Chapitre 7

Intégrales

La parabole considérée par Thabit Ibn Qurra est définie par une propriété que nous traduisons aujourd'hui par l'équation $y^2=px$ et la quadrature de la parabole

est équivalente à notre calcul de l'intégrale $\int_0^a \sqrt{px}$.

Mais le calcul immédiat d'une telle intégrale, [...],
aurait exigé la sommation de [...] $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}$.

Ibn Qurra étudie cette difficulté en recourant à un artifice astucieux. [...].

(AP. Youschkevitch,
Les mathématiquesarabes, 1976).

Thabit Ibn Qurra est un
mathématicien arabe qui
vécut au Xe siècle

Chapitre 7

Intégrales

I. Définition

I.1 Intégrale d'une fonction continue et positive

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On considère la fonction f définie par
$f(x) = x + 2$

Le plan étant muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'unité d'aire, notée par u.a est l'aire du rectangle de dimensions $\|\vec{i}\|$ et $\|\vec{j}\|$.

1. Tracer la courbe représentative de f.
2. Soit $\mathcal{P}$ la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$.
3. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}$.
4. a. Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 1 en 0.
   b. Vérifier que $\mathcal{A}$ = F(0)-F(-2).
   c. Montrer que si G est une autre primitive de f sur $\mathbb{R}$, alors $\mathcal{A} = G(0) - G(-2)$.

Propriété

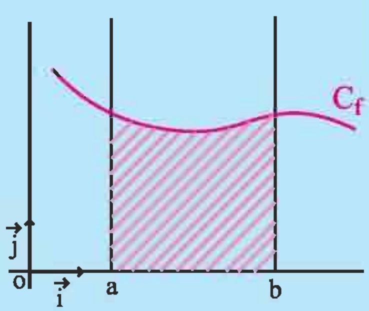
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si F et G sont deux primitives de f sur I alors pour tous a et b de I, $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

Démonstration

Les fonctions F et G étant des primitives de f sur I, la fonction $F - G$ est constante sur I. On en déduit que pour tous réels a et b de I, $F(b) - G(b) = F(a) - G(a)$. La propriété en découle.

Définition

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ et F une primitive de f sur $[a, b]$.
L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le réel $F(b) - F(a)$.
Le réel $F(b) - F(a)$ est appelé intégrale de f de a à b et est noté $\int_a^b f(x)dx$.



Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 - \frac{3}{2}x^2$.

1. Représenter la partie $\mathcal{P}$ du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$.
2. Calculer l'aire de $\mathcal{P}$.

I.2 Intégrale d'une fonction continue

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I et F une primitive de f sur I.

On appelle intégrale de f entre a et b le réel, noté $\int_a^b f(x)dx$, défini

par $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Vocabulaire et notations

- Le réel $\int_a^b f(x)dx$ est appelé intégrale de f sur $[a, b]$ lorsque $a \leq b$, ou encore de a à b, ou encore entre a et b.
- Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$, on peut remplacer la lettre x par n'importe quelle lettre et on peut écrire $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt$. On dit que x est une variable muette.
- Pour toute primitive F de f, on écrit $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

L'expression $[F(x)]_a^b$ se lit « $F(x)$ pris entre a et b ».

Activité 3

Calculer $\int_{\frac{1}{2}}^1 (x^2 - 1)dx$, $\int_0^1 \sin(2x+3)dx$, $\int_{-1}^1 \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx$.

II. Propriétés algébriques de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a, b et c des réels de I. Alors

$\int_a^a f(x)dx = 0$; $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ (Relation de Chasles).

Démonstration

Soit F une primitive de f sur I.

$$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0.$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)dx.$$

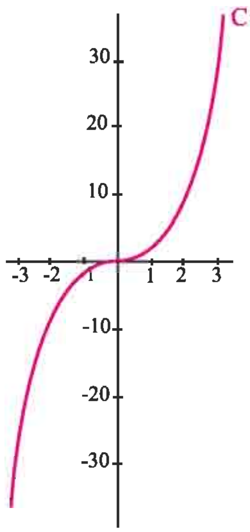
$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Activité 1

1. Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - 1$.
2. Calculer l'aire de la partie limitée par la courbe de $-f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$.
3. En déduire que l'aire de la partie limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$ est égale à $\int_{-1}^{2} -f(x)dx$.

Activité 2

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on a tracé la courbe C de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

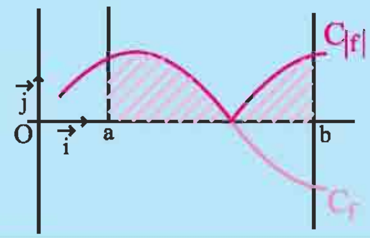


1. Tracer la courbe C' représentative de $|f|$.
2. a. Représenter la partie P' du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe C' et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 3$.

   b. Calculer l'aire de P'.
3. En déduire l'aire la partie P du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 3$.

Définition

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.
L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe de f, les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est le réel $\int_a^b |f(x)|dx$.



Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Calculer, dans chacun des cas ci-dessous, l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe de f, les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

1. $f : x \mapsto \cos 3x$, $a=-\dfrac{\pi}{3}$ et $b=\dfrac{\pi}{4}$.
2. $f : x \mapsto x\left(x^2+1\right)^2$, $a=-2$ et $b=1$.

Théorème (linéarité)

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$.
Pour tous réels α et β, $\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$.

