu'on est en présence d'une situation d'équiprobabilité.

Définition et théorème

Soit E l'univers fini d'une expérience aléatoire dans une situation d'équiprobabilité et $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

L'application p définie de $\mathscr{P}(E)$ dans $[0,1]$ par $p(a)=\dfrac{1}{\text{card}(E)}$, pour tout événement élémentaire a de E est une probabilité sur E, appelée probabilité uniforme.

Propriété

Si $(E, \mathscr{P}(E), p)$ est un espace probabilisé fini tel que la probabilité p est uniforme, alors $p(A)=\dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(E)}$, pour tout événement A de E.

Exercice résolu 4

On jette deux dés équilibrés de couleurs rouge et verte et dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1. Déterminer l'univers E de l'expérience et donner son cardinal.
2. Calculer la probabilité d'obtenir le même chiffre sur les deux dés.
3. Calculer la probabilité d'obtenir deux chiffres distincts.

Solution

1. Les dés sont discernables par leur couleur.
   On en déduit que $E=\{(i,j) \text{ tels que } 1\le i\le 6 \text{ et } 1\le j\le 6\}$ et $\text{card}(E)=36$.
2. L'événement A : « Obtenir le même chiffre sur les deux dés » est tel que $A=\{(i,i), 1\le i\le 6\}$. Par suite, $\text{card}A=6$ et $p(A)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$.
3. La probabilité d'obtenir deux chiffres distincts est $p(\overline{A})=1-p(A)=\dfrac{5}{6}$.

Activité

Un code comporte deux lettres suivies de deux chiffres.

1. Dénombrer les codes possibles.
2. Un enfant compose un code au hasard. Calculer la probabilité d'obtenir,
   a. un code commençant par la lettre A,
   b. un code contenant les lettres A et Z,
   c. un code contenant le chiffre 0 deux fois,
   d. un code ne contenant pas de chiffre pair.

IV. Probabilité conditionnelle

Activité 1

Un enquêteur effectue un sondage auprès de familles ayant deux enfants et s'intéresse à la composition des enfants suivant le sexe (F ou G) et leurs âges.

On suppose que les naissances des filles et des garçons sont équiprobables.

1. Il choisit une famille au hasard.
   a. Déterminer les quatre éléments possibles de l'univers de cette expérience.
   b. Quelle est la probabilité que l'aîné des enfants soit une fille ?
   c. Quelle est la probabilité que cette famille ait deux filles ?
   d. Quelle est la probabilité que cette famille ait deux garçons ?
   e. Quelle est la probabilité que cette famille ait un garçon et une fille ?
2. Il sonne à la porte de la demeure de l'une de ces familles. Une fille vient ouvrir la porte.
   a. Quelle est alors la probabilité que l'autre enfant soit une fille ?
   b. Quelle est alors la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?

Théorème

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini et B un événement tel que $p(B) \neq 0$.

L'application p_B de $\mathscr{P}(E)$ dans $[0,1]$, définie par $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$, pour tout événement A, est une probabilité sur E.

Démonstration

L'égalité $E \cap B = B$ nous permet de déduire que $p_B(E) = \dfrac{p(E \cap B)}{p(B)} = \dfrac{p(B)}{p(B)} = 1$.

De plus, $p_B(\varnothing) = \dfrac{p(\varnothing \cap B)}{p(B)} = \dfrac{p(\varnothing)}{p(B)} = 0$.

Si α_j est un élément de B alors $\{\alpha_j\} \cap B = \{\alpha_j\}$ et $p_B(\alpha_j) = \dfrac{p(\alpha_j)}{p(B)}$.

De plus si A est un événement de E tel que $A = \{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$, on peut écrire $A \cap B = \{\alpha'_1\} \cup \{\alpha'_2\} \cup ... \cup \{\alpha'_m\}$, où α'_1, α'_2, ..., α'_m sont les éléments qui appartiennent à A et à B. Par suite, $p(A \cap B)$ est la somme des probabilités des événements élémentaires $\{\alpha'_1\}, \{\alpha'_2\}, ..., \{\alpha'_m\}$.

On en déduit alors que $p_B(A) = \dfrac{p(\alpha'_1)}{p(B)} + \dfrac{p(\alpha'_2)}{p(B)} + ... + \dfrac{p(\alpha'_m)}{p(B)}$.

Définition

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini et B un événement tel que $p(B) \neq 0$.

