Chapitre 2

Suites réelles

Dans son traité d'Arithmétique, As- Samaw'al (1172) écrit : "Ce que l'on extrait par approximation des racines irrationnelles au moyen du calcul est ce par quoi on veut obtenir une quantité rationnelle proche de la racine irrationnelle. Il peut exister une quantité rationnelle plus proche de la racine irrationnelle que celle-là. Il peut ensuite exister une troisième quantité rationnelle, plus proche de la racine irrationnelle que la deuxième quantité et que la première, car pour toute quantité rationnelle supposée proche d'une racine irrationnelle, la différence entre elles est en vérité une ligne droite, et la ligne est susceptible d'être divisée et d'être partagée, indéfiniment. C'est pourquoi il devient possible de trouver continûment une quantité rationnelle proche de la racine irrationnelle, et de trouver une autre quantité rationnelle plus proche que la première de l'irrationnelle, indéfiniment."

(R. Rashed, Entre Arithmétique et Algèbre , 1984).

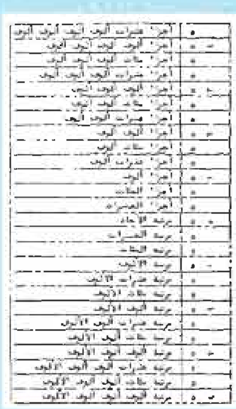


Tableau d'As-Samawal

Chapitre 2

Suites réelles

I. Rappels et compléments sur les limites de suites

Activité 1

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la limite de la suite (u_n).

1. $u_n = \frac{1}{n}, n \geq 1.$ 2. $u_n = n^2 + 1, n \geq 0.$ 3. $u_n = 10^n, n \geq 0.$

Activité 2

On désigne par (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{1-(-1)^n}{2n+(-1)^n}, n \geq 1.$

1. Donner l'expression de u_{2n} et u_{2n+1}.
2. Que peut-on dire de la limite de u_n ?

Théorème (admis)

Soit (u_n) une suite réelle et a fini ou infini.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$, si et seulement si, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n} = a$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n+1} = a$.

Activité 3

Etudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}, n \geq 1.$

Activité 4

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = (-1)^n$.

1. Montrer que (u_n) est bornée.
2. La suite (u_n) est-elle convergente ?

Activité 5

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = \frac{n}{2n+2}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
2. La suite (u_n) est-elle bornée ?

Théorème (admis)

Toute suite convergente est bornée.

Opérations sur les limites de suites

Soit a et b deux réels.
Les résultats qui suivent concernent les opérations sur les limites de suites réelles.

Soit deux suites (u_n) et (v_n) et deux réels a et b.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$
a	b	$a+b$
$+\infty$	b	$+\infty$
$-\infty$	b	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n.v_n)$
a	b	$a\,b$
∞	$b\neq 0$	∞ (on applique la règle des signes)
∞	∞	∞ (on applique la règle des signes)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$
a	$b\neq 0$	$\frac{a}{b}$
∞	b	∞ (on applique la règle des signes)
a	$+\infty$	0
a	$-\infty$	0
$a\neq 0$	0	∞ (on applique la règle des signes)

Activité 6

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la limite de la suite (u_n).

1. $u_n = \dfrac{1}{2-\dfrac{1}{\sqrt{n}}} - 3n^3, \quad n \geq 1.$
2. $u_n = \left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{2}\right)\left(n^3+3n-1\right), \quad n \geq 1.$
3. $u_n = -\dfrac{1}{n} + \sqrt{\dfrac{5n+3}{2n+9}}, \quad n \geq 1.$
4. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{4n+1}}\sqrt{n+\dfrac{1}{2}}, \quad n \geq 0.$

II. Suites géométriques et applications

Activité 1

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer la limite de la suite (u_n).

1. $u_n = \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$, $n \geq 0$.
2. $u_n = \left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^n$, $n \geq 0$.
3. $u_n = \left(\sqrt{\pi}\right)^n$, $n \geq 0$.