Démonstration

Soit F et G deux primitives respectives de f et g sur $[a,b]$. Alors pour tous réels α et β, $\alpha F+\beta G$ est une primitive de $\alpha f+\beta g$ sur $[a,b]$. On peut écrire

$$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))dx = (\alpha F(b)+\beta G(b))-(\alpha F(a)+\beta G(a))$$
$$= \alpha(F(b)-F(a))+\beta(G(b)-G(a))$$
$$= \alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx.$$

Activité 4

Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2}{(x+1)^2}dx + \int_1^2 \frac{2x+1}{(x+1)^2}dx$.

Activité 5

Soit les intégrales $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$ et $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{2}dx$

1. Calculer $I+2J$ et $2J-I$.
2. En déduire les valeurs de I et J.

III. Intégrales et inégalités

Théorème (positivité)

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Si f est positive sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Démonstration

Toute primitive sur $[a,b]$ d'une fonction positive est croissante sur $[a, b]$.
Le théorème en découle.

Corollaire

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ où $a < b$. Si f est positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de réels de $[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Démonstration

Toute primitive sur $[a,b]$ d'une fonction positive qui ne s'annule qu'en un nombre fini de réels de $[a,b]$ est strictement croissante sur $[a,b]$. Le corollaire en découle.

Exercice résolu 1

1. Montrer que $\frac{1}{1+x} > 1-x$, pour tout réel x de $]0,1]$.
2. Montrer que $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx > \frac{1}{4}$.

Solution

1. Pour tout réel x de $]0,1]$, $(1-x)(1+x) = 1-x^2$, ce qui équivaut à $(1-x)(1+x) < 1$.

Il en résulte que pour tout réel x de $]0,1]$, $\frac{1}{1+x} > 1-x$, car $1+x > 0$.

2. Il découle de la première question que $\frac{1}{1+x^2} > 1-x^2$, pour tout réel x de $]0,1]$.

On en déduit que $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} > \int_0^1 x - x^3dx$.

L'égalité $\int_0^1 x - x^3dx = \frac{1}{4}$ nous donne alors que $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx > \frac{1}{4}$.

Corollaire (comparaison)

Soit f, g et h trois fonctions continues sur $[a,b]$.

Si $h \leq f \leq g$, alors $\int_a^b h(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Démonstration

La fonction $f-h$ étant positive sur $[a,b]$, il résulte de la positivité de l'intégrale que $\int_a^b (f(x)-h(x))dx \geq 0$, ou encore que $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b h(x)dx$.

On montre de même que $\int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$.

Exercice résolu 2

1. Montrer que pour tout $x>0$, $-x \leq \sin x \leq x$.
2. En déduire que pour tout $x>0$, $1-\dfrac{x^2}{2} \leq \cos x$

Solution

1. On sait que pour tout réel t, $-1 \leq \cos t \leq 1$.

   On en déduit que pour tout réel $x \geq 0$, $\int_0^x -1dt \leq \int_0^x \cos t\,dt \leq \int_0^x 1dt$.

   Ce qui prouve que pour tout $x \geq 0$, $-x \leq \sin x \leq x$.
2. Il résulte de la double inégalité prouvée dans la première question que pour tout $x \geq 0$, $\int_0^x \sin t\,dt \leq \int_0^x t\,dt$, ou encore que, $1-\cos x \leq \dfrac{x^2}{2}$. Ce qui donne le résultat.

Corollaire

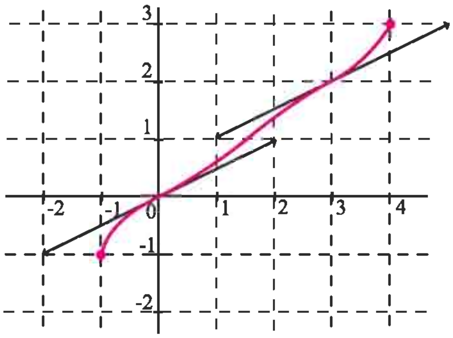
Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Démonstration

La propriété découle du corollaire précédent et de la double inégalité $-|f| \leq f \leq |f|$.

Activité 1

On a représenté une fonction f dérivable sur $[-1,4]$, ainsi que les tangentes aux points d'abscisses 0 et 3.



1. Vérifier graphiquement que pour tout réel x de $[0,3]$, $\dfrac{x}{2} \leq f(x) \leq \dfrac{x+1}{2}$.
2. En déduire que $\dfrac{9}{4} \leq \int_0^3 f(x)dx \leq \dfrac{15}{4}$.

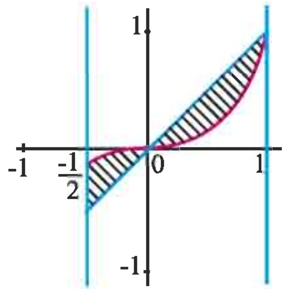
Activité 2

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2} dx$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que pour tout x de $[0,1]$, $0 \le \frac{x^{n+1}}{1+x^2} \le x^{n+1}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le u_n \le \frac{1}{n+2}$.
3. a. Donner une valeur approchée de u_{100} et préciser l'erreur commise.

   b. Donner une valeur approchée de u_{10000} et préciser l'erreur commise.

Activité 3



On a tracé ci-contre les courbes des fonctions f et g définies sur $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ par $f(x) = x$ et $g(x) = x^3$.

On se propose de calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 1$.

1. a. Calculer l'aire de la partie limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
   b. Calculer l'aire de la partie limitée par la courbe C_g, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
   c. En déduire l'aire de la partie limitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
2. Calculer l'aire de la partie limitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 0$.
3. Conclure.

Définition

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$.
L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe de f, la courbe de g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le réel $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit f et g les fonctions définies sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \cos x$.