L'application p_B ainsi définie s'appelle probabilité B-conditionnelle.

Le réel $p_B(A)$ est noté $p(A/B)$ (on lit « probabilité de A, sachant B »).

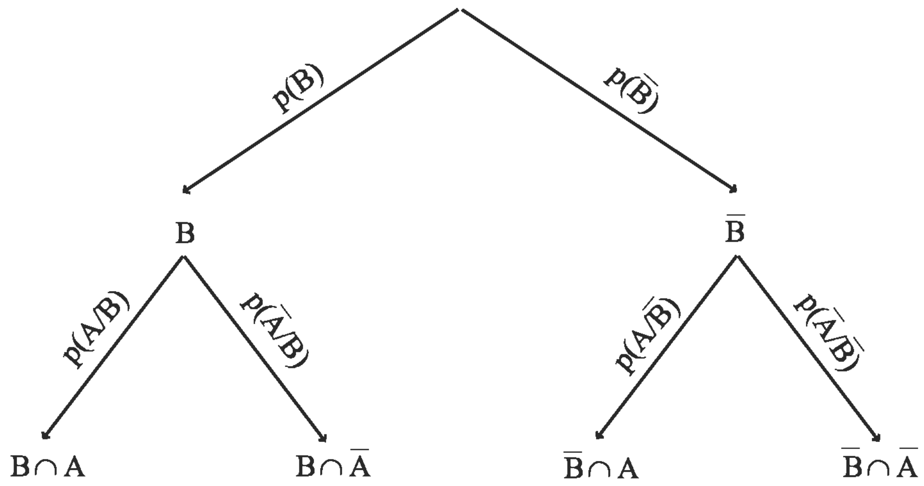
Activité 2

Une urne contient quatre boules rouges numérotées $(1, 1, 2, 2)$ et deux boules vertes numérotées $(1, 2)$. Un joueur tire une boule.

On désigne par R l'événement « obtenir une boule rouge » et par D l'événement « obtenir une boule numérotée 2 ».

1. Quelle est la probabilité que le joueur tire une boule rouge ?
2. Le joueur a tiré une boule rouge.
   a. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit numérotée 2 ?
   b. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit numérotée 1 ?
3. Le joueur a tiré une boule verte.
   a. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit numérotée 2 ?
   b. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit numérotée 1 ?
4. a. Quelle est la probabilité que le joueur tire une boule rouge et numérotée 2 ?
   b. Quelle est la probabilité que le joueur tire une boule verte et numérotée 1 ?

Lorsqu'on est en présence d'une situation de conditionnement, il est conseillé d'établir un arbre de probabilités.
L'arbre de probabilités ci-après modélise la situation de conditionnement suivante.
On effectue une expérience (I) comportant deux issues contraires B et $\overline{B}$.
L'expérience (I) étant effectuée, on procède à une expérience (II) comportant deux issues contraires A et $\overline{A}$.



Exercice résolu 5

Un centre de santé se propose de dépister une maladie auprès d'une population de 1000 individus.

On dispose des données suivantes :

La proportion des personnes malades est de 10%.

Sur 100 personnes malades, 98 ont un test positif.

Sur 100 personnes non malades, une seule personne a un test positif.

On choisit une personne au hasard et on la soumet à un test de dépistage.

On note M « la personne est malade » et T « la personne a un test positif ».

