Chapitre 8

Fonction logarithme népérien

M.Stifel (1544) met en évidence les deux suites

...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...	8
...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	1	4	8	16	...	256

Le passage de la ligne inférieure ("in inferiore ordine") à la ligne supérieure ("in superioreordine") transforme les produits en sommes. Par exemple, au lieu de multiplier 8 par 32 "in inferiore ordine", on peut prendre les "logarithmes" correspondants 3 et 5 "in superioreordine", calculer leur somme, qui est 8, retourner "in inferiore ordine", où l'on trouve le produit 8.32=256. Cette table plus détaillée, serait d'une grande utilité, car additionner est plus facile que multiplier. Les premières tables logarithmiques [...] ont été calculées par John Napier (1614, 1619), Henry Briggs (1624) et Jost Burgi (1620).

(E.Haier et al,L'analyse au fil
de l'histoire, 2000).

Chapitre 8

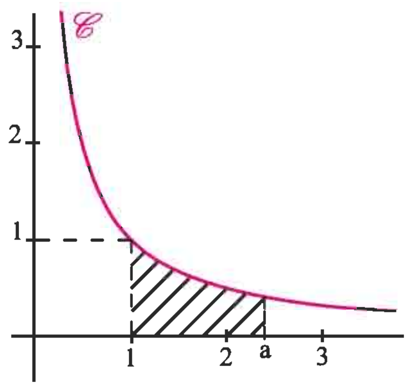
Fonction logarithme népérien

I. Introduction

Activité 1

A/ Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on a construit la courbe de la fonction

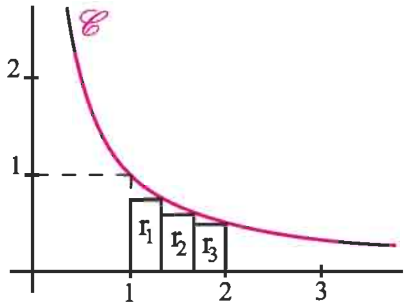
$$f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto \frac{1}{t}$$

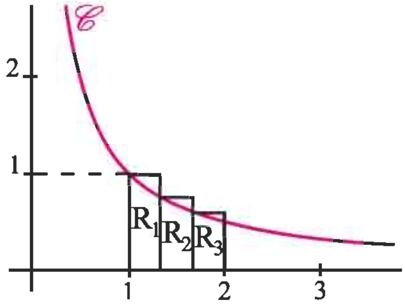


Pour tout réel $a > 0$, on désigne par $S(a)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = a$.

1. Que vaut $S(1)$?

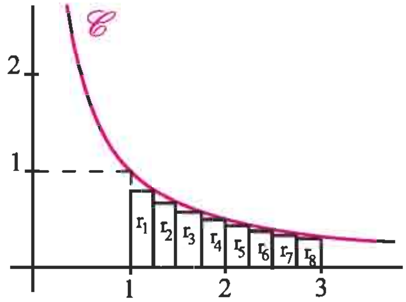
2. a. On partage l'intervalle $[1,2]$ en trois intervalles de même amplitude et on construit les rectangles r_1, r_2, r_3, R_1, R_2 et R_3 comme l'indique les deux figures ci-dessous.





On désigne par $\mathcal{A}$ (respectivement $\mathcal{A}'$) la somme des aires des rectangles r_i (respectivement R_i), $1 \le i \le 3$. Montrer que $\frac{37}{60} \le S(2) \le \frac{47}{60}$.

b. On partage l'intervalle $[1,3]$ en huit intervalles de même amplitude et on construit les rectangles r_i, $1 \le i \le 8$, comme l'indique la figure ci-contre.
Calculer la somme des aires des rectangles r_i, $1 \le i \le 8$ et vérifier que $S(3) \ge 1$.



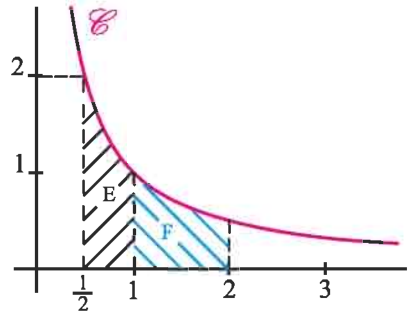
c. Montrer que $S(2.5) \leq 1$.

3. a. Soit $E = \left\{ M(x,y) \text{ avec } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\}$ et

$F = \left\{ M(x,y) \text{ avec } 1 \leq x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\}$.

Montrer que E et F ont même aire.

b. En déduire que $S\left(\frac{1}{2}\right) = S(2)$.



B/ Pour tout réel $x > 0$, on pose $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$.

