Chapitre 6

Primitives

" Nous appellerons la fonction fx, fonction primitive, par rapport aux fonctions f'x, f''x, &c.qui en dérivent, et nous appellerons celles-ci, fonctions dérivées, par rapport à celle-là"

(Lagrange, 1797)
(Cité dans E.Haier et al, L'analyse au fil de l'histoire, 2000)

Chapitre 6

Primitives

I. Définition

Activité 1

Soit les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2+4x-1$ et $F(x)=x^3+2x^2-x+2$.
Vérifier que $F'=f$.
Déterminer une fonction G dérivable sur $\mathbb{R}$ et distincte de F telle que $G'=f$.

Définition

Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I. On dit que F est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I et $F'(x)=f(x)$, pour tout x de I.

Activité 2

Dans chacun des cas ci-dessous, vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

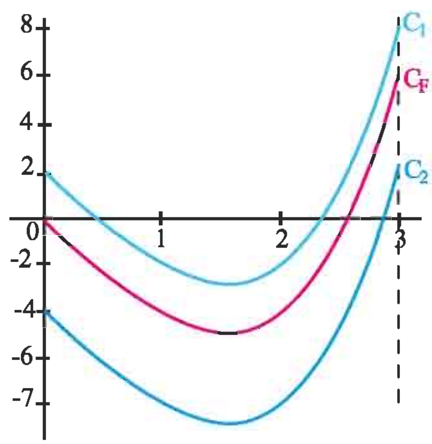
1. $F(x)=\frac{1}{x}$; $f(x)=-\frac{1}{x^2}$; $I=[1,+\infty[$.
2. $F(x)=x^2$; $f(x)=2x$; $I=\mathbb{R}$.
3. $F(x)=\tan x$; $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$; $I=]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Théorème (admis)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.

Activité 3

Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a représenté la courbe C_F de la fonction F définie sur $[0, 3]$ par
$F(x)= x^3-x^2-4x$.
Les courbes C_1, C_2 sont les images respectives de C_F par des translations de vecteurs colinéaires à $\vec{j}$.



On désigne par G_1, G_2 les fonctions de courbes respectives C_1, C_2.

1. Déterminer la dérivée f de F. Que représente F pour f ?
2. Déterminer G_1, G_2 .
3. Soit H une primitive de f sur $[0, 3]$. Justifier que la courbe de H est l'image de celle de F par une translation.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Si F et G sont deux primitives de f sur I, alors la fonction $F-G$ est constante sur I.

Démonstration

Les fonctions F et G étant des primitives de f sur I, il en résulte que $F'(x)-G'(x)=0$, pour tout x de I. Ce qui implique que $F-G$ est constante sur I.

Corollaire

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit x_0 un réel de I et y_0 un réel. Alors il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0)=y_0$.

Démonstration

L'unicité découle du théorème précédent.
D'autre part, soit G une primitive de f sur I.
La fonction F définie sur I par $F(x)=G(x)-G(x_0)+y_0$ est la primitive de f qui prend la valeur y_0 en x_0.

Activité 4

On considère les fonctions f, g et h définies sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2}{(x+2)^2} \;;\; g:x\mapsto \sin x+\cos x \;;\; h:x\mapsto \sin x-\cos x.$$

Identifier parmi les fonctions suivantes celles qui sont des primitives sur $]0, +\infty[$ de l'une des fonctions précédentes.

$$F_1 : x\mapsto 2\sqrt{x}-\frac{2}{x+2}-4 \;;\; F_2 : x\mapsto \pi-\sin x-\cos x \;;\; F_3 : x\mapsto -\sin x-\cos x-1 \;;$$

$$F_4 : x\mapsto \sin x-\cos x+\pi \;;\; F_5 : x\mapsto \sin x-\cos x.$$

Activité 5

Soit F et f les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^2$ et $f(x)=\sqrt{x}-x$

1. Montrer que F est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer la primitive G de f sur $]0, +\infty[$ telle que $G(1)=2$.