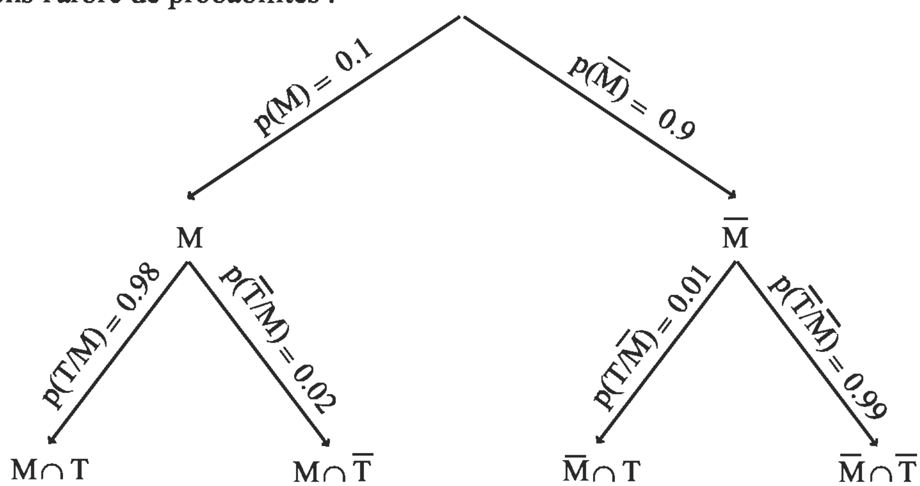
1. Déterminer la probabilité qu'une personne malade ait un test positif.
ainsi que la probabilité qu'une personne malade ait un test négatif.
2. Déterminer la probabilité qu'une personne non malade ait un test négatif, ainsi que la probabilité qu'une personne non malade ait un test positif..
3. Déterminer, à l'aide d'un arbre, les probabilités des événements ci-dessous
   « La personne choisie est malade et a un test positif. »
   « La personne choisie est malade et a un test négatif. »
   « La personne choisie n'est pas malade et a un test positif. »
   « La personne choisie n'est pas malade et a un test négatif. »
4. Déterminer les probabilités des événements ci-dessous.
   a. « La personne choisie a un test positif. »
   b. « La personne choisie est malade sachant qu'elle a un test négatif . »

Solution

1. On sait que sur 100 personnes malades, 98 ont un test positif et donc deux personnes ont un test négatif. Par suite, $p(T/M)=0.98$ et $p(\overline{T}/M)=0.02$

2. On sait que sur 100 personnes non malades, une seule a un test positif. C'est-à-dire que parmi 100 personnes non malades, 99 personnes ont un test négatif. Par suite, $p(T/\overline{M})=0.01$ et $p(\overline{T}/\overline{M})=0.99$.

3. Dressons l'arbre de probabilités .



On déduit de l'arbre de probabilités que
$p(T\cap M)=0.098$, $p(\overline{T}\cap M)=0.002$, $p(T\cap\overline{M})=0.009$, $p(\overline{T}\cap\overline{M})=0.891$.

4. a. On peut écrire $T=(T\cap M)\cup(T\cap\overline{M})$.
Les événements $(T\cap M)$ et $(T\cap\overline{M})$ étant incompatibles,
$p(T)=p(T\cap M)+p(T\cap\overline{M})=0.107$.

b. Il s'agit de déterminer la probabilité de l'événement M sachant que l'événement $\overline{T}$ est réalisé.

On sait que $p(M/\overline{T})=\dfrac{p(\overline{T}\cap M)}{1-p(T)}$. Il en résulte que $p(M/\overline{T})=\dfrac{0.002}{0.893}\simeq 0.0022$.

Evénements indépendants

Activité 3

On jette un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On considère les événements :
A : « Obtenir un numéro pair »
B : « Obtenir un multiple de 3 »
C : « Obtenir un multiple de 6 »
Calculer la probabilité de chacun des événements A, B, C, $A\cap B$ et $A\cap C$.

Définition

On dit que deux événements A et B sont indépendants lorsque $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
Dans le cas où $p(B) \neq 0$, la réalisation de B n'influence pas celle de A, c'est à dire $p(A/B) = p(A)$.

Activité 4

Une urne U_1 contient trois boules noires et six boules vertes.

Une urne U_2 contient deux boules noires et trois boules vertes.

On choisit une urne au hasard et on tire successivement deux boules, en remettant chaque fois la boule, dans l'urne choisie.
On considère les événements
A : « obtenir une boule verte au premier tirage » et B : « obtenir une boule verte au deuxième tirage ».
Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Activité 5

Trois personnes A, B et C participent à un jeu télévisé. L'animateur dispose de deux cadeaux qu'il se propose d'offrir au hasard aux candidats, pour cela il leur fait un tirage au sort (un candidat pourra recevoir deux cadeaux).
On considère les événements A : « la personne A ne reçoit aucun cadeau » et
B : « la personne B ne reçoit aucun cadeau ».
1. Calculer les probabilités des événements A, B et $A \cap B$.
2. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Formule des probabilités totales

Activité 6

Dans une usine, le tiers de la production provient de la machine A, le quart provient de la machine B et le reste provient de la machine C. Les trois machines fabriquent des ampoules de types 1 et 2.
On a constaté que
Sur 1000 ampoules produites par la machine A, deux seulement sont défectueuses,
sur 1000 ampoules produites par la machine B, dix seulement sont défectueuses,
et sur 1000 ampoules produites par la machine C, cinq seulement sont défectueuses.
On choisit au hasard une ampoule emballée.
Déterminer, à l'aide d'un arbre, les probabilités des événements ci-dessous.
a. « L'ampoule est défectueuse ».
b. « L'ampoule fonctionne ».
c. « L'ampoule provient de la machine A sachant qu'elle est défectueuse ».
d. « L'ampoule ne provient pas de la machine A sachant qu'elle fonctionne ».