1. a. Montrer que $F(x) > 0$, si et seulement si, $x > 1$.

b. Exprimer $F(x)$ à l'aide de $S(x)$.

2. Justifier la dérivabilité de F sur $]0,+\infty[$ et calculer $F'(x)$.

En déduire que F est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

3. Montrer qu'il existe un unique réel e appartenant à $]2,3[$ tel que $F(e) = 1$.

Définition

On appelle fonction logarithme népérien et on note ln, la fonction

$x \mapsto \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \ x > 0.$

Les résultats suivants découlent immédiatement de la définition précédente.

La fonction logarithme népérien est la primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$, qui s'annule en 1.

La fonction ln est définie, continue, dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

La fonction ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et $\ln 1 = 0$.

Il existe un unique réel x appartenant à $]2,3[$ tel que $\ln(x) = 1$.

Il en résulte que

Soit a et b deux réels strictement positifs.

$\ln a > \ln b$, si et seulement si, $a > b$.

$\ln a = \ln b$, si et seulement si, $a = b$. $\qquad \ln a = 0$, si et seulement si, $a = 1$.

$\ln a > 0$, si et seulement si, $a > 1$. $\qquad \ln a < 0$, si et seulement si, $0 < a < 1$.

Activité 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations ci-dessous.

   a. $\ln(x+1)=0$.　　　b. $\ln(1-x)=\ln(2+x)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations ci-dessous.

   a. $\ln(x-1)\leq 0$.　b. $\ln(4-3x)>0$.　c. $\ln\left(x^2+1\right)\geq 0$.　d. $\ln(2x-5)\leq \ln x$.

II. Etude et représentation graphique de la fonction ln

On se propose d'étudier la fonction ln et de construire sa courbe représentative C dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Activité 1

1. Soit un entier $n\geq 1$.

   a. Montrer que $\dfrac{1}{t}\geq\dfrac{1}{2^{n+1}}$, pour tout réel t vérifiant $2^n\leq t\leq 2^{n+1}$.

   b. En déduire que $\displaystyle\int_{2^n}^{2^{n+1}}\frac{1}{t}dt\geq\frac{1}{2}$.

2. Vérifier que $\displaystyle\int_1^{2^n}\frac{1}{t}dt=\int_1^{2}\frac{1}{t}dt+\int_2^{2^2}\frac{1}{t}dt+\ldots+\int_{2^{n-1}}^{2^n}\frac{1}{t}dt$, pour tout entier $n\geq 1$.

3. a. Montrer que $\displaystyle\int_1^{2^n}\frac{1}{t}dt\geq\frac{n}{2}$, pour tout entier $n\geq 1$.

   b. En déduire que la fonction ln n'est pas majorée et déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x$.

4. a. Montrer que les deux fonctions $x\mapsto\ln x$ et $x\mapsto-\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ définies sur $]0,+\infty[$ ont même dérivée.

   b. En déduire que $\ln x=-\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x>0$.

   c. Calculer alors $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x$.

Théorème

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.　　　$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$.

Activité 2

1. Calculer $\lim\limits_{x\mapsto 1}\dfrac{\ln x-\ln 1}{x-1}$.

2. Montrer que $\dfrac{1}{t}\leq\dfrac{1}{\sqrt{t}}$, pour tout $t\geq 1$.

3. Montrer que $\int_1^x \frac{1}{t}dt \leq \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}dt$, pour tout $x \geq 1$.

4. Calculer $\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ et en déduire que $\ln x \leq 2\sqrt{x} - 2$.

   Montrer alors que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Théorème

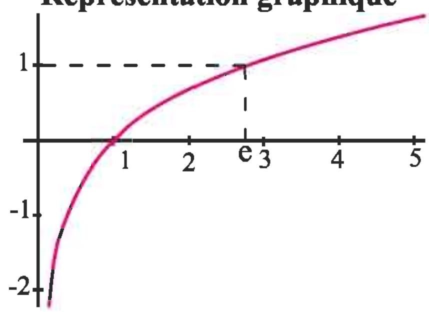
$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Les activités précédentes nous permettent de dresser le tableau de variation et de représenter graphiquement la fonction ln.

Tableau de variation

x	0		$+\infty$
$(\ln)'(x)$		$+$	
$\ln$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Représentation graphique



- La fonction ln réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.
- L'unique solution de l'équation $\ln x = 1$ est le réel noté e. Ainsi, $\ln e = 1$.

