Chapitre 4

Fonctions réciproques

C'est le 29 novembre 1873 […] que Cantor écrit à Dedekind qu'il voudrait lui "soumettre une question qui a pour moi un certain intérêt théorique, mais à laquelle je ne puis répondre". Il s'agissait de savoir s'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. […] La lettre de Cantor du 7 décembre 1873 contient la première démonstration de la non-existence d'une bijection entre $\mathbb{N}$ et $]0, 1[$.
[…] C'est seulement trois ans plus tard, le 20 juin 1877, que Cantor envoie à Dedekind sa première démonstration […] de la bijection entre $[0, 1]$ et $[0, 1]\times[0, 1]$, […], écrit-il " […]. Tant que vous ne m'aurez pas approuvé, je ne puis que dire : je le vois, mais je ne le crois pas"

(J.Dieudonné, Abrégé d'Histoire des Mathématiques, 1978)

Chapitre 4

Fonctions réciproques

I. Définition

Activité 1

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^2+3$.

1. a. Déterminer $g([0,+\infty[)$.

   b. Montrer que pour tout réel y de $[3,+\infty[$, l'équation $g(x)=y$ admet une unique solution dans $[0,+\infty[$ que l'on déterminera.

2. Soit h la fonction définie sur $[3,+\infty[$ par $h(x)=\sqrt{x-3}$.

   Montrer que pour tout réel y de $[0,+\infty[$, l'équation $h(x)=y$ admet une unique solution dans $[3,+\infty[$.

3. Déterminer $g\circ h$ et $h\circ g$.

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.
On dit que f réalise une bijection de I sur $f(I)$ (ou que f est une bijection de I sur $f(I)$), si pour tout y de $f(I)$, l'équation $f(x)=y$ admet une unique solution dans I.

Théorème

Si f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I, alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

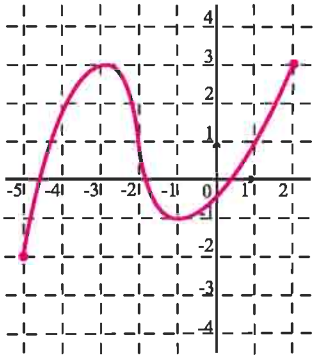
Démonstration

Soit y un réel de $f(I)$. Par définition de $f(I)$, il existe un réel x de I tel que $f(x)=y$.
L'unicité résulte de la stricte monotonie de f.

Activité 2

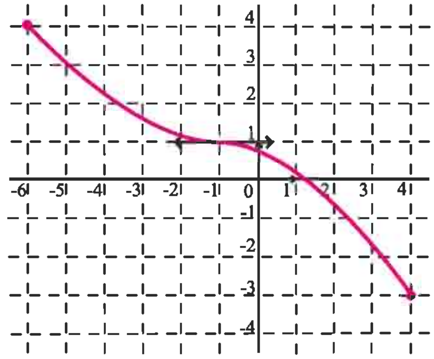
Parmi les fonctions f_i, $i\in\{1,2,3,4\}$ représentées ci-après, identifier celles qui réalisent une bijection de I sur $f_i(I)$.

①



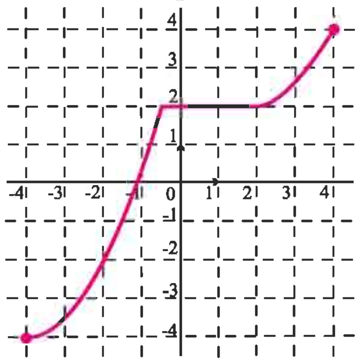
$I=[-5,2]$ $\quad f_1(I)=[-2,3]$

②



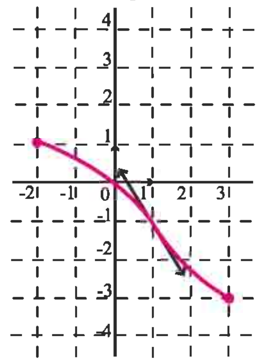
$I=[-6,4]$ $\quad f_2(I)=[-3,4]$

③



$I=]-4,4[$ $\quad f_3(I)=]-4,4[$

④



$I=[-2,3[$ $\quad f_4(I)=]-3,1]$

Définition

Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$. On appelle fonction réciproque de f et on note f^{-1} la fonction définie sur $f(I)$ qui à tout y de $f(I)$ associe l'unique solution dans I de l'équation $f(x)=y$.