Définition

Soit E un ensemble fini, les parties $B_1, B_2, ..., B_n$ forment une partition de E lorsqu'ils sont deux à deux disjoints et leur réunion est E.

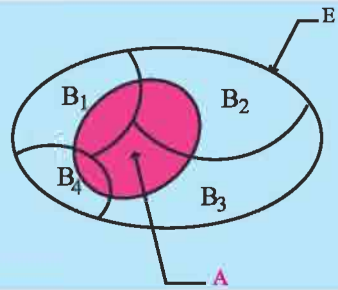
Théorème

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini,

$B_1, B_2, ..., B_n$ des événements formant une partition de E tels que pour tout i, $p(B_i) \neq 0$.

Alors pour tout événement A,

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} p(B_i).p_{B_i}(A).$$



Démonstration

Les parties $A \cap B_1, A \cap B_2, ..., A \cap B_n$ forment une partition de A.

D'après l'additivité de la probabilité, $p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A \cap B_i)$.

On déduit alors de la formule $p(A \cap B_i) = p(B_i).p_{B_i}(A)$, que $p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(B_i).p_{B_i}(A)$.

Exercice résolu 6

Une urne U_1 contient sept boules noires et trois boules vertes.

Une urne U_2 contient deux boules noires et huit boules vertes.

On effectue une suite de tirages en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne, suivant la règle suivante.

Si au $(n-1)^{\text{ème}}$ tirage , on a obtenu une boule noire alors le $n^{\text{ème}}$ tirage s'effectue dans U_1,

Si au $(n-1)^{\text{ème}}$ tirage , on a obtenu une boule verte alors le $n^{\text{ème}}$ tirage s'effectue dans U_2.

1. On choisit une urne au hasard et on fait le premier tirage.
   Déterminer la probabilité p_1 d'obtenir une boule noire.
2. On désigne par p_n la probabilté de tirer une boule noire au $n^{\text{ème}}$ tirage.
   a. Calculer p_2.
   b. Montrer que $p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{5}$, $n \geq 2$.
3. a. Montrer que la suite $(q_n)_{n\geq 1}$ définie par $q_n = p_n - \frac{2}{5}$, $n \geq 1$ est une suite géométrique.
   b. Déterminer p_n en fonction de n en déduire $\lim_{n \to +\infty} p_n$.

Solution

1. Notons E_1 : « obtenir une boule noire au premier tirage »,

U_1 : « le premier tirage s'effectue dans U_1 » U_2 : « le premier tirage s'effectue dans U_2 ».

Remarquons que le choix de l'urne étant fait au hasard, $p(U_1) = p(U_2) = 0.5$

$E_1=(E_1\cap U_1)\cup(E_1\cap U_2)$. Les événements $E_1\cap U_1$ et $E_1\cap U_2$ étant incompatibles, on obtient $p_1=p(E_1\cap U_1)+p(E_1\cap U_2)=p(E_1/U_1)p(U_1)+p(E_1/U_2)p(U_2)$.

De plus, $p(E_1/U_1)=\frac{7}{10}$ et $p(E_1/U_2)=\frac{2}{10}$. Par suite, $p_1=\frac{9}{20}$.

2. a. Notons E_2 : « obtenir une boule noire au deuxième tirage ».

On peut alors écrire $E_2=(E_2\cap E_1)\cup(E_2\cap\overline{E_1})$. Les événements $E_2\cap E_1$ et $E_2\cap\overline{E_1}$ étant incompatibles, on en déduit que $p_2=p(E_2/E_1)p(E_1)+p(E_2/\overline{E_1})p(\overline{E_1})$.

De plus, $p(E_2/E_1)=\frac{7}{10}$, $p(E_2/\overline{E_1})=\frac{2}{10}$.

On en déduit que $p_2=\frac{7}{10}p_1+\frac{2}{10}(1-p_1)=\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{5}=\frac{17}{40}$.

b. Notons E_n : « obtenir une boule noire au $n^{\text{ème}}$ tirage ».