II. Primitives des fonctions usuelles et opérations

Dans le tableau ci-dessous F désigne une primitive de la fonction f sur l'intervalle I et a, c, ω et φ des réels avec $\omega \neq 0$.

f	I	F
$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto ax + c$
$x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$	$]0, +\infty[$ (ou $]-\infty, 0[$)	$x \mapsto \dfrac{x^{-n+1}}{-n+1} + c$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0, +\infty[$	$x \mapsto \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + c$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c$
$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin x + c$
$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos x + c$
$x \mapsto \cos(\omega x + \varphi)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{1}{\omega}\sin(\omega x + \varphi) + c$
$x \mapsto \sin(\omega x + \varphi)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{\omega}\cos(\omega x + \varphi) + c$
$x \mapsto 1 + \tan^2 x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$	$x \mapsto \tan x + c$

Le théorème ci-dessous découle des opérations sur les fonctions dérivables.

Théorème

Soit F et G deux primitives respectives de deux fonctions f et g sur un intervalle I.

- La fonction $F + G$ est une primitive sur I de $f + g$.
- Soit λ un réel. La fonction λF est une primitive sur I de λf.

Activité 1

Déterminer, dans chaque cas, une primitive de f sur l'intervalle I.

1. $f : x \mapsto -2x^2 + 3x$, $\quad I = \mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto -\dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$, $\quad I =]0, +\infty[$.
3. $f : x \mapsto -2\cos x + 5\sin x$, $\quad I = \mathbb{R}$.
4. $f : x \mapsto \cos(-2x) + \sin(5x)$, $\quad I = \mathbb{R}$.

5. $f : x \mapsto 2+2\tan^2(x)$, $\quad I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

6. $f : x \mapsto \frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^4}$, $\quad I=[-3,-1]$.

Activité 2

La quantité d'une substance chimique produite au cours des dix premières secondes d'une expérience a été de 12g. Au bout de t secondes du début de l'expérience, le taux de production instantané (en g/s) de cette substance a été de $Q'(t)=\frac{40}{t^2}+\frac{200}{t^3}$, $t \geq 10$.

1. Déterminer la fonction Q qui à tout $t \geq 10$ associe la quantité $Q(t)$ produite au bout de t secondes.
2. Tracer dans un repère la courbe de la fonction Q.
3. Peut-on avoir 20 g de quantité produite ? Pourquoi ?

III. Calcul de primitives

Dans le tableau suivant F désigne une primitive de la fonction f sur un intervalle I et u et v désignent deux fonctions dérivables sur I.

f	Condition	F
$u'u^n$, n entier naturel non nul		$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$u'v+v'u$		$u.v$
$\frac{u'}{u^n}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$	u ne s'annule pas sur I	$\frac{u^{-n+1}}{-n+1}$
$\frac{u'v-v'u}{v^2}$	v ne s'annule pas sur I	$\frac{u}{v}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	u strictement positive sur I	$2\sqrt{u}$
$u'\sqrt{u}$	u positive sur I	$\frac{2}{3}u\sqrt{u}$
$u'(w'\circ u)$	w une fonction dérivable sur $u(I)$	$w \circ u$

Exercice résolu 1

Vérifier dans chaque cas que la fonction f possède des primitives sur l'intervalle I et déterminer sa primitive F telle que $F(x_0)=y_0$.

1. $f:x\mapsto(2x-1)(x^2-x+3)$, $I=\mathbb{R}$, $x_0=1$ et $y_0=2$.
2. $f:x\mapsto\dfrac{6x-1}{(3x^2-x)^2}$, $I=]1,+\infty[$, $x_0=2$ et $y_0=0$.
3. $f:x\mapsto\dfrac{\tan^2 x}{\cos^2 x}$, $I=\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, $x_0=-\dfrac{\pi}{4}$ et $y_0=-1$.

Solution

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et alors elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

De plus, f est de la forme $u'u$, où u est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=x^2-x+3$.
On en déduit que les primitives de f sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$F_c(x)=\dfrac{1}{2}(x^2-x+3)^2+c$, où c est un réel.