Théorème (Rappel)

Soit (u_n) une suite géométrique définie par $u_n = q^n$, $n \geq 0$, où q est un réel non nul.

- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Si $q \leq -1$, alors la suite (u_n) n'a pas de limite.
- Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante.

Activité 2

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la limite de la suite (u_n).

1. $u_n = \dfrac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1-n^3}$, $n \geq 2$.
2. $u_n = \dfrac{(-2)^n - 3}{4(-2)^n + 5}$, $n \geq 0$.
3. $u_n = 1 + \dfrac{5}{3} + \ldots + \left(\dfrac{5}{3}\right)^n$, $n \geq 0$.
4. $u_n = -3 - \dfrac{9}{\pi} - \ldots - 3\left(\dfrac{3}{\pi}\right)^n$, $n \geq 0$.

Activité 3

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = 2u_n - 1, n \geq 0. \end{cases}$

1. Déterminer la solution α de l'équation $x = 2x - 1$.
2. On désigne par (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - \alpha$, $n \geq 0$.
   Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice résolu 1

Soit la fonction $f : x \mapsto 1 + \dfrac{2}{x+1}$.

1. Déterminer les réels x tels que $f(x) = x$.
2. Montrer que pour tous réels x et y différents de -1, $f(x) - f(y) = \dfrac{2(y-x)}{(x+1)(y+1)}$.
3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \geq 0$.
   a. Montrer que pour tout entier n, u_n est positif.

b. Représenter la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, ainsi que la droite d'équation $y = x$.

c. Calculer et représenter les réels u_1, u_2 et u_3 sur l'axe $\left(O,\vec{i}\right)$.

4. On pose pour tout entier n, $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$.

a. A l'aide de la question 2, montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b. En déduire l'étude de la convergence de la suite (u_n).

Solution

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Pour déterminer les points fixes de f, il suffit de résoudre l'équation $f(x) = x$.

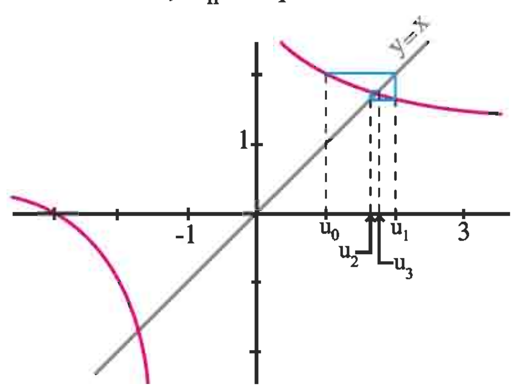
On obtient $f\left(\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}$ et $f\left(-\sqrt{3}\right) = -\sqrt{3}$.

2. Pour tous réels x et y différents de -1, on peut écrire $f(x) - f(y) = \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{y+1}$,

ou encore que $f(x) - f(y) = \dfrac{2(y-x)}{(x+1)(y+1)}$

3. a. Le réel $u_0 = 1$ est positif. Supposons que u_n est positif. Il en résulte que $u_n + 1$ et $f(u_n)$ sont positifs. Ce qui prouve que pour tout entier n, u_n est positif.

b. On a représenté ci-contre la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, ainsi que la droite d'équation $y = x$.



c. Le calcul donne $u_1 = 2$, $u_2 = \dfrac{5}{3}$ et $u_3 = \dfrac{7}{4}$.

4. a. On peut écrire pour tout entier n,

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sqrt{3}}{u_{n+1} + \sqrt{3}} = \frac{f(u_n) - f\left(\sqrt{3}\right)}{f(u_n) - f\left(-\sqrt{3}\right)}.$$

En utilisant la question 2, on obtient $v_{n+1} = \left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right) v_n$.

Ce qui prouve que (v_n) est une suite géométrique de raison $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)$ et de premier terme $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)$.

b. La suite (v_n) converge vers 0 car $\left|\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right|<1$.