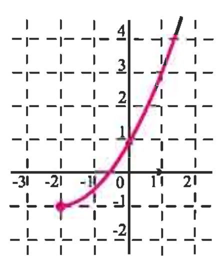
Conséquence

Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$ et f^{-1} sa fonction réciproque.

Pour tout x de I et tout y de $f(I)$, $f(x)=y$, si et seulement si, $f^{-1}(y)=x$.

$f^{-1}\circ f(x)=x$, pour tout x de I et $f\circ f^{-1}(y)=y$, pour tout y de $f(I)$.

Activité 3



Dans la figure ci-contre on a représenté dans un repère orthonormé une bijection de $[-2,+\infty[$ sur $[-1,+\infty[$.

Déterminer $f^{-1}(-1)$, $f^{-1}(1)$ et $f^{-1}(3)$.

Activité 4

1. Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

   a. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   b. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout réel x de $\mathbb{R}_+^*$.

2. Soit la fonction $g : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$.

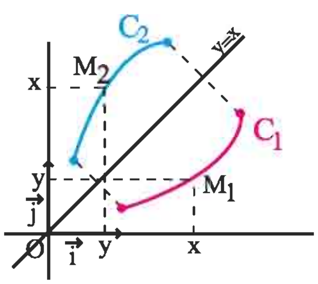
   a. Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$.

   b. Déterminer g^{-1}.

Représentation graphique de f^{-1}.

Soit f une bijection de I sur J et C_1 et C_2 les courbes respectives de f et f^{-1} dans un repère orthonormé.
Soit $M_1(x,y)$ un point du plan et $M_2(y,x)$ son symétrique par rapport à la droite $\Delta : y = x$. Alors

$$M_1(x,y) \in C_1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in J \end{cases} \Leftrightarrow M_2 \in C_2.$$

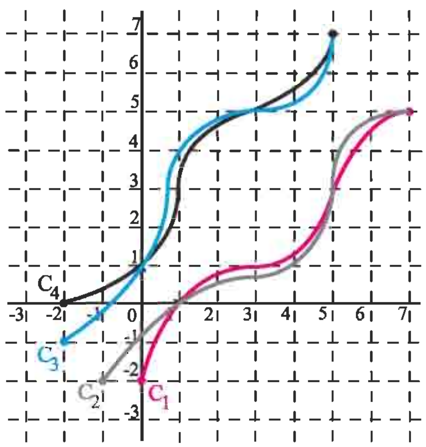


Conséquence

Les courbes respectives d'une bijection f et de sa réciproque f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Activité 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Dans la figure ci-contre, on a représenté les courbes de deux bijections f et g définies respectivement sur $[0,7]$ et $[-2,5]$, ainsi que les courbes de leurs fonctions réciproques.
Identifier la courbe de chacune des fonctions f, f^{-1}, g et g^{-1}.



II. Fonction réciproque d'une fonction strictement monotone

Théorème

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors sa réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$ et varie dans le même sens que f.

Démonstration

- La continuité de f^{-1} est admise.
- Supposons, par exemple que f est strictement croissante sur I.

Soit $y_1 < y_2$ deux réels de $f(I)$ et soit x_1 et x_2 les réels de I tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Si l'on avait $x_1 \geq x_2$, on en déduirait que $f(x_1) \geq f(x_2)$, c'est à dire $y_1 \geq y_2$.
Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $y_1 < y_2$. Par suite $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ et f^{-1} est strictement croissante sur $f(I)$.

Activité 1

Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \sin x$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} continue sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Donner les valeurs de $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$; $f^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $f^{-1}(1)$.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Expliciter $f^{-1}(x)$ et montrer que f^{-1} est dérivable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.
3. En utilisant la relation $f \circ f^{-1}(y) = y$, pour tout $y \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$,

montrer que $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$.

Théorème

Soit f une bijection d'un intervalle ouvert I sur $f(I)$,
a un réel de I et $b = f(a)$.

Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b et $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Démonstration

Soit y un réel de $f(I)$ différent de b et soit $x = f^{-1}(y)$. Alors x est distinct de a et appartient à I.

On peut alors écrire $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \dfrac{x - a}{f(x) - f(a)} = \dfrac{1}{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}$.

Lorsque y tend vers b, $x = f^{-1}(y)$ tend vers $a = f^{-1}(b)$ car f^{-1} est continue en b.

On en déduit que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$. Le théorème en découle.

Corollaire

Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$.

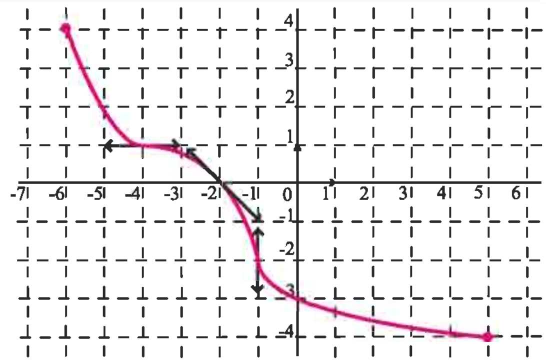
Si f est dérivable sur I et $f'(x) \neq 0$ pour tout x de I, alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et

$\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'\left[f^{-1}(y)\right]}$, pour tout y de $f(I)$.

Activité 3

Dans la figure ci-contre on a représenté dans un repère orthonormé une bijection f de $[-6, 5]$ sur $[-4, 4]$ ainsi que les tangentes au points d'abscisses -4, -2 et -1.

Etudier la dérivabilité de la fonction f^{-1} aux points d'abscisses -2, 0 et 1.



Activité 4

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \cos x$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

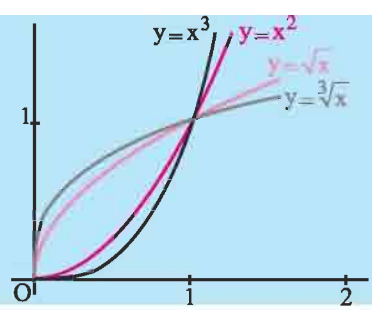
1. Tracer C_f.
2. Montrer que f réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.
3. Etudier la dérivabilité de f^{-1} en 0 et calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$.
4. On désigne par $C_{f^{-1}}$ la courbe représentative de f^{-1}.
   Que peut-on dire des demi-tangentes à $C_{f^{-1}}$, à droite en -1 et à gauche en 1?
5. Tracer la courbe de f^{-1} dans le même repère orthonormé.

III. Fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $n \geq 2$

Théorème et définition

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

La fonction $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. Elle admet une fonction réciproque strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, appelée fonction racine $n^{\text{ème}}$.



Notation

L'image d'un réel positif x par la fonction racine $n^{\text{ème}}$ est noté $\sqrt[n]{x}$ et se lit « racine $n^{\text{ème}}$ de x ».

Lorsque $n=2$ et pour x positif $\sqrt[2]{x}=\sqrt{x}$.

Conséquence

Pour tous réels positifs x et y , $y=x^n$, si et seulement si, $x=\sqrt[n]{y}$.

Les opérations sur les radicaux découlent immédiatement de la définition de la fonction racine $n^{\text{ème}}$.

Conséquence

Soit deux entiers n et p tels que $n\geq 2$ et $p\geq 2$ et deux réels positifs a et b. Alors

$\sqrt[n]{a^n}=a$. $\quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$. $\quad \sqrt[n]{a.b}=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$. $\quad \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b\neq 0$.

$\sqrt[n]{a}=\sqrt[np]{a^p}$. $\quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^p=\sqrt[n]{a^p}$. $\quad \sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}=\sqrt[np]{a}$.

Activité 1

Ecrire plus simplement les réels $\sqrt[6]{64}$, $\sqrt[6]{2^{-12}}$, $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$, $\sqrt[3]{2^6.3^3}$, $\dfrac{\sqrt[8]{16}}{\sqrt[8]{81}}$, $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$.