L'égalité $F(1)=2$ implique que la primitive cherchée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$F(x)=\dfrac{1}{2}(x^2-x+3)^2-\dfrac{5}{2}$.

2. La fonction f est continue sur $]1,+\infty[$ en tant que fonction rationnelle définie sur $]1,+\infty[$ et alors elle admet des primitives sur $]1,+\infty[$.

De plus, f est de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$, où u est la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $u(x)=3x^2-x$.

On en déduit que les primitives de f sont les fonctions définies sur $]1,+\infty[$ par

$F_c(x)=-\dfrac{1}{3x^2-x}+c$, où c est un réel.

L'égalité $F(2)=0$ implique que la primitive cherchée est la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par

$F(x)=-\dfrac{1}{3x^2-x}+\dfrac{1}{10}$.

3. La fonction f est continue sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle admet donc des primitives sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

De plus, f est de la forme $u'u^2$, où u est la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $u(x) = \tan x$.

On en déduit que les primitives de f sont les fonctions définies sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par

$F_c(x) = \frac{1}{3}\tan^3 x + c$, où c est un réel.

L'égalité $F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ implique que la primitive cherchée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$F(x) = \frac{1}{3}\tan^3 x - \frac{2}{3}$.

Activité 1

Vérifier dans chaque cas que la fonction f possède des primitives sur l'intervalle I et déterminer sa primitive F telle que $F(x_0) = y_0$.

1. $f : x \mapsto \frac{\tan^3 x}{\cos^2 x} + \sin x$, $\quad I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\quad x_0 = -\frac{\pi}{4}$ et $y_0 = -1$.
2. $f : x \mapsto 2\sqrt{x} + \frac{x+1}{2\sqrt{x}}$, $\quad I =]0, +\infty[$, $\quad x_0 = 1$ et $y_0 = -1$.
3. $f : x \mapsto \sqrt{2-x} + \frac{1}{(2-x)^2}$, $\quad I =]-\infty, 2[$, $\quad x_0 = 1$ et $y_0 = 0$.

Activité 2

Un physicien étudie le mouvement d'une particule.
La vitesse initiale de la particule est de 3m/s et t secondes après le début de l'expérience, son accélération (en cm/s²) est de $a(t) = 1 - \frac{1}{2\left(\sqrt{t+1}\right)^3}$.

1. Déterminer la vitesse de la particule t secondes après le début de l'expérience.
2. Déterminer la distance parcourue par la particule t secondes après le début de l'expérience.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $]2, +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x^3 - 11x^2 + 20x - 10}{(x-2)^2}$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$.
2. En déduire une primitive de f sur $]2, +\infty[$.

Activité 4

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin^2 x$.

   Utiliser l'égalité $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ pour déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\sin^3 x$.

   Utiliser l'égalité $\sin^3 x=\sin x\left(1-\cos^2 x\right)$ pour déterminer une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\mapsto\cos^2 x$.

   Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\mapsto\cos^3 x$.

Exercice résolu 2

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1+x^2}{1+x+x^2}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Etudier f et tracer C_f.

   b. En déduire que pour tout réel t de $[0,+\infty[$, $\frac{2}{3}\leq f(t)\leq 1$.

2. Soit F la primitive de f sur $[0,+\infty[$ qui s'annule en 0.

   a. Montrer que pour tout réel x de $[0,+\infty[$ on a $\frac{2}{3}x\leq F(x)\leq x$.

   b. En déduire la limite de F en $+\infty$.

   c. Dresser le tableau de variation de F.

3. a. Montrer que pour tout entier $m\geq 0$, il existe un unique réel x_m tel que $F(x_m)=m$.

   b. Etudier les variations de la suite (x_m) et en déduire sa limite.

Solution

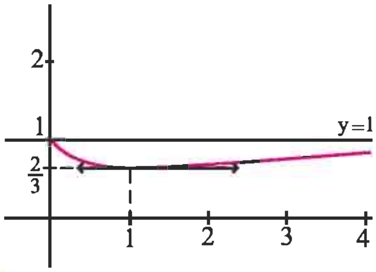
1. a. La fonction f est une fonction rationnelle et $1+x+x^2\neq 0$ pour tout réel x, donc f est continue et dérivable sur $[0,+\infty[$.