1. Représenter les courbes C_f et C_g de f et g sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Etudier le signe de $f - g$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations, $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

IV. Calculs d'intégrales

IV. 1 Calcul au moyen d'une primitive

Activité 1

Calculer les intégrales suivantes.

$$\int_0^3 \left(5x^4 - x^3 - 2\right) dx \; ; \; \int_{-2}^{-1} \frac{1}{t^2} dt \; ; \; \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx \; ; \; \int_{-1}^{2} \left(3x^2 + 1\right)\left(x^3 + x - 2\right) dx \; ;$$

$$\int_0^1 \frac{-2u}{\left(u^2 + 2\right)^3} du \; ; \; \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin^3 t} dt \, , \; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x \, dx \, , \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + 1}} dx \, .$$

IV. 2 Intégration par parties

Théorème d'intégration par parties

Soit f et g deux fonctions dérivables sur $[a, b]$ et telles que leurs dérivées f' et g' sont continues sur $[a, b]$.

Alors $\int_a^b f(t) g'(t) dt = \left[f(t) g(t)\right]_a^b - \int_a^b f'(t) g(t) dt$.

Démonstration

On sait que $(fg)' = f'g + g'f$. La continuité des fonctions f' et g' sur $[a, b]$ nous permet d'écrire que $\int_a^b (fg)'(x) dx = \int_a^b \left(f'(x) g(x) + g'(x) f(x)\right) dx = \left[f(x) g(x)\right]_a^b$.

Le théorème en résulte.

Exercice résolu 3

Calculer les intégrales ci-dessous.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx \; ; \; J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx \; ; \; K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx .$$

Solution

• Calcul de I.

Posons $u(x)=x$ $\qquad u'(x)=1$

$v'(x)=\sin x$ $\qquad v(x)=-\cos x$

On obtient, $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx=\left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$

• Calcul de J.

Posons $u(x)=x$ $\qquad u'(x)=1$

$v'(x)=\cos x$ $\qquad v(x)=\sin x$

On obtient, $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx=\left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}+\left[\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1.$

• Calcul de K.

Posons $u(x)=x^2$ $\qquad u'(x)=2x$

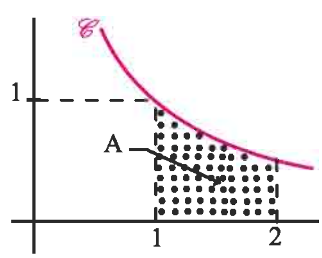
$v'(x)=\cos x$ $\qquad v(x)=\sin x$

On obtient, $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx=\left[x^2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx=\frac{\pi^2}{4}-2I=\frac{\pi^2}{4}-2.$

IV. 3. Calcul approché d'intégrales (Méthode des rectangles)

Activité 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on a tracé la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.



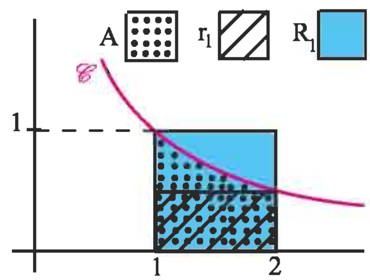
On désigne par A l'aire (en u.a) de la partie limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

1. Vérifier que $A=\int_1^2 \frac{dx}{x}$.

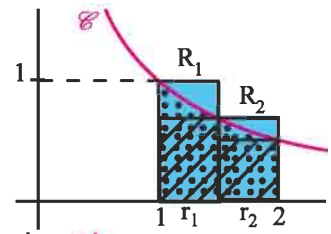
On se propose de donner des encadrements de A.

2. On trace les rectangles r_1 et R_1 comme l'indique le schéma ci-contre.

Vérifier que $\frac{1}{2} \leq A \leq 1$.

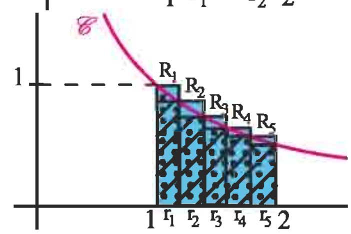


3. On partage l'intervalle $[1,2]$ en deux intervalles de longueur 0.5.
On trace les rectangles r_1, r_2 et R_1, R_2 Comme l'indique le schéma ci-contre. Vérifier que $\frac{7}{12} \leq A \leq \frac{5}{6}$.



4. On partage l'intervalle $[1,2]$ en 5 intervalles, de longueur $\frac{1}{5}$.

On trace les rectangles r_i et les rectangles R_i, $1 \leq i \leq 5$.
comme l'indique la figure ci-contre.
Donner un nouvel encadrement de A.



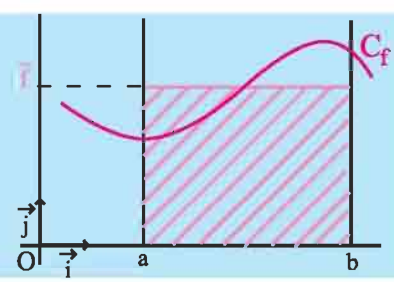
IV. 4 Valeur moyenne et inégalité de la moyenne

Définition

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ tel que $a < b$. On appelle valeur moyenne de f sur $[a,b]$ le réel, noté $\bar{f}$, défini par $\bar{f} = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx$.

Interprétation géométrique de la valeur moyenne

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$.
L'aire $($en u.a$)$ de la partie du plan limitée par la courbe de f, les droites d'équations, $x = a$, $x = b$ et $y = 0$ est égale à celle du rectangle de côtés $(b-a)$ et $\bar{f}$.



Activité 3

Soit la fonction définie sur $[0,2]$, par $f(x) = 3x - 1$.
Calculer la valeur moyenne de f sur $[0,2]$, puis la comparer à f(1).

Activité 4

Calculer la valeur moyenne de la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, par $f(x) = \cos x$.