On peut alors écrire $E_n=(E_n\cap E_{n-1})\cup(E_n\cap\overline{E_{n-1}})$. Les événements $E_n\cap E_{n-1}$ et $E_n\cap\overline{E_{n-1}}$ étant incompatibles, on en déduit que $p_n=p(E_n/E_{n-1})p(E_{n-1})+p(E_n/\overline{E_{n-1}})p(\overline{E_{n-1}})$.

Les égalités $p(E_n/E_{n-1})=\frac{7}{10}$, $p(E_n/\overline{E_{n-1}})=\frac{2}{10}$ impliquent que $p_n=\frac{1}{2}p_{n-1}+\frac{1}{5}$.

3. a.Un simple calcul montre que la suite $(q_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison 0.5 et de premier terme $q_1=\frac{1}{20}$.

b. On déduit de la question 3. a. que $p_n=\frac{2}{5}+\frac{1}{20}(0.5)^{n-1}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=\frac{2}{5}$.

Activité 7

Le cycle d'un feu tricolore dure une minute : vert 25s, orange 5s et rouge 30s.

1. Quelle est la probabilité que le feu soit vert ? orange ? rouge ?
2. Un automobiliste arrive à 10 mètres d'un feu tricolore et aucun véhicule ne le précède. On suppose que l'automobiliste passe sans s'arrêter :
   au feu vert avec une probabilité de 99%,
   au feu orange avec une probabilité de 80%
   et au feu rouge avec une probabilité de 1%.
   Quelle est la probabilité que l'automobiliste passe sans s'arrêter ?

Activité 8

Une personne qui fait du sport un jour donné, fait du sport le lendemain avec la probabilité0.4.
Si elle ne fait pas de sport ce jour là elle en fera le lendemain avec la probabilité 0.8.
Cette personne a fait du sport le lundi. Quelle est la probabilité quelle en fasse le jeudi ?

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Une urne contient vingt jetons numérotés de 0 à 19.

a. On tire simultanément deux jetons de l'urne.

La probabilité d'obtenir deux jetons portant des numéros impairs est égale à

☐ 0.5. ☐ $\frac{9}{38}$. ☐ 0.25.

b. On tire successivement et avec remise deux jetons de l'urne.

La probabilité d'obtenir deux jetons portant des numéros impairs est égale à

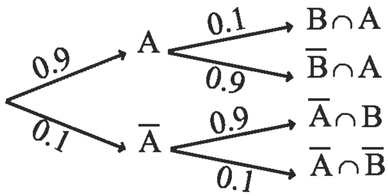
☐ 0.5. ☐ $\frac{9}{38}$. ☐ 0.25.

c. On tire successivement et sans remise deux jetons de l'urne.

La probabilité d'obtenir deux jetons portant des numéros impairs est égale à

☐ 0.5. ☐ $\frac{9}{38}$. ☐ 0.25.

2. On représente une expérience aléatoire par l'arbre de probabilité ci-contre.



a. La probabilité de B sachant A est égale à

☐ 0.9. ☐ 0.1. ☐ 0.09.

b. La probabilité de l'événement $\overline{A}\cap\overline{B}$ est égale à

☐ 0.01. ☐ 0.1. ☐ 0.2.

c. La probabilité de l'événement A sachant B est égale à

☐ 0.09. ☐ 0.5. ☐ 0.9.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Si deux événements A et B sont indépendant alors $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$.
2. Si deux événements A et B sont incompatibles alors $p(A\cap B)=p(A).p(B)$.
3. Si $A\cup B$ est l'événement certain alors pour tout événement C, $p(C)=p(A\cap C)+p(B\cap C)$.

1 Dans un lot de douze ampoules, quatre ampoules sont défectueuses.
On tire au hasard et simultanément trois ampoules.
1. Quelle est la probabilité qu'aucune ampoule ne soit défectueuse?
2. Quelle est la probabilité qu'exactement une ampoule soit défectueuse?
3. Quelle est la probabilité qu'au moins une ampoule tirée soit défectueuse?