   Le calcul donne $f'(x)=\frac{x^2-1}{\left(1+x+x^2\right)^2}, x\geq 0$.

Tableau de variations de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	1

Courbe de f



b. D'après le tableau de variation de f, $\frac{2}{3} \leq f(t) \leq 1,\ t \in [0,+\infty[$.

2. a. La fonction F est une primitive de f sur $[0,+\infty[$, elle est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $F'(t) = f(t),\ t \geq 0$.

De la question 1. b on déduit que $\frac{2}{3} \leq F'(t) \leq 1,\ t \geq 0$.

On applique le théorème des inégalités des accroissements finis sur $[0, x],\ x > 0$.

Le résultat en découle.

b. Pour tout réel x de $[0,+\infty[$,

$\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{3}x = +\infty$.

Il en résulte que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

x	0	$+\infty$
$F'(x)$	$+$	
F	0	$\nearrow +\infty$

3. a. La fonction F est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$. Elle réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$.

On en déduit que pour tout entier $m \geq 0$, il existe un unique réel $x_m \geq 0$ tel que $F(x_m) = m$.

b. On peut écrire pour tout entier $m \geq 0$, $x_m = F^{-1}(m)$. La fonction F^{-1} étant strictement croissante de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$, on en déduit que la suite (x_m) est croissante et que $\lim\limits_{m\to+\infty} x_m = +\infty$.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. La fonction $x \mapsto \tan x$ est la primitive sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ qui s'annule en 0 de la fonction

☐ $x \mapsto 1+\tan^2 x$. ☐ $x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x}$. ☐ $x \mapsto \sin^2 x$.

2. La primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \sin x$, qui s'annule en 0 est la fonction

☐ $x \mapsto 1-\cos x$. ☐ $x \mapsto -\cos x$. ☐ $x \mapsto \cos x - 1$.

3. La primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 de la fonction $x \mapsto 1+\cos x$ est

☐ paire. ☐ impaire. ☐ ni paire ni impaire.

4. La primitive sur $]-1, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^3}$, qui s'annule en 0 est

☐ $x \mapsto \frac{1}{2(1-x)^2} - \frac{1}{2}$. ☐ $x \mapsto \frac{1}{4(1-x)^4} - \frac{1}{4}$. ☐ $x \mapsto \frac{-1}{2(1-x)^2} + \frac{1}{2}$.

5. La primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x\cos x$, qui prend la valeur 1 en 0 est

☐ $x \mapsto \frac{x^2}{2}\sin x + 1$. ☐ $x \mapsto x\sin x + \cos x$. ☐ $x \mapsto \cos x - x\sin x$.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. La primitive sur $\mathbb{R}$ d'une fonction continue est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction $x \mapsto \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^*, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} -\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^*, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

3. Si F est une primitive d'une fonction f sur $\mathbb{R}$ et G est une primitive d'une fonction g sur $\mathbb{R}$ alors F.G est une primitive de f.g sur $\mathbb{R}$.

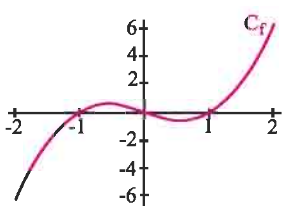
4. Si F est une primitive d'une fonction f sur $\mathbb{R}$ alors la fonction $x \mapsto F(2x)$ est une primitive de la fonction $x \mapsto f(2x)$ sur $\mathbb{R}$.

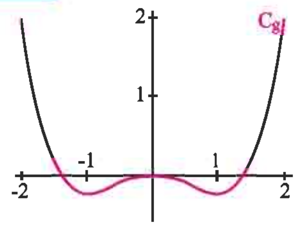
5. Si deux primitives d'une fonction f sur un intervalle I coïncident en un réel x_0 de I alors elles sont égales.