Activité 2

1. Comparer $\sqrt[6]{2^4}$ et $\sqrt[4]{2^3}$.
2. Soit un réel $x\geq 0$ .Comparer $\sqrt[6]{x^4}$ et $\sqrt[4]{x^3}$.

Théorème

Pour tout entier $n\geq 2$, la fonction $f:\ x\mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$. De plus, $f'(x)=\dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}\right)}$, pour tout $x>0$.

Démonstration

La fonction $g:x\mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et admet une dérivée ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

On en déduit que sa fonction réciproque est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, $\left(g^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{g'\left(g^{-1}(x)\right)}=\dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}=\dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}\right)}$, $x>0$.

Activité 3

Etudier la dérivabilité à droite en 0 de la fonction $x\mapsto\sqrt[n]{x}$, $n\geq 2$. Interpréter.

Activité 4

Etudier et représenter les fonctions $x\mapsto\sqrt[3]{x}$; $x\mapsto\sqrt[4]{x}$; $x\mapsto\sqrt[6]{x}$.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$.

   Alors f réalise une bijection de I sur $[-1, 1]$, où

   □ $I = [0, 2\pi]$. □ $I = [0, \pi]$. □ $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

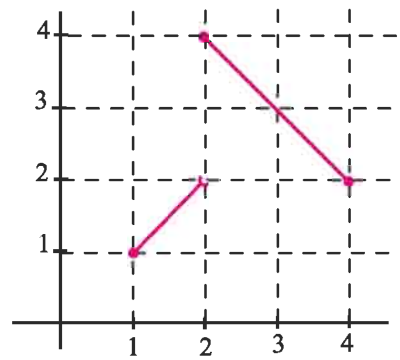
2. Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \cos x$.

   $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}\right)$ est égal à

   □ $\frac{2}{\sqrt{3}}$. □ -2. □ $-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

3. Soit f une fonction dont la représentation graphique est ci-contre. f réalise une bijection de

   □ $[1, 4]$ sur $[1, 4]$.
   □ $[1, 2]$ sur $[1, 2]$.
   □ $[1, 3]$ sur $[1, 3]$.



4. La fonction $f : x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est dérivable sur

   □ $[0, +\infty[$ □ $]0, +\infty[$ □ $\mathbb{R}^*$.

VRAI - FAUX

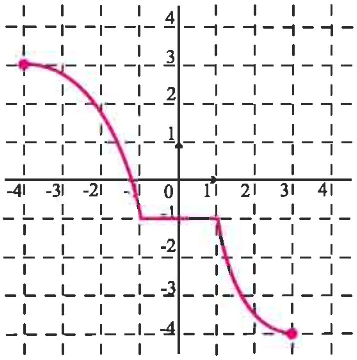
Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Soit f une fonction continue sur $[1, +\infty[$ telle que $f(1) = 2$ et $\lim\limits_{+\infty} f = 3$.

   Alors f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[2, 3[$.
2. Toute fonction affine réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
3. Pour tout réel $x > 0$, $\sqrt[4]{x} \geq \sqrt[3]{x}$.
4. La fonction réciproque de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt[n]{x}$ est dérivable à droite en 0.
5. Si f est strictement monotone et dérivable sur un intervalle I et si f garde un signe constant sur I, alors sa réciproque garde un signe constant sur $f(I)$.

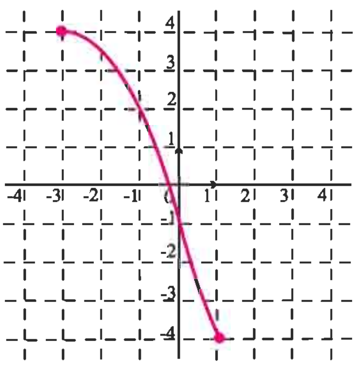
1 Parmi les fonctions f_i, $i \in \{1, 2, 3\}$ représentées ci-après, identifier celles qui réalisent une bijection de I sur $f_i(I)$.

1.