Théorème (Inégalité de la moyenne)

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ tel que $a < b$. Soit m et M deux réels.
Si pour tout x de $[a,b]$, $m \le f(x) \le M$, alors $m \le \overline{f} \le M$.

Démonstration

L'hypothèse $m \le f(x) \le M$, pour tout x de $[a,b]$ implique que

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx.$$

Le théorème découle alors des égalités $\int_a^b m\,dx = m(b-a)$ et $\int_a^b M\,dx = M(b-a)$,

sachant que $b - a > 0$.

Corollaire

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ tel que $a < b$. Il existe $c \in [a,b]$, tel que $\overline{f} = f(c)$.

Démonstration

La fonction f étant continue sur $[a,b]$, on en déduit qu'il existe deux réels m et M tels que $f([a,b]) = [m,M]$. Le corollaire en découle, sachant que $m \le \overline{f} \le M$.

Exercice résolu 4

Montrer les inégalités ci-dessous.

$$0.5 \le \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \le 1, \qquad \frac{1}{2} \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \le \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Solution

Remarquons que $0.5 \le \frac{1}{1+x^2} \le 1$, pour tout $0 \le x \le 1$.

On en déduit que $\int_0^1 0.5\,dx \le \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \le \int_0^1 1\,dx$.

Le résultat découle des égalités $\int_0^1 0.5\,dx = 0.5$ et $\le \int_0^1 1\,dx = 1$.

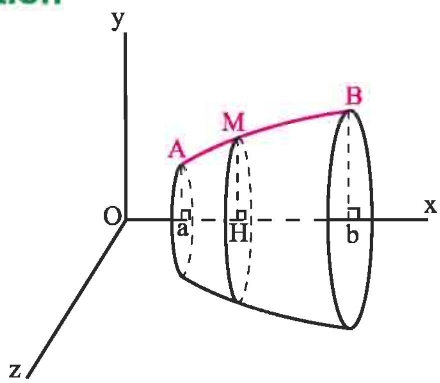
De même, $\frac{3}{4} \le 1 - x^2 \le 1$ pour tout $0 \le x \le \frac{1}{2}$.

On en déduit que $1 \leq \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leq \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, pour tout $0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$.

Il en résulte que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 1dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{3}} dx$.

Le résultat découle des égalités $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 1dx = \frac{1}{2}$ et $\leq \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{3}} dx = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

V. Calcul de volumes de solides de révolution



L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère dans le plan (Oxy), un arc $\overset{\frown}{AB}$ d'une courbe d'équation $y = f(x)$ et dont les extrémités A et B ont pour coordonnées dans ce plan $A(a,\ f(a))$ et $B(b,\ f(b))$.

La rotation de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ autour de l'axe (Ox) engendre une surface appelée surface de révolution (S). (voir figure ci-contre).

En particulier chaque point $M(x,\ f(x))$ de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ décrit un cercle d'axe (Ox), de centre H le projeté orthogonal de M sur (Ox) et de rayon $HM = |f(x)|$.

La partie de l'espace limitée par la surface (S) et les plans d'équations $x = a$ et $x = b$ est appelée solide de révolution de surface (S).

La section du solide par le plan passant par M et perpendiculaire à l'axe $(O, \vec{i})$ est le disque de centre H et de rayon HM.

L'aire de ce disque est $S(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x)$.

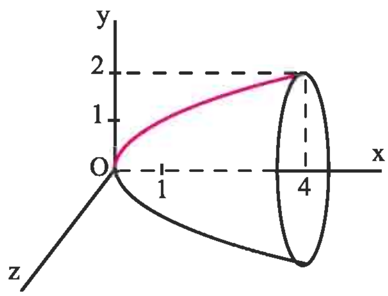
Nous donnons ci-dessous la formule donnant le volume du solide de révolution engendré par la rotation d'un arc de courbe autour de l'axe $(O,\ \vec{i})$.

> L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
>
> Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. Le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc $\overset{\frown}{AB} = \{M(x, y) \text{ tels que } y = f(x) \text{ et } a \leq x \leq b\}$ autour de l'axe $(O,\ \vec{i})$ est le réel $V = \pi \displaystyle\int_a^b f^2(x)dx$.

Activité

Le solide de révolution S est obtenu en faisant tourner au tour de (Ox) l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de la courbe d'équation $y=\sqrt{x}$ et dont les extrémités A et B ont pour coordonnées dans le plan (Oxy)

$A\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$, $B\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$



(voir figure).

Déterminer le volume du solide S.

VI. Fonctions définies par une intégrale

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel de I. Alors la fonction F définie sur I par $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration

Pour toute primitive G de f sur I et pour tout x de I , $\int_a^x f(t)dt = G(x)-G(a)$.

On en déduit que la fonction $F: x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur I et $F'=f$.

Le théorème en découle sachant que $F(a)=\int_a^a f(t)dt=0$.

Corollaire

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel de I. Alors la fonction $F: x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur I et $F'(x)=f(x)$, pour tout x de I.

Activité 1

Justifier, dans chacun des cas, la dérivabilité de la fonction F sur I et calculer sa fonction dérivée.

1. $F(x)=\int_1^x \sqrt{1-t^2}\,dt$, $I=[-1,1]$.
2. $F(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$, $I=\mathbb{R}$.
3. $F(x)=\int_1^x \frac{\sin t}{t}dt$, $I=]0,+\infty]$.
4. $F(x)=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $I=]-1,1[$.

Activité 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I centré en 0.

On considère la fonction g définie sur I par $g(x)=\int_{-x}^{x} f(t)dt$.