On peut écrire pour tout entier n, $u_n=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}v_n}{1-v_n}$.

On en déduit que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{3}$.

III. Suites du type $v_n=f(u_n)$

Théorème (admis)

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et (u_n) une suite d'éléments de I.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ (fini ou infini) et si $\lim\limits_{x\to\ell} f(x)=L$ (fini ou infini), alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(u_n))=L$.

Activité 1

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la limite de la suite (u_n).

1. $u_n=\sin\left((0.75)^n\right)$, $n\geq 1$.
2. $u_n=n\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$, $n\geq 1$.
3. $u_n=\cos\left(\frac{\pi n}{2n+1}\right)$, $n\geq 0$.
4. $u_n=\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)+1}{n}$, $n\geq 1$.

IV. Limites et ordre

Activité 1

On considère la suite (v_n) définie par $v_n=\frac{n+\cos n}{n^2+1}$, $n\geq 1$.

1. Montrer que pour tout $n\geq 1$, $\frac{n-1}{n^2+1}\leq v_n\leq\frac{n+1}{n^2+1}$.
2. Déterminer une valeur approchée à 10^{-5} des réels v_{1000} et v_{10^6}.
3. Que peut-on conjecturer sur $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$?

Activité 2

1. Montrer que pour tout entier $n\geq 4$, $2^n\geq n^2$.
2. En déduire que tout entier $n\geq 4$, $\frac{2^n}{n}\geq n$.
3. Que peut-on conjecturer sur $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^n}{n}$?

Nous admettons les résultats ci-dessous qui nous permettent de trouver la limite d'une suite par comparaison avec d'autres suites dont on connaît les limites.

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) des suites réelles, a et b deux réels.

Si $u_n \leq v_n$, $n \geq N_0$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$, alors $a \leq b$.

Si $v_n \leq u_n \leq w_n$, $n \geq N_0$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

Si $0 \leq |u_n| \leq v_n$, $n \geq N_0$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Si $u_n \leq v_n$, $n \geq N_0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Si $u_n \leq v_n$, $n \geq N_0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Activité 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n} + \cos^2 n}$, $n \geq 0$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Activité 4

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = \dfrac{10^n}{n!}$.

1. Montrer que $0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{10}{11}$ pour tout entier $n \geq 10$.
2. Montrer alors que $0 < u_n \leq \left(\dfrac{10}{11}\right)^{n-10} u_{10}$, $n \geq 10$.

   En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.
3. A l'aide de la calculatrice, déterminer un entier naturel n_0 pour que $|u_n| \leq 10^{-6}$, $n \geq n_0$.

Activité 5

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la limite de la suite (u_n).

1. $u_n = (3n+1)^n$, $n \geq 1$.
2. $u_n = \dfrac{n^3}{2 + \sin 3n}$, $n \geq 1$.
3. $u_n = n^3(\sin n - 3)$, $n \geq 1$.
4. $u_n = \dfrac{n + \sin^2(2n)}{n^3}$, $n \geq 1$.

Activité 6

1. Ecrire les sommes suivantes en utilisant le symbole $\sum$.

a. $A = 1+2+3+...+n$.

b. $B = -\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+...-\frac{1}{512}$.

2. Calculer les sommes suivantes.

$$C = \sum_{k=10}^{500} 1 \quad ; \quad D = \sum_{k=0}^{20} (3k-1) \quad ; \quad E = \sum_{k=3}^{10} 10^{-k} .$$

On note $\sum_{k=1}^{n} a_k$ et on lit «sigma pour k variant de 1 à n des réels a_k» le réel obtenu en faisant la somme des réels $a_1, a_2, ..., a_n$.

On a donc $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

Activité 7

1. Vérifier que pour tout entier non nul k, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

2. En déduire la limite de la suite (w_n) définie par $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$, $n \geq 1$.