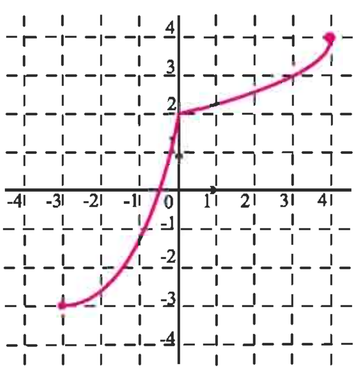
$I = [-4, 3]$ $\quad f_1(I) = [-4, 3]$

2.



$I = [-3, 1]$ $\quad f_2(I) = [-4, 4]$

3.



$I = [-3, 4]$ $\quad f_3(I) = [-3, 4]$

2 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]-\infty, 2]$ par $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

1. Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
3. Soit f^{-1} la fonction réciproque de f.

a. Tracer la courbe de f^{-1} dans le même repère.

b. Etudier graphiquement la dérivabilité de f^{-1} à droite en 1.

c. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$.

d. Expliciter $f^{-1}(x)$, pour $x \in J$.

3 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]-\infty, 0[$ par $f(x) = x - 1 - \dfrac{1}{x}$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
2. Expliciter $f^{-1}(x)$, pour tout réel x.
3. Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et expliciter $\left(f^{-1}\right)'(x)$, x dans J.

4 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

1. Etudier les variations de f et montrer que f réalise une bijection de I sur I.
2. a. Expliciter $f \circ f(x)$, $x \in I$.

b. Qu'en déduit-on ?

5 Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$.

1. Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} que l'on déterminera.
4. Etudier la dérivabilité de f^{-1}.

6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

1. Etudier les variations de f et montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 2[$.

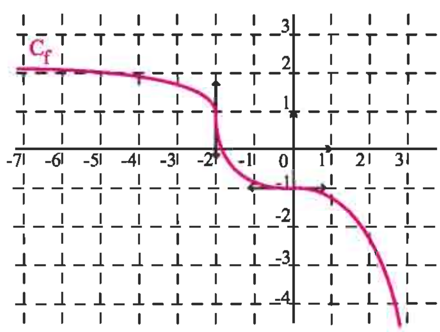
2. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in]0, 2[$.

7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x+\sqrt{x}} & \text{si } x>0, \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases}$$

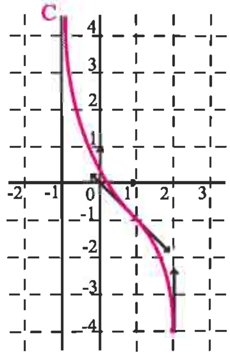
1. Etudier la continuité puis la dérivabilité de f à droite en 0.
2. a. Dresser le tableau de variation de f.
b. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[0, 1[$.
c. Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur $[0, 1[$.
3. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in [0, 1[$.

8 Le graphique ci-dessous représente la courbe d'une fonction f bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.



On désigne par g la fonction réciproque de f.
1. Que peut-on dire de la dérivabilité de g en -1 et en 1 ?
2. Dresser le tableau de variation de g.
3. Reproduire la courbe de f et représenter dans le même repère la courbe de g.

9 Le graphique ci-dessous représente la courbe C d'une fonction f bijective de $]-1, 2]$ sur $[-4, +\infty[$.
La courbe C admet une asymptote verticale d'équation $x=-1$.



On désigne par g la fonction réciproque de f.
1. Que peut-on dire de la dérivabilité de g en -1 et en -4 ?
2. Dresser le tableau de variation de g.
3. Que peut-on dire de la limite de g en $+\infty$.

10 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\tan x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{1+x^2},\ x\in\mathbb{R}.$$

11 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, \pi]$ par $f(x)=2\cos x+3$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Montrer que f réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur un intervalle I que l'on déterminera.
3. On note g la fonction réciproque de f.
a. Calculer $g(5)$, $g(3)$ et $g(1)$.
b. Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]1, 5[$ et expliciter $g'(x)$.

12 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ par $f(x)=\frac{1}{\sin x}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ sur $[1, +\infty[$.

2. Calculer $f^{-1}(\sqrt{2})$ et $f^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

3. Etudier la continuité et la dérivabilité de f^{-1} sur $[1, +\infty[$.

4. Calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)$, pour $x \in]1, +\infty[$.

13 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=1-\tan x$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(2)$.
4. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{-x^2+2x-2}$, pour tout réel x.
5. Etudier la nature des branches infinies de la courbe de f^{-1}.