1. Montrer que g est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

2. On suppose que f est impaire.
   a. Montrer que pour tout $x \in I$, $g(x)=0$.
   b. En déduire que pour tout $x \in I$, $\int_{-x}^{0} f(t)dt=-\int_{0}^{x} f(t)dt$.
3. On suppose que f est paire.
   a. Montrer que g est la primitive sur I qui s'annule en 0, de la fonction $t \mapsto 2f(t)$.
   b. En déduire que $\int_{-x}^{x} f(t)dt=2\int_{0}^{x} f(t)dt$ et que $\int_{-x}^{0} f(t)dt=\int_{0}^{x} f(t)dt$.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I centré en 0 et soit a un réel de I.

- Si f est impaire alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$.
- Si f est paire alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

Activité 3

Calculer les intégrales ci-dessous.

$$\int_{-5\pi}^{5\pi} x^5 \sin^6(x)dx \ , \ \int_{-1}^{1} \frac{t^5}{t^6+1}dt \ , \ \int_{-5\pi}^{5\pi} x^{1001}\cos^{100}(x)dx \ , \ \int_{-1}^{1} \left|t^3+t\right| dt .$$

Activité 4

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période T.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\int_{x}^{x+T} f(t)dt$.

Montrer que pour tout réel x, $g(x)=\int_{0}^{T} f(t)dt$.

Théorème

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période T.

Pour tout réel a, $\int_{a}^{a+T} f(t)dt=\int_{0}^{T} f(t)dt$.

Activité 5

Calculer les intégrales $\int_0^{20\pi} |\sin x| dx$; $\int_{-10\pi}^{10\pi} |\cos x| dx$.

Exercice résolu 5

Soit F la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $F(x) = \int_1^x \frac{1-\cos t}{t^2} dt$.

1. a. Montrer que F est croissante sur $[1,+\infty[$.

   b. Montrer que F est majorée par 2.

   c. En déduire que F admet une limite finie L au voisinage de $+\infty$.

2. Soit G la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $G(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$.

Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $G(x) = F(x) + \frac{1-\cos x}{x} + \cos 1 - 1$.

En déduire que G possède une limite finie en $+\infty$, que l'on déterminera en fonction de L.

Solution

1. a. Sur $[1,+\infty[$, la fonction F est la primitive qui s'annule en 1 de la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}$. De plus, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}$ est positive sur $[1,+\infty[$ car $0 \le \cos t \le 1$.

On en déduit que pour tout $x \ge 1$, $F'(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ et par suite F est croissante sur $[1,+\infty[$.

b. Pour tout $t \ge 1$, $\left|\frac{1-\cos t}{t^2}\right| \le \frac{2}{t^2}$. Il en résulte que $\left|\int_1^x \frac{1-\cos t}{t^2} dt\right| \le 2\int_1^x \frac{1}{t^2} dt$, $x \ge 1$.

De plus $2\int_1^x \frac{1}{t^2} dt = 2\left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 2 - \frac{2}{x}$. Le résultat en découle.

c. La fonction F est croissante et majorée sur $[1,+\infty[$. On en déduit qu'elle admet une limite finie L en $+\infty$.

2. Posons $u(t) = \frac{1}{t}$ $\qquad u'(t) = -\frac{1}{t^2}$

$v'(t) = \sin t$ $\qquad v(t) = 1 - \cos t$

On peut alors écrire $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1-\cos t}{t^2} dt$.

On en déduit que $G(x) = F(x) + \frac{1-\cos x}{x} + \cos 1 - 1$, pour tout x de $[1,+\infty[$.

On sait que F admet une limite finie L en $+\infty$.

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\frac{1-\cos x}{x}\right|=0$ car $0\le\left|\frac{1-\cos x}{x}\right|\le\frac{2}{x}$, pour tout $x\ge1$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)=L+\cos 1-1$.

Exercice résolu 6

On considère la fonction f définie sur $[0,\ 1[$ par $f(x)=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $[0,\ 1[$ et déterminer sa fonction dérivée f'.

2. Soit g la fonction définie sur $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=\int_0^{\sin x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

   a. Montrer que g est dérivable sur $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right[$ et déterminer sa fonction dérivée.

   b. En déduire que $g(x)=x$ pour tout $x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right[$.

3. Calculer les intégrales $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$; $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

4. a. Montrer que pour tout $x\in[0,1[$ il existe un unique $t\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right[$ vérifiant $\sin t=x$.

   b. Montrer que $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\frac{\pi}{2}$.

5. Représenter la fonction f.

Solution

1. La fonction $t\mapsto 1-t^2$ est strictement positive et continue sur $[0,1[$.

On en déduit que la fonction $t\mapsto\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0,1[$.

Il en résulte que la fonction $f: x\mapsto\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ est dérivable sur $[0,1[$, puis

que $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\in[0,1[$.

2\. a. La fonction $u : x \mapsto \sin x$ est dérivable et croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on en déduit que $u\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = [0,1[$. Il en résulte que la fonction g est dérivable sur $[0,1[$ comme composée des fonctions dérivables f et de u.

De plus, $g'(x) = u'(x) \times f'(u(x)) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = 1$, car $\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

b. On déduit de a, que pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = x + c$, où c est une constante.

L'égalité $g(0) = 0$ implique que $g(x) = x$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

3\. On sait que $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Il en résulte que

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{6} \text{ et } g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{3}.$$

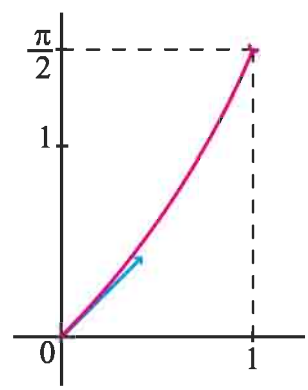
4\. a. La fonction $x \mapsto \sin x$ étant continue et strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, elle réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0, 1[$. Ce qui prouve que l'équation $\sin t = x$ admet une unique solution dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

b. On déduit de la question précédente que $\lim\limits_{x \mapsto 1^-} f(x) = \lim\limits_{t \mapsto \frac{\pi}{2}^-} f(\sin t) = \lim\limits_{t \mapsto \frac{\pi}{2}^-} g(t) = \frac{\pi}{2}$.