V. Convergence des suites monotones

Activité 1

Soit la suite (w_n) définie par $w_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + ... + \frac{n}{n^2}$, $n \geq 1$.

1. a. Montrer que $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \geq 1$.

b. Vérifier que la suite (w_n) est décroissante et minorée.

c. Montrer que (w_n) est convergente et déterminer sa limite.

2. Soit la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + ... + \frac{n}{n}$, $n \geq 1$.

a. Vérifier que la suite (v_n) est croissante.

b. La suite (v_n) est-elle convergente ?

Théorème (admis)

Soit (u_n) une suite définie pour $n \geq 0$.

Si la suite (u_n) est croissante et majorée, alors elle converge vers un réel a et pour tout $n \geq 0,\ u_n \leq a$.

Si la suite (u_n) est croissante et non majorée alors elle tend vers $+\infty$.

Si la suite (u_n) est décroissante et minorée, alors elle converge vers un réel b et pour tout $n \geq 0,\ u_n \geq b$.

Si la suite (u_n) est décroissante et non minorée alors elle tend vers $-\infty$.

Activité 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}},\ n \geq 1$.

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1,\ u_n \geq \sqrt{n}$.
3. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
4. Montrer alors que la suite (u_n) est non majorée.

VI. Suites récurrentes

Activité 1

On considère la suite (u_n) telle que pour tout $n \geq 1,\ u_{n+1} = u_n(u_n - 1)$.

Pour chacun des cas suivants, à l'aide d'un tableur, calculer les dix milles premiers termes de la suite (u_n) puis conjecturer sa limite.

• $u_1 = 0$ • $u_1 = 2$ • $u_1 = 1$ • $u_1 = -1$ • $u_1 = 0.5$ • $u_1 = 4$.

Théorème

Soit une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n),\ n \geq 0$ où f est une fonction.

Si la suite (u_n) est convergente vers un réel a et si la fonction f est continue en a alors $a = f(a)$.

Démonstration

Il est clair que si la suite (u_n) converge vers un réel a, alors la suite (u_{n+1}) converge aussi vers a.

De plus, f étant continue en a, alors $(f(u_n))$ tend vers $f(a)$.

Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \geq 0$, et par unicité de la limite il vient alors que $a = f(a)$.

Activité 2

Soit la suite (a_n) définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$, $n \geq 0$.

1. Montrer que la suite (a_n) est croissante et majorée par 2.
2. Déterminer sa limite.

Activité 3

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0.25$ et $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$, $n \geq 0$.

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
2. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $0 \leq u_n \leq 1$.
3. Déterminer la limite de (u_n).

VII. Suites adjacentes

Définition et théorème

Deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes lorsqu'elles vérifient les conditions

- pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq v_n$,
- la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante,
- la suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0.

Dans ce cas les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

Démonstration

La suite (v_n) étant décroissante, il vient que $u_n \leq v_n \leq v_0$, $n \geq 0$.

On en déduit que la suite (u_n) est majorée par v_0. De plus elle est croissante, on en déduit qu'elle converge vers un réel a.

De même la suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0.

Donc la suite (v_n) converge vers un réel b.

En écrivant $v_n = (v_n - u_n) + u_n$, $n \geq 0$, et en passant à la limite, on obtient $b = a$.

Ainsi les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

Exercice résolu 2

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$.

1. Montrer que la suite (u_{2n}) est croissante et que la suite (u_{2n+1}) est décroissante.
2. Comparer u_{2n} et u_{2n+1}, pour tout entier $n \geq 1$ et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_{2n} - u_{2n+1})$.
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente vers un réel α.
4. a. Vérifier que $u_{2n} \leq \alpha \leq u_{2n+1}$.

   b. Calculer u_4 et u_5 et donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Solution

1. Pour tout entier $n \geq 1$,

$$u_{2n+2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{2n}} + \frac{(-1)^{2n+2}}{\sqrt{2n+1}} + \frac{(-1)^{2n+3}}{\sqrt{2n+2}} = u_{2n} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+2}}.$$

L'inégalité $\frac{1}{\sqrt{2n+1}} > \frac{1}{\sqrt{2n+2}}$ implique que $u_{2(n+1)} > u_{2n}$, ou encore que la suite (u_{2n}) est croissante.