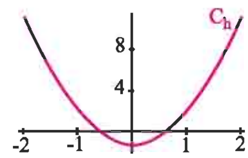
1 Déterminer les primitives F sur I de chacune des fonctions f ci-dessous.

1. $f : x \mapsto -5x^4 + 2x - 3,$ $\quad I = \mathbb{R}.$
2. $f : x \mapsto x + 2 - \dfrac{3}{x^2},$ $\quad I =]-\infty, 0[.$
3. $f : x \mapsto \dfrac{3x}{\left(3x^2+2\right)^2},$ $\quad I = \mathbb{R}.$
4. $f : x \mapsto (-x+3)^6,$ $\quad I = \mathbb{R}.$
5. $f : x \mapsto (x-1)\left(x^2 - 2x + 7\right)^4,$ $\quad I = \mathbb{R}.$
6. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{-4x+3}},$ $\quad I = \left]-\infty, \dfrac{3}{4}\right[.$
7. $f : x \mapsto \dfrac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}},$ $\quad I =]0, +\infty[.$
8. $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{\left(x^3+3x\right)^5},$ $\quad I = \left]-\infty, -\sqrt{3}\right[.$
9. $f : x \mapsto \sin(2x+1)\cos^4(2x+1),$ $\quad I = \mathbb{R}.$
10. $f : x \mapsto x^2 \sin\left(x^3+1\right),$ $\quad I = \mathbb{R}.$
11. $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{(\cos x + 1)^3},$ $\quad I =]-\pi, \pi[.$
12. $f : x \mapsto \dfrac{3x^2+4x-2}{x^4},$ $\quad I =]-\infty, 0[.$
13. $f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x}},$ $\quad I =]1, +\infty[.$
14. $f : x \mapsto \tan^2 x,$ $\quad I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[.$

2 On a représenté ci-dessous les courbes de trois fonctions g , f et h, définies et dérivables sur $[-2,2]$.







1. On sait que f admet une primitive parmi les fonctions g et h sur $[-2,2]$. Laquelle ? Justifier la réponse.
2. On sait que h admet une primitive parmi les fonctions f et g sur $[-2,2]$. Laquelle ? Justifier la réponse.

3 Déterminer une primitive sur I de chacune des fonctions ci-dessous.

1. $f : x \mapsto \sqrt{x+1},$ $\quad I = \mathbb{R}_+^*.$
2. $f : x \mapsto x\sqrt{x^2+1},$ $\quad I = \mathbb{R}.$
3. $f : x \mapsto (x-3)\sqrt{x^2-6x},$ $\quad I = [6, +\infty[.$
4. $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}},$ $\quad I =]1, +\infty[.$

(On pourra écrire $f(x)$ sous la forme

$a\sqrt{x-1} + \dfrac{b}{\sqrt{x-1}}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$).

5. $f : x \mapsto \left(x^2+x\right)^7\left(x+\dfrac{1}{2}\right),$ $\quad I = \mathbb{R}.$
6. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{3+x}{2x}},$ $\quad I = \mathbb{R}_+^*.$
7. $f : x \mapsto x(x+1)^{2008},$ $\quad I = \mathbb{R}.$

(On pourra vérifier que $f(x) = (x+1)^{2009} - (x+1)^{2008}$).

4 Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f possède des primitives sur l'intervalle I et déterminer sa primitive F vérifiant $F\left(x_0\right) = y_0$.

1. $f(x) = \tan x + \tan^3 x,$ $\quad I = [0, \dfrac{\pi}{2}[,$ $\quad F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1.$

2. $f(x)=\cos x-\cos^3 x$, $I=\mathbb{R}$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

3. $f(x)=\sin x-\sin^3 x$, $I=\mathbb{R}$, $F\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2$.

4. $f(x)=\frac{1+\tan x}{\cos^2 x}$, $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

5 1. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par
$f(x)=\cos x.\cos(3x)$ et $g(x)=\sin x.\sin(3x)$.
a. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions $f+g$ et $f-g$.
b. En déduire les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions f et g.
2. Déterminer la primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en π de la fonction h définie par
$h(x)=(1+\cos x)\sin(4x)$.