2 Dans une urne, une boule est numérotée 1,deux boules sont numérotées 2, trois boules sont numérotées 3, quatre boules sont numérotées 4, …et enfin neuf boules sont numérotées 9.
1. Combien y a-t-il de boules dans l'urne ?
2. On tire deux boules simultanément et au hasard.
a. Quelle est la probabilité que les deux numéros soient pairs ?
b. Quelle est la probabilité que la somme des deux numéros obtenus soit supérieure ou égale à 3 ?
c. Quelle est la probabilité que la somme des deux numéros obtenus soit inférieure ou égale à 15 ?
3. On tire quatre boules successivement, sans les remettre dans l'urne, et on les aligne dans l'ordre où on les a tirées.
La probabilité d'obtenir 1983 est elle la même que celle d'obtenir 1389 ?
4. On tire quatre boules successivement, en les remettant dans l'urne, et on les aligne dans l'ordre où on les a tirées.
La probabilité d'obtenir 1983 est elle la même que celle d'obtenir 1389 ?

3 Un élève effectue un sondage dans sa classe (qui comprend 40 élèves). Les 40 élèves ont répondu par oui ou par non au trois questions « Aimez-vous les mathématiques ? », « Aimez-vous la philosophie ? » et « Aimez vous le sport ? ».
La première question a obtenu 31 « oui », la deuxième question, un « oui » et la troisième question, 9 « oui ».
Un supplément d'enquête a donné les résultats suivants.
1 élève aime seulement la philosophie,
3 élèves aiment seulement le sport,
25 élèves aiment seulement les mathématiques.
Quelle la probabilité qu'un élève interrogé au hasard
1. Aime à la fois les trois matières ?
2. Aime les mathématiques et n'aime pas le sport ?
3. N'aime pas la philosophie et les mathématiques ?
4. N'aime aucune matière ?
5. Aime au moins une matière ?

4 Le programme d'une épreuve d'examen comporte 100 questions. Un candidat n'en étudie que 80. lors d'un examen, le candidat tire au sort trois questions, quelle est la probabilité qu'il ait étudié
1. les trois questions proposées,
2. deux questions seulement,
3. une seule question,
4. aucune des trois,
5. au moins une des trois.

5 Lors d'un concours la première épreuve est une épreuve de mathématiques, la deuxième épreuve est une épreuve de sciences physiques.
Un élève a :
80% de chance de réussir la première épreuve,
s'il réussit la première épreuve il aura 75% de chance de réussir la deuxième épreuve,
et s'il ne réussit pas la première épreuve il aura 40% de chance de réussir la deuxième épreuve.
On désigne par M l'événement «l'élève réussit la première épreuve » et par S l'événement « l'élève réussit la deuxième épreuve ».
Déterminer $p(M)$, $p(S/M)$, $p(S/\overline{M})$ et $p(S)$.

6 Dans une usine, l'énergie électrique est fournie par deux générateurs.
Sur une période donnée, chacun des générateurs tombe en panne avec une probabilité égale à 0.005, de façon indépendante de l'autre générateur.
1. Quelle est la probabilité, que sur cette période, que les deux générateurs soient en panne?
2. Quelle est la probabilité, que sur cette période, l'usine possède toujours au moins un générateur en état de marche ?

7 Soit A, B deux événements indépendants tels que $p(A)=0.2$ et $p(B)=0.4$.
Calculer les probabilités ci-dessous.
$p(A\cap B)$, $p(A\cup B)$, $p(A\cap\overline{B})$, $p(\overline{A}\cup B)$.

8 Le personnel d'une grande entreprise est réparti en trois catégories : les ingénieurs, les techniciens et le personnel administratif.
10% des employés sont des ingénieurs et 80 % sont des techniciens.
80% des employés sont des femmes, 60% des des ingénieurs sont des hommes et 90% des techniciens sont des femmes.
On intérroge un employé au hasard.
1. a. Quelle est la probabilité d'interroger une femme ingénieur ?
 b. Quelle est la probabilité d'interroger un homme technicien ?
c. Quelle est la probabilité d'interroger une femme du personnel administratif ?
2. On sait que l'employé interrogé est une femme.
a. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit technisienne ?
b. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit ingénieur ?
3. On sait que l'employé interrogé est un ingénieur.
a. Quelle est alors la probabilité que ce soit soit une femme ?
b. Quelle est alors la probabilité que ce soit un homme ?