De même, $u_{2n+3} = u_{2n+1} - \frac{1}{\sqrt{2n+2}} + \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$, $n \geq 0$.

L'inégalité $\frac{1}{\sqrt{2n+3}} < \frac{1}{\sqrt{2n+2}}$ implique que $u_{2n+3} < u_{2n+1}$, ou encore que la suite (u_{2n+1}) est décroissante.

2. On peut écrire $u_{2n+1} = u_{2n} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $n \geq 1$. On en déduit que $u_{2n} < u_{2n+1}$, $n \geq 1$.

L'égalité $u_{2n+1} = u_{2n} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ implique que $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_{2n} - u_{2n+1}) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{2n+1}} = 0$.

3. On déduit des questions précédentes que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.
Par suite, elles convergent vers la même limite α.
La convergence de la suite (u_n) vers α découle de la convergence de chacune des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) vers α.

4. a. Le théorème relatif aux limites des suites monotones, nous permet d'affirmer que $u_{2n} \leq \alpha \leq u_{2n+1}$, pour tout entier $n \geq 1$.

b. Le calcul donne $\alpha \simeq 0.817$.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{n^2+2}{n}$.

☐ (u_n) est bornée. ☐ $u_n \geq n$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$. ☐ (u_n) est majorée par 1.

2. On donne $u_n = \dfrac{n+\cos n}{n+1}$.

☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.$ ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1.$ ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1.$

3. Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.$ ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$ ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1.$

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Si (u_n) prend un nombre fini de valeurs alors (u_n) est convergente.
2. Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles.
   a. Si (u_n) et (v_n) sont convergentes alors (u_n+v_n) est convergente.
   b. Si (u_n+v_n) est convergente alors (u_n) et (v_n) sont convergentes.
3. Si la suite $\left(u_n{}^2\right)$ converge vers L, alors on peut affirmer que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{L}$ ou vers $-\sqrt{L}$.
4. Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $\lim\limits_{+\infty} u_n = \lim\limits_{+\infty} v_n$ alors (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
5. Soit (u_n) une suite réelle telle que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes alors (u_n) est convergente.

1 Etudier la limite de chacune des suites ci-dessous.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n-1}{n+2}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n-1}{3n+2}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2-n+2}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^3-2n^2+1$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n-1}{|-n+2|}$;

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n^2+1}{|-n-1|}}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$.

2 On considère la suite (a_n) définie par

$a_n = \frac{n\left(1+(-1)^n\right)}{n^2+1}$, $n \geq 0$.

1. Déterminer a_{2n} et a_{2n+1}.
2. En déduire que la suite (a_n) est convergente et calculer sa limite.

3 On considère la suite (a_n) définie par

$a_n = \frac{n\left(1+(-1)^n\right)}{n+1}$, $n \geq 0$.

1. Déterminer a_{2n} et a_{2n+1}.
2. La suite (a_n) est-elle convergente ?

4 Etudier la limite de chacune des suites ci-dessous.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\left(\frac{1}{3}\right)^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3+2^n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n}{2^n+1}$.

5 On considère la suite (u_n) définie par

$u_n = \frac{2^n}{(-5)^{n+1}}$, $n \geq 0$.

Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

6 Déterminer, dans chacun des cas, la limite de la suite (u_n).

$u_n = \sin n + n$, $n \geq 0$; $u_n = \frac{1}{n}\left(\sin n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$, $n \geq 1$.

$u_n = -1 + \frac{1}{n^2}(\cos n + n)$, $n \geq 1$.

7 1. On considère la suite (u_n) définie par

$u_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$.

Montrer que $u_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$. En déduire sa limite.