Tableau de variation de f.

x	0		1
$f'(x)$		+	
f	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

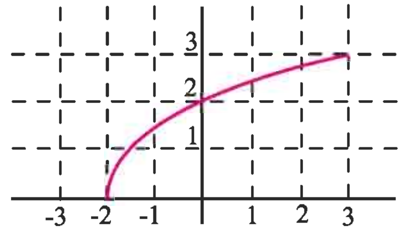
Représentation graphique de f.



QCM

Cocher la réponse exacte.

1. D'après la représentation graphique ci-contre, l'aire de la partie limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 3$ est comprise entre



☐ 7 et13. ☐ 15 et 20. ☐ 14 et 21.

2. Soit $I = \int_0^1 t\cos^2(\pi t)\,dt$ et $J = \int_0^1 t\sin^2(\pi t)\,dt$. Alors $I + J$ est égal à

☐ 1. ☐ $\frac{1}{2}$. ☐ 0.

3. Soit $I = \left|\int_{-1}^{1} -3x^3 + 5x\,dx\right|$ et $J = \int_{-1}^{1} \left|-3x^3 + 5x\right| dx$. Alors

☐ $I \leq J$. ☐ $I = J$. ☐ $I \geq J$.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

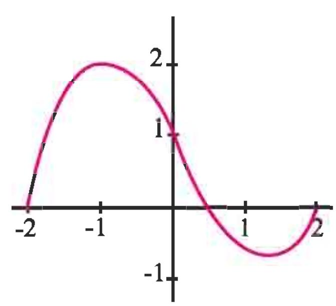
1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \int_{4\pi}^{\frac{9\pi}{2}} \sin x\,dx$.

2. $\int_{-1}^{1} |x|\,dx = 1$.

3. Si f est une fonction dérivable sur $[a, b]$ et si sa dérivée est continue sur $[a, b]$, alors
$\int_a^b f(x)\,dx = [xf(x)]_a^b - \int_a^b x f'(x)\,dx$.

4. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$.
Si $f \leq 1$ alors $\int_0^1 f(x)\,dx \leq 1$.

5. D'après la représentation graphique ci-contre $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx \geq 0$.



6. Si $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ alors $f \geq 0$ sur $[a, b]$.

7. La fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$ est définie sur $\mathbb{R}$.

1 Calculer les intégrales ci-dessous.

$\int_{-1}^{3}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)dx$; $\int_{1}^{2}t(t+1)^3dt$;

$\int_{-1}^{1}(2x+1)(x^2+x-5)^3dx$; $\int_{1}^{2}\sqrt{2x+1}\,dx$;

$\int_{1}^{2}\frac{dx}{(1+x)^2}$; $\int_{1}^{2}\frac{2}{(3x-1)^2}dx$; $\int_{0}^{4}\frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$;

$\int_{1}^{2}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}dx$; $\int_{-2}^{1}|x(x+1)|dx$; $\int_{-3}^{3}\left|x^3+x\right|dx$;

$\int_{0}^{3}|2t-1|dt$; $\int_{-3}^{0}|x^2-x-2|dx$; $\int_{0}^{\pi}\cos^3x\,dx$;

$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2x\,dx$; $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin 2x}{\cos^3 2x}dx$; $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^4 t\,\sin t\,dt$; $\int_{0}^{2\pi}|\sin x|dx$.

2 1. Déterminer deux réels a et b tels que

$\frac{6x^2-12x+42}{(x-1)^2}=a+\frac{b}{(x-1)^2}$, pour tout $x\neq 1$.

2. Calculer $\int_{-1}^{0}\frac{6x^2-12x+42}{(x-1)^2}dx$.

3 Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{x}{(x-1)^4}$, pour tout $x\neq 1$.

1.Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$f(x)=\frac{a}{(x-1)^3}+\frac{b}{(x-1)^4}$, pour tout $x\neq 1$.

2. Calculer alors $\int_{2}^{3}\frac{x+1}{(x-1)^4}dx$.

4 On considère les intégrales $A=\int_{0}^{1}\frac{x}{(1+x^2)^3}dx$

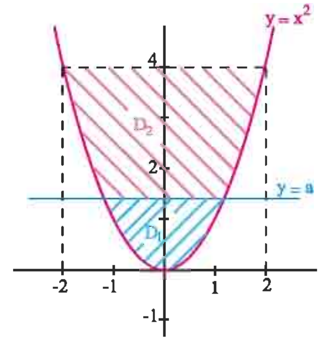
et $B=\int_{0}^{1}\frac{x^3}{(1+x^2)^3}dx$.

1. Calculer A.
2. Calculer $A+B$.
3. En déduire la valeur de B.

5 le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit $a>0$.

Pour quelle valeur de a, les parties D_1 et D_2 ont-elles la même aire ?



6 Soit la fonction $f:x\mapsto\frac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}$

1. Vérifier que $f(x)=1-\frac{6}{(x-2)^2}$, $x\neq 2$.

2. Etudier f et construire sa courbe représentative C dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations respectives $x=3$ et $x=5$.

7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par

$f(x)=\frac{2x-1}{(x-1)^3}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier f et tracer C .
2. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$f(x)=\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{(x-1)^3}$, pour tout $x\neq 1$.