Les calculatrices donnent des valeurs approchées du réel e de sorte que $e \simeq 2.71828...$

III. Propriétés algébriques

Activité 1

1. On considère les deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f(x) = \ln x$, $g(x) = \ln(ax)$ où a est un réel strictement positif.
   a. Comparer $f'(x)$ et $g'(x)$.
   b. En déduire qu'il existe une constante réelle c telle que $\ln(ax) = \ln x + c$, $x > 0$.
   c. Montrer alors que $\ln(ax) = \ln a + \ln x$, $x > 0$.
2. Montrer que $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$, $a > 0$ et $b > 0$.

Nous résumons ci-dessous les propriétés algébriques de la fonction ln.

Théorème

Soit a et b deux réels strictement positifs.

- $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$.
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.
- $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$.
- Pour tout entier p, $\ln(a^p) = p\ln a$
- Pour tout entier $p \geq 2$, $\ln\left(\sqrt[p]{a}\right) = \frac{1}{p}\ln a$.

Activité 2

1. Exprimer, à l'aide des réels $\ln 2$ et $\ln 3$ chacun des réels ci-dessous.

$\ln(\sqrt{3})$, $\ln(\sqrt[3]{2})$, $\ln 108$, $\ln\left(\frac{81}{8}\right)$, $\ln\left(\sqrt[5]{2^3}\right)$ et $\ln\left(\sqrt{\frac{1}{27}}\right)$.

2. Simplifier les écritures ci-dessous.

$\ln(\sqrt{e})$, $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$, $\ln(e^3)$, $\ln(e^{-2})$, $\ln\left(\frac{\sqrt[3]{e}}{\sqrt{e}}\right)$ et $\ln\left(\sqrt[4]{e}.\sqrt[3]{e}\right)$.

Exercice résolu 1

1. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-4}$.

2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $2^n \geq 10^5$.

Solution

1.La fonction ln étant strictement croissante, il en résulte que

$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-4}$, si et seulement si, $\ln\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \ln(10^{-4})$, ce qui équivaut à $-n\ln 2 \leq -4\ln 10$.

On en déduit que $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-4}$, si et seulement si, $n \geq \frac{4\ln 10}{\ln 2}$.

Ce qui est réalisé dès que $n \geq 14$.

1. D'après la croissance de la fonction ln,

$2^n \geq 10^5$, si et seulement si, $n\ln 2 \geq 5\ln 10$, ou encore, $n \geq \frac{5\ln 10}{\ln 2}$.

Ce qui est réalisé dès que $n \geq 17$.

Activité 3

Déterminer les limites ci-dessous.

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln\left(\sqrt[3]{x}\right)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\sqrt[3]{x}\right)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[10]{x}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x+3)}{3x+4}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln x$.

IV. Autres limites

Activité 1

Soit m un entier naturel non nul et n un entier supérieur ou égal à 2.

1. a. Vérifier que $\dfrac{(\ln x)^n}{x^m} = \left(\dfrac{n}{m} \times \dfrac{\ln\left(\sqrt[n]{x^m}\right)}{\sqrt[n]{x^m}}\right)^n$, $x > 0$.

   b. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^n}{x^m} = 0$.

2. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \left|x^m (\ln x)^n\right|$.

Théorème

Pour tous entiers naturels non nuls n et m, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln^n x}{x^m} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^m \ln^n x = 0$.

Activité 2

Déterminer les limites ci-dessous.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - \ln^3 x$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 + \ln^3 x$.
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^4\left(1 - \ln^5 x\right)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^4\left(1 - \ln^5 x\right)$.

Exercice résolu 2

Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln^2 x & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1. Etudier la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.
2. Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Solution

1. La fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable en tout réel $x > 0$.

On en déduit que la fonction f est dérivable en tout réel $x > 0$, comme produit de fonctions dérivables.

Pour étudier la dérivabilité de f en 0 à droite, il suffit d'étudier la limite en 0^+ du taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(0)}{x}$.

L'égalité $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = x \ln^2 x$, $x > 0$ implique que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 0$.

Ce qui prouve que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0) = 0$.

En conclusion, f est dérivable sur $[0, +\infty[$.

2. Le calcul donne $f'(x)=2x\ln x(\ln x+1)$, pour tout $x>0$.

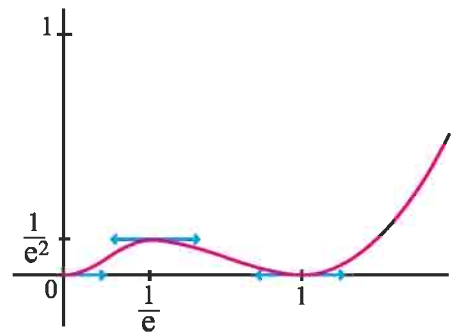
Les réels $f'(x)$ et $\ln x(\ln x+1)$ sont de même signe, pour $x>0$.