2. Déterminer la limite de la suite (v_n) définie par

$v_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$

8 On considère la suite (u_n) définie par

$u_n = \left(\frac{2}{n}\right)^n$, $n \geq 1$.

1. Montrer que pour $n \geq 4$, $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

9 On considère la suite (w_n) définie par

$w_n = \frac{n!}{3^n}$, $n \geq 0$.

1. Montrer que $\frac{w_{n+1}}{w_n} \geq \frac{4}{3}$, $n \geq 3$.
2. En déduire que $w_n \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{n-3} w_3$, $n \geq 3$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

10 On considère la suite (u_n) définie par

$u_n = \frac{n}{3^n}$, $n \geq 0$.

1. a. Placer dans un repère orthogonal les points $A_i(i, u_i)$, $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

b. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{2}{3}$, $n \geq 1$.

c. En déduire que $u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$, $n \geq 0$.

d. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

2. On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, $n \geq 0$.

a. Montrer que $S_n \leq 2$.

b. En déduire que la suite (S_n) est convergente.

11 Soit un réel $a > 0$ et (b_n) la suite définie pour tout entier non nul n par $b_n = \frac{n}{(1+a)^n}$.

1. Montrer, en utilisant la formule du binôme que $(1+a)^n \geq \frac{n(n-1)a^2}{2}$.

2. En déduire la limite de (b_n).

3. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison q telle que $0 < q < 1$.

Montrer qu'il existe un réel $a > 0$ tel que $q = \frac{1}{1+a}$.

Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} n|x_n| = 0$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} nx_n$.

4. Calculer les limite suivantes

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$; $\lim\limits_{n \to +\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}$;

$\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

12 Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n}, \ n \geq 1. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1, 0 \leq u_n \leq 3$.

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

13 Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

1. Etudier les variations de f et déterminer $f(]0,+\infty[)$.

2. Représenter la fonction f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, ainsi que la droite d'équation $y = x$.

3. On note $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, montrer que $f(\varphi) = \varphi$.

4. On se propose de construire une suite (x_n) de rationnels qui converge vers φ.

On pose $x_0 = 2$ et $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 0$.

a. Calculer et représenter les réels x_1, x_2, x_3 et x_4.

b. Montrer que pour tout entier n, x_n est un rationnel positif.

c. Montrer que $|x_{n+1} - \varphi| \leq \frac{4}{9}|x_n - \varphi|$.

d. Conclure.

14 Soit (u_n) la suite définie par

$u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $n \geq 1$.

1. a. Calculer u_1, u_2 et u_3.

b. Montrer que (u_n) est croissante.

2. a. Vérifier que pour tout entier naturel $k \geq 2$, on a $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

b. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

c. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ et que $\frac{49}{36} \leq \ell \leq 2$.

15 Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{4x-3}{x}$.

1. Etudier les variations de f et tracer sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit la suite (u_n) telle que

$$\begin{cases} u_0 \in]0,+\infty[, \\ u_{n+1}=\frac{4u_n-3}{u_n}, \ n\geq 0. \end{cases}$$

2. On suppose que $u_0=\frac{3}{4}$.

a. Calculer u_1 et représenter u_0 et u_1.

b. La suite (u_n) est-elle définie ?

3. On suppose que $u_0=3$.

a. Représenter u_1, u_2 et u_3.

b. Montrer que la suite (u_n) est constante.

4. On suppose que $u_0=5$.

a. Représenter u_0, u_1, u_2 et u_3.

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que pour tout $n\geq 1, u_n\geq 3$.

c. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel α que l'on déterminera.

d. A l'aide d'une calculatrice, déterminer n_0 pour que $u_n-\alpha\leq 10^{-5}, n\geq n_0$.