3. Soit $\lambda<\frac{1}{2}$. On pose $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limité par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\lambda$ et $x=\frac{1}{2}$.

a. Déterminer $\mathcal{A}(\lambda)$.

b. Calculer $\lim_{\lambda\to-\infty}\mathcal{A}(\lambda)$.

8 1. On considère la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x)=x^2-4x+6-3\sqrt{x}$.

a. Calculer $h''(x)$, $x>0$.

b. Montrer que l'équation $h'(x)=0$ possède une unique solution α appartenant à $]2, 3[$.

c. Déterminer le signe de h' et dresser le tableau de variation de h.

d. Calculer $h(1)$ et $h(4)$. En déduire que 1 et 4 sont les uniques solutions de l'équation $h(x)=0$.

2. a. Représenter dans un repère orthonormé, les fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par $f(x)=x^2-4x+6$ et $g(x)=3\sqrt{x}$.

b. Calculer l'aire de la partie limitée par ces deux courbes.

9 Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On considère les fonctions f et g définies sur $[0, \pi]$ définies par $f(x)=\cos x$ et $g(x)=\cos^2 x$.

1. Etudier les fonctions f et g.
2. Etudier la position des courbes C_f et C_g de f et g.
3. Représenter C_f et C_g.
4. Calculer l'aire de la partie limitée par ces deux courbes.

10 1.Soit les fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par $f(x)=5-x^2$ et $g(x)=\dfrac{4}{x^2}$ et

C, C′ leurs courbes représentatives respectives.

1. Etudier la position relative de C et C′.

2. Représenter f et g dans un repère orthonormé.

3. Calculer l'aire de la partie limitée par les deux courbes et les droites d'équations $x=0.5$ et $x=5$.

11 1. Représenter dans un repère orthonormé, les fonctions f et g définies sur $]2, +\infty[$ par

$f(x)=x+1+\dfrac{4}{(x-2)^2}$ et $g(x)=x+1$.

2. Soit $\lambda>2$. On pose $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes de f et g et les droites d'équations $x=3$ et $x=\lambda$.

a. Vérifier que $A(\lambda)=\left|\int_3^{\lambda}\dfrac{4dx}{(x-2)^2}\right|$.

b. Calculer $A(\lambda)$.

c. Etudier et représenter la fonction $A:\lambda\mapsto A(\lambda)$.

d. Déterminer suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $A(\lambda)=m$.

12 1. A l'aide d'une intégration par parties calculer les intégrales $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$ et $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$

2. En déduire les valeurs des intégrales

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx$.

13 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ et on pose $I=\int_{100}^{1000} f(t)dt$.

1. a. Vérifier que pour tout $x>0$, $f(x)\le\dfrac{1}{x^2}$.

b. Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis que pour tout $x>0$ $\quad 1-\dfrac{x}{2}\le\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

c. Montrer alors que pour tout $x>0$,

$\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{2x^6}\le f(x)$.

2. Déterminer un encadrement de I.

14 1. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{dx}{\cos^2 x}$.

2. Soit la fonction f définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ par

$f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$. Montrer que pour tout $x\in\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$,

$f'(x)=\dfrac{3}{\cos^4 x}-\dfrac{2}{\cos^2 x}$.

3. Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{dx}{\cos^4 x}$.

15 On considère la fonction f définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$.

1. Montrer que $f(x)=\frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x}$, $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle I que l'on précisera.
3. Montrer que la réciproque f^{-1} de f est dérivable sur I et que $\left(f^{-1}\right)'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x^3-x}}$, pour tout x de I.
4. Calculer l'intégrale $\int_{\frac{4}{3}}^{2}\frac{dt}{2\sqrt{t^3-t}}$.

16 1. Représenter dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$.

2. Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

a. Vérifier que $\frac{1}{2}\leq \mathcal{A} \leq 1$.

b. Utiliser la méthode des rectangles, en partageant l'intervalle $[1,2]$ en cinq intervalles d'amplitude 0.2, pour donner un nouvel encadrement de $\mathcal{A}$.

17 Soit la suite (u_n) définie par

$$u_n=\int_0^1\frac{x^n}{\left(x^2+1\right)^2}dx,\ n\geq 1.$$

1. Montrer que $0\leq \frac{x^{2n+1}}{\left(x^2+1\right)^2}\leq x^{2n+1}$, pour tout entier $n\geq 1$ et tout $0\leq x\leq 1$.
2. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

18 On pose pour tout n entier naturel non nul,

$$J_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1+x}\,dx$$

1. A l'aide d'un encadrement de $\sqrt{1+x}$ établir que $\frac{1}{n+1}\leq J_n\leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$.

En déduire la limite de la suite J_n

2. a. Montrer que pour tout x de $[0, 1]$, $0\leq \sqrt{2}-\sqrt{1+x}\leq \frac{1}{2}(1-x)$.

b. En déduire que $\frac{\sqrt{2}}{n+1}-\frac{1}{2n^2}\leq J_n\leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$.

c. Déterminer la limite de la suite (nJ_n).

19 Soit la suite (u_n) définie par

$$u_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^n\cos 2x\,dx,\ n\geq 0.$$

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
2. Comparer u_n et $\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^n dx$, $n\geq 1$.
3. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
4. a. Calculer u_0 et u_1.

b. Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n.

c. Calculer u_2 et u_3.