On en déduit que $f'(x)\leq 0$, si et seulement si, $\frac{1}{e}\leq x\leq 1$.

Remarquons que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln^2 x=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\ln^2 x}{x}=+\infty$.

On en déduit que la courbe de f admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$, au voisinage de $+\infty$.

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



V. Fonctions $x\mapsto \ln(u(x))$ et $x\mapsto \ln(|u(x)|)$

Activité 1

Soit la fonction $u: x\mapsto x^2+x+2$

1. Déterminer le signe de u sur $\mathbb{R}$.

2. Soit la fonction $f: x\mapsto \ln(x^2+x+2)$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

b. Montrer que f est dérivable en tout réel de son ensemble de définition et calculer $f'(x)$.

Le théorème de dérivation des fonctions composées fournit la démonstration des théorèmes ci-dessous.

Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $u(x)>0$, pour tout réel x dans I.

La fonction $f: x\mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$, pour tout x dans I.

Corollaire

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $u(x) \neq 0$, pour tout réel x de I.

La fonction $f : x \mapsto \ln|u(x)|$ est dérivable sur I et $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, pour tout x de I.

Corollaire

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $u(x) \neq 0$ pour tout réel x dans I.

Les primitives sur I de la fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sont les fonctions $x \mapsto \ln|u(x)| + k$, où k est une constante réelle.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right) + x$

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Etudier la nature des branches infinies de la courbe de f.
3. Tracer la courbe de f.

Activité 3

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I, dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$, $I =]1, +\infty[$.
2. $f(x) = \dfrac{x+1}{x+3}$, $I =]-\infty, -4[$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$, $I =]0, 1[$.
4. $f(x) = \dfrac{2\cos(2x)}{\sin(2x)}$, $I = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Activité 4

Dériver la fonction $x \mapsto x \ln x$

En déduire une primitive de la fonction ln.

Théorème

La fonction $x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Activité 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit la fonction $f : x \mapsto 1-x+\ln x$

1. Etudier les variations de f et tracer sa courbe C_f.
2. Soit α un réel de $]0,1[$.
   a. Exprimer à l'aide de α l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ du domaine du plan limité par C_f, la droite des abscisses et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=1$.
   b. Déterminer $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} \mathcal{A}(\alpha)$.

Activité 6

1. Déterminer les réels a et b tels que pour tout $t \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$, $\dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t+1}$.
2. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t(t+1)}$.
3. A l'aide d'une intégration par parties, donner la valeur de $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)dt}{t^2}$.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Pour tout réel $x > 0$, $\ln\left(x + x^2\right)$ est égal à

□ $\ln x + \ln(x+1)$. □ $\ln\left(x^2\right) + \ln x$. □ $3\ln x$.

2. $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ est égal à

□ -2. □ $\frac{1}{2}$. □ $-\frac{1}{2}$.

3. Soit $f(x) = \ln(-x)$, $x < 0$. Alors $f'(x)$ est égal à

□ $-\frac{1}{x}$. □ $\frac{1}{x}$. □ $-x$.

4. Soit $f(x) = x\ln\left(x^2\right)$, $x < 0$. Alors $f'(x)$ est égal à

□ $2(1 + \ln|x|)$. □ $2(1 + \ln x)$. □ $\ln\left(x^2\right) + \frac{1}{x}$.

5. La limite de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ en 0^+ est égale à

□ $+\infty$. □ $-\infty$. □ 0.

6. La limite de la fonction $x \mapsto \ln x + \frac{1}{x}$ en 0^+ est égale à

□ $-\infty$. □ 0. □ $+\infty$.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. La fonction $x \mapsto x\ln x - x + 1$ est la primitive de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, qui s'annule en 1.

2. La fonction ln est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Pour tout réel x, $\ln x = \int_2^x \frac{dt}{t} + \ln 2$.

4. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x\ln x - x} = +\infty$.

1 Calculer

$\ln\left(e^2\right)$; $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$; $\ln 25-2\ln 5$;

$\ln 100000-\ln 100000-\ln 1000-\ln\ln 100-\ln 10$.

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations ci-dessous.

1. $\ln x+\ln(x+1)=0$.
2. $\ln(\ln x)=0$.
3. $\ln\left(\frac{1}{x}\right)+\ln\left(x^3\right)=\ln 3$.
4. $(\ln x)^2-2\ln x-3=0$.

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations ci-dessous.

1. $\ln(2x+3)<5$.
2. $\ln(3x+1)\leq 0$.
3. $\ln(5x)>1-\ln 5$.
4. $\ln\left(\frac{1+x}{x+2}\right)\geq 0$.
5. $(\ln x)^2-2\ln x<0$.