16 On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_1=5, \\ u_{n+1}=5-\frac{6}{u_n}, \ n\geq 1. \end{cases}$$

1. Calculer u_2 et u_3.

2. Montrer que pour tout $n\geq 0$,

$$u_{n+1}=\frac{3^{n+2}-2^{n+2}}{3^{n+1}-2^{n+1}}.$$

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

17 Soit (a_n) et (b_n) les suites définies par

$$\begin{cases} a_0=1, \\ a_{n+1}=a_n^2+a_n, \ n\geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0=-0.5, \\ b_{n+1}=b_n^2+b_n, \ n\geq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que $a_n\geq n$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

2. a. Montrer que la suite (b_n) est bornée par -1 et 0.

b. Montrer que (b_n) est croissante.

c. En déduire que (b_n) converge et déterminer sa limite.

18 Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0=0.1, \\ u_{n+1}=1.6u_n(1-u_n), \ n\geq 0. \end{cases}$$

1. Etudier les variations de la fonction $f: x\mapsto 1.6x(1-x)$.

2. Montrer que pour tout $n\geq 0,\ 0.1\leq u_n\leq\frac{3}{8}$.

3. En déduire que la suite (u_n) converge.

4. a. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$\frac{3}{8}-u_{n+1}=1.6\left(\frac{5}{8}-u_n\right)\left(\frac{3}{8}-u_n\right).$$

b. On pose pour tout entier naturel n, $v_n=\frac{3}{8}-u_n$.

Montrer que $v_n\geq 0$ et en déduire que $\frac{v_{n+1}}{v_n}\leq 0.84$.

c. Montrer alors par récurrence que pour tout entier naturel n, $0\leq v_n\leq 0.84^n$.

d. En déduire la limite de (u_n).

e. Déterminer un entier naturel n_0 tel que $0\leq\frac{3}{8}-u_n\leq 10^{-5}, n\geq n_0$.

19 Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{x}\right)$.

1. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$,

$$f'(x)=\frac{\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)}{2x^2}.$$

En déduire les variations de f.

2. On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0=3, \\ u_{n+1}=f(u_n),\ n\geq 0. \end{cases}$$

a. Montrer que pour tout entier n,

$\sqrt{5}<u_{n+1}<u_n\leq 3$.

En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

20 Pour chacun des cas suivants, dire si les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

1. $u_n=\frac{2}{n},\ v_n=-\frac{3}{n},\ n\geq 2$.
2. $u_n=\frac{n+2}{n-1},\ v_n=\frac{2n+3}{2n+5},\ n\geq 4$.
5. $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n},\ v_n=\sqrt{n}-\sqrt{n+1},\ n\geq 1$.

21 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0=12,\ v_0=1,\ u_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}$,

$v_{n+1}=\frac{u_n+3v_n}{4},\ n\geq 0$.

1. Montrer que la suite (u_n-v_n) est géométrique, on précisera sa raison et son premier terme.
2. Montrer que pour tout $n\geq 0$, $u_n\geq v_n$.
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et qu'elles convergent vers la même limite α.
4. On pose pour tout $n\geq 0$, $t_n=3u_n+8v_n$.

a. Montrer que (t_n) est une suite constante.

b. En déduire la valeur de α.

22 1. Soit a et b deux réels tels que $0<b<a$.

a. Montrer que $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$.

b. Montrer que $(a-b)^2\leq a^2-b^2$.

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par

$a_0=a,\ b_0=b,\ a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$,

$b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n},\ n\geq 0$.

2. a. Montrer que pour tout $n\geq 0$, $b_n\leq a_n$.

b. Montrer que la suite (a_n) est décroissante et que la suite (b_n) est croissante.

3. a. Montrer que pour tout $n\geq 0$,

$$\left(a_{n+1}-b_{n+1}\right)^2\leq\left(\frac{a_n-b_n}{2}\right)^2.$$

b. Montrer que pour tout $n\geq 0$, $a_n-b_n\leq\frac{a-b}{2^n}$.

4. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et qu'elles convergent vers la même limite α.

5. On suppose que a = 2 et b = 1.

Déterminer un entier n permettant d'obtenir un encadrement de α d'amplitude 10^{-10}.