9 Un magasin vend deux types de téléphones portables : des modèles de marque A et des modèles de marque B.
Le magasin propose deux types d'abonnement : un abonnement de type I et un abonnement de type II.
Le service marketing effectue une enquête sur un échantillon de 2000 clients ayant acheté chez ce magasin un seul téléphone et choisi un seul abonnement.
Sur les 2000 clients, 1200 ont acheté le modèle A.
Sur les 2000 clients, 960 ont choisi l'abonnement I.
On note S l'événement « avoir acheté le modèle A » et C «avoir choisi l'abonnement I »
Un client est choisi au hasard dans l'échantillon.
1. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté le modèle A ?
2. Parmi les clients qui ont acheté le modèle A , 32% ont choisi l'abonnement I.
a. Quelle est la probabilité que le client ait acheté le modèle A et choisi l'abonnement I ?
b. Quelle est la probabilité que le client ait acheté le modèle B et choisi l'abonnement II ?

10 Une urne contient huit jetons :
- trois noirs portant tous le numéro 1,
- trois noirs portant tous le numéro 2,
- un vert portant le numéro 1,
- un vert portant le numéro 2.

Une épreuve consiste à extraire au hasard deux jetons selon une procédure déterminée par le lancer d'une pièce truquée.
Si l'on obtient pile, on extrait deux jetons simultanément.
Si l'on obtient face, on extrait les deux jetons successivement sans remise.
Lors du lancer de la pièce, la probabilité d'obtenir pile est égale à $\frac{7}{15}$.
On note P l'événement « obtenir pile » et F l'événement « obtenir face »
A « les deux jetons portent le même numéro ou ont la même couleur. »
B « les deux jetons portent le même numéro et ont la même couleur. »
C « les deux jetons tirés ont la même couleur. »
D « les deux jetons tirés portent le même numéro.»
1. Déterminer les probabilités $p(C/P)$, $p(D/P)$, $p(B/P)$ et $p(A/P)$.
2. Déterminer $p(A/F)$ et en déduire $p(A)$.

11 Deux joueurs X et Y s'entraînent au tir à la cible. Le joueur X est expérimenté et atteint sa cible 9 fois sur 10 et le joueur Y est débutant et atteint sa cible 4 fois sur 10.
X laisse Y s'entraîner et n'effectue qu'un tir sur trois.
Un des joueurs tire et la cible est atteinte.
Quelle est la probabilité que ce soit Y ?

12 Un joueur est en présence de deux urnes A et B.
Dans l'urne A, il y a trois boules blanches et cinq boules rouges.
Dans l'urne B, il y a sept boules blanches et cinq boules rouges.
Le joueur dispose de deux dés non pipés et de couleurs différentes qu'il lance une fois.
Si le total des points obtenus est inférieur ou égal à 7, il choisit l'urne A.
Si le total des points obtenus est strictement supérieur à 7, il choisit l'urne B.
Il tire alors dans l'urne choisie successivement quatre boules sans remise.
1. Calculer la probabilité qu'il obtienne 2 boules blanches et 2 boules rouges.
2. Calculer la probabilité qu'il n'obtienne que des boules rouges.
3. Le joueur n'obtient que des boules rouges. Quelle est la probabilité p que ce soit l'urne B qui ait été choisie ?

13 Deux amis se rendent indépendamment l'un de l'autre sur un lieu de vacances.
Les jours d'arrivée possibles pour chacun des deux amis sont numérotés de 1 à 8.
Les deux amis choisissent chacun leur jour d'arrivée au hasard, il reste alors trois jours dans ce lieu à attendre l'autre, puis repart.
Leurs séjours possibles se situent au cours de la période comportant les journées numérotées de 1 à 10.
1. Calculer la probabilité que les deux amis arrivent le même jour.
2. Calculer la probabilité que les deux amis arrivent avec un jour d'écart.
3. Calculer la probabilité que les deux amis puissent se rencontrer.
4. On sait que les deux amis se sont rencontrés. Quelle est la probabilité qu'ils aient pu passer ensemble au moins deux jours ?

14 Un individu essayant de réduire sa consommation de cigarettes, applique les conditions suivantes
C_1 : s'il reste un jour sans fumer alors la probabilité pour qu'il fume le lendemain est de 0.2
C_2 : par contre s'il cède et fume un jour alors la probabilité qu'il fume le lendemain est égale 0.7.
On note F_n l'événement « l'individu fume le $n^{\text{ième}}$ jour» et p_n la probabilité de l'événement F_n .
1. A l'aide d'un arbre de choix, déterminer les probabilités des événements
$\left(F_{n+1}/F_n\right)$; $\left(\overline{F_{n+1}}/F_n\right)$; $\left(F_{n+1}/\overline{F_n}\right)$ et $\left(\overline{F_{n+1}}/\overline{F_n}\right)$.
2. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$,
$p_{n+1} = 0.5\, p_n + 0.2$
3. Soit (a_n) la suite définie par
$a_n = p_n - 0.4, n \geq 1$.
a. Montrer que (a_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et la limite.
b. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter.