6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x)=x\sin x$.
1. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $f(x)=2\cos x-f''(x)$.
2. En déduire la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en π.

7 Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par
$f(x)=\frac{x^2+2}{(x+1)^4}$.
On se propose de déterminer des réels a, b, c et d tels que pour tout x de $]-1,+\infty[$,
$f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{c}{(x+1)^3}+\frac{d}{(x+1)^4}$.
1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)^4 f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)f(x)$.
b. En déduire que $d=3$ et $a=0$.
2. a. Vérifier que pour tout réel x de $]-1,+\infty[$,
$\frac{x-1-c}{(x+1)^3}=\frac{b}{(x+1)^2}$.
b. En déduire les valeurs des réels b et c.
3. Déterminer la primitive de f sur $]-1,+\infty[$ égale 2 en 0.

8 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par
$f(x)=\frac{2x+1}{(x-2)^3}$.
1. Déterminer les réels a et b tels que pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $f(x)=\frac{a}{(x-2)^2}+\frac{b}{(x-2)^3}$.
2. En déduire une primitive de f sur $]-\infty,2[$.

9 On considère la fonction f définie sur $]-1,1[$ par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Soit F la primitive de f sur $]-1,1[$ qui s'annule en 0, et g la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=F(\sin x)$.
1. Montrer que g est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et déterminer sa fonction dérivée.
2. En déduire que pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $g(x)=x$.
3. Calculer $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $F\left(\frac{1}{2}\right)$ et $F\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

10 On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.
Soit F la primitive de f sur $[0,1]$ qui s'annule en 0, et g la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x)=F(\cos x)$.
1. Montrer que g est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et déterminer sa fonction dérivée.
2. En déduire que pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,
$g(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{\pi}{4}$.
3. Calculer $F(1)$ et $F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

11 Déterminer toutes les fonctions deux fois dérivable sur I telles que :
1. $f''(x)=0$, $I=\mathbb{R}$.
2. $f''(x)=\sin x$, $I=\mathbb{R}$.

12 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x)=|x|$.

a. Montrer que f admet au moins une primitive sur $\mathbb{R}$.
b. Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 0 en 4.
2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
$g(x)=|x|+|x-1|$.
a. Montrer que g admet au moins une primitive sur $\mathbb{R}$.
b. Déterminer une primitive G de g sur $\mathbb{R}$.

13 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x)=\sin^3 x+\sin^5 x$.

Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

14 Un mobile sur un axe subit une accélération $a(t)$ dépendant du temps t (en secondes) tel que

$a(t)=1-\dfrac{1}{(t+1)^2}$, $t\in[0,10]$.

A l'instant $t=0$, le mobile est placé à l'origine de l'axe avec une vitesse nulle.
1. Déterminer l'expression de sa vitesse instantanée $v(t)$.
2. Déterminer sa vitesse et sa position pour $t=10$.

15 Soit f la fonction définie sur $[-2,2]$ par

$f(x)=\sqrt{4-x^2}$.

1. a. Montrer que f admet au moins une primitive sur $[-2,2]$.
b. Soit F la primitive de f sur $[-2,2]$ qui s'annule en 0. Etudier la parité de F.
2. Soit G la fonction définie sur $[0,\pi]$, par $G(x)=F(2\cos x)$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a. Montrer que le point $I\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$ est un centre de symétrie de C.
b. Calculer $G'(x)$. En déduire que pour tout x de $[0,\pi]$, $G(x)=\pi-2x+\sin 2x$.
c. Calculer alors $F(1)$, $F(2)$ et $F(\sqrt{2})$.

16 Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$u(x)=x+\sqrt{x^2+1}$.