20 Soit la suite (u_n) définie par $u_n=\int_0^1\frac{dx}{1+x^n}$, $n\geq 1$.

1. Etablir que $1-u_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}dx$, $n\geq 1$.
2. Montrer que $0\leq 1-u_n\leq \frac{1}{n+1}$, $n\geq 1$.
3. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

21 Soit la suite (I_n) définie par

$I_n = \int_0^{\pi} \sin^n x\,dx$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.
En déduire les valeurs de I_2 et I_3.
3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = (n+1)I_n I_{n+1}$.
a. Calculer $u_{n+1} - u_n$ et en déduire que la suite (u_n) est constante.
b. Donner la valeur de u_n.
4. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
5. a. Déduire que $\frac{\pi}{2(n+1)} \le I_n^2 \le \frac{\pi}{2n}$, $n \ge 1$.
b. Donner un encadrement de I_{1000}.

22 Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par

$f(x) = \tan^3 x + \tan x$.

1. Etudier les variations de f.
2. Montrer que la fonction f réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ sur $[0,2]$.
3. a. Représenter dans un repère orthonormé, les fonctions f et f^{-1} en précisant les demi tangentes aux extrémités des deux courbes.
b. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$. En déduire $\int_0^2 f^{-1}(x)dx$.

23 On considère la fonction f définie sur $[0,3]$

par $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1], \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x \in]1,3]. \end{cases}$

1. Vérifier que f est continue sur $[0,3]$.
2. Soit F la fonction définie sur $[0,3]$ par

$F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

a. Expliciter $F(x)$, $x \in [0,3]$.
b. Représenter la fonction F dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

24 On pose pour tout entier naturel n,

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x\,dx$.

1. a. Calculer I_0.
b. Vérifier que pour tout n, $0 \le I_{n+1} \le I_n$.
c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.
2. a. Montrer que pour tout n, $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+3}$.
b. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.
c. Calculer I_2 et I_4.

25 Dans chacun des cas, calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle I.

1. $f : x \mapsto x^4 - x^3 + 1$, $I = [-1, 3]$.
2. $f : x \mapsto \frac{1}{x^3} - 1$, $I = [2, 4]$.
3. $f : x \mapsto \sin(2x)$, $I = [0, \pi]$.

26 En utilisant l'inégalité de la moyenne donner un encadrement de $\int_2^4 \frac{dx}{x^2 - x + 1}$.

27 En utilisant l'inégalité de la moyenne donner un encadrement de $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{3 + \tan^2 x}$.

Dans les exercices 31, 32, 33, 34 et 35 L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

28 Soit $C = \{M(x, y) \text{ tels que } y = x^2,\ 0 \le x \le 2\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox). Calculer le volume de S.

29 Soit $C = \left\{M(x, y) \text{ tels que } y = \frac{1}{x},\ 1 \le x \le 3\right\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox). Calculer le volume de S.

30 Soit

$C=\left\{M(x,\ y)\text{ tels que } y=\tan x,\ 0\le x\le\frac{\pi}{4}\right\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox). Calculer le volume de S.

31 Soit

$C=\left\{M(x,y)\text{ tels que } y=\sin x+\cos x,\ 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right\}$

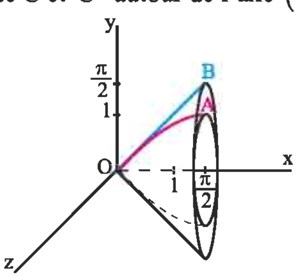
et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox). Calculer le volume de S.

32 Soit

$C=\left\{M(x,\ y)\text{ tels que } y=\sin x,\ 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right\}$

et $C'=\left\{M(x,\ y)\text{ tels que } y=x,\ 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right\}$.

On note S et S' les solides obtenus respectivement par rotation de C et C' autour de l'axe (Ox).



Calculer le volume de la partie de l'espace comprise entre les solides S et S'.

33 I. On considère la fonction F définie sur $\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$ par $F(x)=\int_0^{\tan x}\frac{dt}{1+t^2}$.

1. Vérifier que F est dérivable sur $\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$ et déterminer sa fonction dérivée.

2. En déduire que pour tout $x\in\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$, $F(x)=x$.

3. Calculer $\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}$.

II. On considère la suite (J_n) définie par

$J_0=\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}$ et $J_n=\int_0^1\frac{t^{2n}}{1+t^2}dt$, $n\ge1$.

1. a. Vérifier que pour tout n, $0\le J_n\le\frac{1}{1+2n}$.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}J_n$.

2 a. Montrer que pour tout n, $J_{n+1}+J_n=\frac{1}{1+2n}$.

b. Calculer J_k, pour tout entier naturel $1\le k\le6$.

34 On considère la fonction F définie sur $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ par $F(x)=\int_0^{\sin x}\sqrt{1-t^2}\,dt$.

1. Vérifier que F est dérivable sur $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ et déterminer sa fonction dérivée.

2. En déduire que pour tout $x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$,

$F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x)$.

3. Calculer $\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt$.

4. Etudier les variations de F.

5. Tracer la courbe représentative de F dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

35 On considère la fonction f définie sur $[-2,2]$ par $f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$.

1. Etudier f et représenter sa courbe C dans un repère orthonormé.

2. Soit F la fonction définie sur $[0,\ \pi]$ par

$F(x)=\int_0^{2\cos x}\sqrt{4-t^2}\,dt$.

a. Montrer que F est dérivable sur $[0,\ \pi]$ et que $F'(x)=-4\sin^2 x$, $x\in[0,\ \pi]$.

b. Calculer $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

c. En déduire que pour tout $x\in[0,\pi]$, $F(x)=-2x+\sin(2x)+\pi$.

3. Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations, $y=x$, $x=-2$ et $x=2$.

a. Montrer que $\mathcal{A}=F(0)-F(\pi)$.

b. En déduire $\mathcal{A}$.