15 Des personnes P_1 , P_2 ,..., P_n ,... se transmettent une information dans cet ordre. Chaque personne transmet l'information de manière fidèle avec une probabilité égale à 0.9 ou la change en son contraire avec une probabilité égale à 0.1.
On suppose que la première personne possède l'information non déformée.
Pour tout $n \geq 1$, on note A_n l'événement « la $n^{\text{ème}}$ personne possède l'information non déformée » et p_n sa probabilité.
1. Calculer p_1 et p_2 .
2. Utiliser un arbre de choix pour calculer p_3 .
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $p_{n+1} = 0.8 p_n + 0.1$

4. Exprimer p_n en fonction de n.

5. Quelle est la probabilité que la $20^{ème}$ personne possède l'information non déformée ?

6. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

16 Un gène peut avoir deux états A « allèle dominant » ou a « allèle récessif ».
Un individu peut avoir l'un des trois génotypes suivants : « AA », « Aa » ou « aa ».
Un enfant récupère un allèle de chacun de ses deux parents.
1. On suppose que l'un des parents a le génotype « AA » et l'autre « Aa ».
a. Quelle est la probabilité que l'enfant soit de type « AA » ?
b. Quelle est la probabilité que l'enfant soit de type « Aa » ?
2. On suppose que les deux parents sont de génotype « Aa ».
a. Quelle est la probabilité que l'enfant soit de type « AA » ?
b. Quelle est la probabilité que l'enfant soit de type « Aa » ?
c. Quelle est la probabilité que l'enfant soit de type « aa » ?

3. On note p_n, q_n et r_n les probabilités respectives qu'un individu de la $n^{ième}$ génération soit de type « AA », « Aa » ou « aa ».
A l'aide d'un arbre de choix, montrer que

a. $p_{n+1}=\left(p_n+\frac{q_n}{2}\right)^2$.

b. $r_{n+1}=\left(\frac{q_n}{2}+r_n\right)^2$.

c. $q_{n+1}=1-\left(p_n+\frac{q_n}{2}\right)^2-\left(\frac{q_n}{2}+r_n\right)^2$.

4. On note $\alpha=p_0-r_0$.

a. Montrer que pour tout n, $p_n-r_n=\alpha$.

b. Montrer que pour tout n, $2r_n+q_n=1-\alpha$.

5. En déduire que suites (p_n), (q_n) et (r_n) sont constantes.

17 Un sac contient n boules rouges et 2n boules noires indiscernables au toucher et ayant chacune la même probabilité d'être tirée. On tire simultanément trois boules du sac.

1. Quelle est la probabilité p_n pour que parmi ces trois boules, il y ait une seule rouge?
En déduire que (p_n) possède une limité finie que l'on notera p.
2. Quelle est la probabilité q_n pour que parmi ces trois boules, il y ait au moins une rouge? En déduire que (q_n) possède une limité finie que l'on notera q.
3. On effectue trois tirages successifs d'une seule boule en remettant la boule tirée dans le sac avant d'effectuer le tirage suivant.
a. Montrer que la probabilité d'obtenir une seule boule rouge est égale à p.
b. Montrer que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge est égale à q.

18 Un joueur joue à pile ou face avec la règle suivante :
Il gagne dès que le nombre de fois où pile apparaît dépasse de deux le nombre de fois où face apparaît.
Il perd dès que le nombre de fois où face apparaît dépasse de deux le nombre de fois où pile apparaît.
On suppose que la pièce utilisée par le joueur est truquée de sorte qu'elle amène pile avec la probabilité $\frac{5}{12}$ et face avec la probabilité $\frac{7}{12}$.
1. Montrer que le joueur doit jouer un nombre pair de lancers pour gagner.
2. Calculer la probabilité pour que le joueur gagne au plus au bout de 2 lancers.
3. Calculer la probabilité pour que le joueur gagne au plus au bout de 4 lancers.
4. Calculer la probabilité pour que le joueur gagne au plus au bout de n lancers.
5. Calculer la probabilité pour que le joueur gagne au plus au bout de 20 lancers.