1. Exprimer $\sqrt{x^2+1}$ à l'aide de $u(x)$ et $u'(x)$.
2. Déterminer des primitives pour chacune des fonctions ci-dessous.

$$f : x \mapsto \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}.$$

$$g : x \mapsto \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

17 Soit les fonctions $f : x \mapsto x\cos x$ et $g : x \mapsto x\sin x$.

1. En calculant $f'(x)+g(x)$, trouver une primitive G de g sur $\mathbb{R}$.
2. En procédant de même, déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

18 Pour tout entier naturel n supérieur à 2, on considère la fonction P_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$P_n(x)=1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}$.

1. Déterminer la primitive F_n de P_n sur $\mathbb{R}$ égale à 1 en 0.
2. Déduire une autre expression de $P_n(x)$.

19 1. Soit g la fonction définie sur $[0,\pi]$ par

$g(x)=x\sin x+\cos x-1$.

a. Etudier les variations de g sur $[0,\pi]$.
b. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution α appartenant à $\left]\dfrac{2\pi}{3},\pi\right[$.
Préciser le signe de $g(x)$.
2 Soit f la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x} & \text{si } x\in]0,\pi],\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

a. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
b. Etudier les variations de f sur $[0,\pi]$.
c. Vérifier que $f(\alpha)=\sin\alpha$.

3. On donne $\alpha \simeq 2{,}34$ et $f(\alpha) \simeq 0{,}72$.
Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4. Déduire de ce qui précède que la restriction de f à $[\alpha, \pi]$ est une bijection de $[\alpha, \pi]$ sur un intervalle I que l'on précisera.

5. On pose $h(x) = g(x) - 2\cos x$, $x \in [0, \pi]$.
Montrer que h admet des primitives sur $[0, \pi]$.
Donner la primitive H de h sur $[0, \pi]$ qui prend la valeur 1 en 0.

20 Pour tout réel x, on pose $\varphi(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et on désigne par G la primitive de φ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

1. Montrer que G est une fonction impaire.
2. a. On pose pour tout x de $\mathbb{R}^*$,
$\psi(x) = G(x) + G\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Montrer que ψ est constante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \Psi(x) = 2G(1)$.
b. On pose $u(t) = G(\tan t), t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
Calculer $u'(t)$ et en déduire $u(t)$.
3. Déterminer $G(1)$ et en déduire
$\lim\limits_{x \to +\infty} \psi(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x)$.
4. Construire la courbe représentative de G dans un repère orthonormé.

21 Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par
$f(x) = \sqrt{1 + \cos x}$.

1. a. Montrer que f est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[0, \sqrt{2}]$.
b. Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur $]0, \sqrt{2}[$ et expliciter $\left(f^{-1}\right)'(x)$.
2. Soit g la fonction définie sur $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ par
$g(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2 - x^2}}$.
On note G la primitive de g sur $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ telle que $G(0) = 0$.
a. Calculer la dérivée de la fonction
$x \mapsto G(x) + G(-x)$. En déduire que G est impaire.
b. Montrer que pour tout x de $[0, \sqrt{2}[$,
$G(x) = \pi - f^{-1}(x)$. En déduire $G(1)$.

22 Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$. On suppose que
$f(0) = 1$, $f(1) = 0$ et $f'(x) = \dfrac{-2}{\pi\sqrt{1 - x^2}}$, $x \in]0, 1[$.

1. Montrer que f est une bijection de $[0,1]$ sur $[0,1]$.
2. a. Montrer que pour tout x de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,
$f(\cos x) = \dfrac{2}{\pi} x$.
b. En déduire $f^{-1}(x)$ pour tout x de $[0, 1]$.
3. On pose pour tout x de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,
$h(x) = f(\cos x) + f(\sin x)$.
a. Montrer que h est dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer $h'(x)$.
b. En déduire que pour tout x de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $h(x) = 1$.
4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose
$\varphi_n(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} x\right) - x^n$, $x \in [0,1]$.
a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $a_n \in]0,1[$ tel que $\varphi_n(a_n) = 0$.
b. Montrer que pour tout x de $]0,1[$, si $n > p$ alors $\varphi_n(x) > \varphi_p(x)$.
c. En déduire que la suite (a_n) est strictement croissante et convergente.