14 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=\sqrt{\cos x}$.

1. Etudier la dérivabilité de la fonction f en $\frac{\pi}{2}$ à gauche et interpréter.
2. a. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0, 1]$.

b. Montrer, en utilisant la première question, que la fonction f^{-1} est dérivable en 0 à droite et préciser le nombre $\left(f^{-1}\right)'_d(0)$.

c. Préciser la demi-tangente à la courbe de f en son point d'abscisse 0 et en déduire que f^{-1} n'est pas dérivable à gauche en 1.

3. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0, 1[$ et que $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$ pour tout $x \in]0, 1[$.

15 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par $f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x$.

1. Etudier les variations de f et tracer sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (On précisera les demi-tangentes aux points d'abscisses 0 et 1).
2. Montrer que f réalise une bijection de $[0, 1]$ sur un intervalle I que l'on précisera.
3. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0, 1[$ et que $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{-2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$, pour tout x de $[0, 1[$.

16 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0, 1]$ par $f(x)=\frac{1}{1-\cos \pi x}$.

1. Etudier les variations de f et tracer sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. a. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution x_0 dans $]0, 1]$.

b. Calculer $f\left(\frac{2}{3}\right)$ et en déduire la valeur de x_0.

3. a. Montrer que f réalise une bijection de $]0, 1]$ sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

b. La fonction f^{-1} est-elle dérivable en $\frac{1}{2}$ à droite ?

c. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et que $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{-1}{\pi x\sqrt{2x-1}}$, pour tout $x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

17 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1, 1]$ par $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[-1, 1]$ sur un intervalle I que l'on précisera.
2. Soit g la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $g(x)=f(x)-x$.
a. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $]-1, 1[$.
b. Vérifier que $\alpha \in \left]\dfrac{2}{3}, 1\right[$.
c. En déduire que la droite $\Delta : y = x$ coupe la courbe de f en un unique point.
3. La fonction f^{-1} est-elle dérivable en $\dfrac{2}{3}$?
4. a. Calculer $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, $f(0)$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
b. En déduire les nombres dérivés de f^{-1} en $\dfrac{5}{3}$, en 1 et en $\dfrac{5}{7}$.

18 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I que l'on précisera.
2. a. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $-2<\alpha<-1$.
b. En déduire le signe de $f(x)-x$.
3. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in I$.
4. On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0=-1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$.
a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\alpha \le u_n \le -1$.
b. Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

19 A/ Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}+1$.

1. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 1.
b. Dresser le tableau de variation de f.
c. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.
2. a. La fonction f^{-1} est-elle dérivable à droite en 1 ?
b. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in I$.

B/ On considère la fonction g définie par

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)} & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[, \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

1. a. Montrer que g est continue à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$.
b. Vérifier que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $g(x)=\dfrac{1}{1+\sin x}$.
2. Montrer que g réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
3. a. Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right]$ et calculer $\left(g^{-1}\right)'(x)$.
b. La fonction g^{-1} est-elle dérivable à droite en $\dfrac{1}{2}$?

20 1. Simplifier les nombres ci-dessous.

$x=\dfrac{\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{27}.\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{81}}$; $y=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{32}}$; $t=\sqrt[3]{8^2}$.

2. a. Développer $\left(2+\sqrt{5}\right)^3$.
b. Simplifier $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}-\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}$.

21 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous.

1. $\sqrt[3]{x}=\sqrt[4]{2}$.
2. $\sqrt[5]{x^2}=\sqrt[3]{3}$.
3. $\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x}+2=0$.
4. $\left(1-\sqrt[4]{x}\right)^3+8=0$.

22 Calculer les limites ci-dessous.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2-x+1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt[3]{x}$; $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}$.

23 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x + \sqrt[3]{x}$.

1. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Etudier la branche infinie de la courbe de f.
4. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.
5. Calculer $f(1)$, $f(8)$, $\left(f^{-1}\right)'(2)$ et $\left(f^{-1}\right)'(10)$.

24 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x\sqrt[4]{x}$.

1. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter.
4. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.
5. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.