4 Trouver, dans chacun des cas suivants, la limite de la fonction f en $+\infty$.

1. $f(x)=\frac{\ln\left(x^4\right)}{x}$.
2. $f(x)=\frac{x^2+1}{x\ln x}$.
3. $f(x)=\frac{2-\ln x}{1+\ln x}$.
4. $f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)$.
5. $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x+2}$.
6. $f(x)=1+x-\ln x$.
7. $f(x)=x-\ln^2 x$.
8. $f(x)=x-\ln(x+1)+\ln(x)$.

5 Déterminer les limites ci-dessous.

1. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\ln x-\ln 3}{x-3}$.
2. $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$.
3. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\ln x+\ln 2}{x-\frac{1}{2}}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}$.
7. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x^2-3x+2}$.

6 Déterminer les limites ci-dessous.

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln x$.
2. $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x$.
3. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}+\ln x$.
4. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^3}{\ln x}$.
5. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln^3 x}{x}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3\ln^2\left(\frac{1}{x}\right)$.

7 Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Pour chacun des cas ci-dessous, déterminer l'ensemble de définition de f, l'ensemble dans lequel elle est dérivable, calculer $f'(x)$ et représenter f après avoir étudier les branches infinies de sa courbe représentative.

1. $f: x\mapsto \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. $f: x\mapsto \ln\left(x^2-x+1\right)$.
3. $f: x\mapsto x\ln x-x$.
4. $f: x\mapsto x^2\ln x$.
5. $f: x\mapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.
6. $f: x\mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

8 Déterminer dans chacun des cas suivants, une primitive de la fonction f sur I.

1. $f(x)=\frac{1+x+x^2+x^3}{x^4}$, $I=\mathbb{R}_+^*$.
2. $f(x)=\frac{2x-3}{x+1}$, $I=]-1,+\infty[$.
3. $f(x)=\frac{x+1}{x+2}$, $I=]-2,+\infty[$.
4. $f(x)=\frac{x}{x^2+1}-x\left(x^2+1\right)$, $I=\mathbb{R}$.
5. $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$, $I=]1,+\infty[$.
6. $f(x)=\frac{\ln^3 x}{x}$, $I=]0,+\infty[$.
7. $f(x)=\tan x$, $I=\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.
8. $f(x)=\frac{1}{\tan x}$, $I=\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

9 Calculer les intégrales ci-dessous.

1. $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$. 2. $\int_1^2 \frac{2}{x+1}dx$.

3. $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx$. 4. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$

5. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx$. 6. $\int_2^4 \frac{dx}{x\ln x}$.

10 A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales ci-dessous.

1. $\int_1^e x\ln x\,dx$. 2. $\int_e^{e^2} x^2\ln x\,dx$.

3. $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$. 4. $\int_1^e \ln^2 x\,dx$.

11 On considère la fonction

$f: x \mapsto \frac{1}{x^2(x-2)}$.

1. On se propose de déterminer les réels a , b et c tels que $f(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x-2}$, $x \neq 0$ et $x \neq 2$.

a. Calculer $\lim_{x\to 2} f(x)(x-2)$. En déduire c.

b. Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)x^2$. En déduire b.

c. Calculer $\lim_{x\to +\infty} f(x)x$. En déduire a.

2. Calculer $\int_3^4 f(x)dx$.

3. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_3^4 \frac{\ln(x-2)dx}{x^3}$.

12 Etudier, dans chacun des cas ci-dessous, f et tracer sa courbe dans un repère orthogonal.

1. $f: x \mapsto (\ln x)^2$.
2. $f: x \mapsto \frac{1}{\ln x}$.
3. $f: x \mapsto \ln(\sqrt{x})$.
4. $f: x \mapsto \ln|x^2-1|$.

13 Soit la fonction f définie sur $]0, e[$ par

$f(x)=\frac{\ln x-2}{\ln x-1}$.

1. Etudier les variations de f et tracer sa courbe C dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2. Montrer que f est une bijection de $]0, e[$ sur $]1,+\infty[$.

3. a. Tracer la courbe de f^{-1} dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

b. Calculer $f^{-1}(2)$ et en déduire $(f^{-1})'(2)$.

14 Soit la fonction $f: x \mapsto -\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Montrer que la droite Δ d'équation $y=\frac{-x}{2}$ est une asymptote à la courbe C.
Préciser la position relative de C par rapport à Δ.
4. Montrer que le point $I\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ est un centre de symétrie pour C.
5. Construire C.
6. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution réelle unique x_0 et que $\frac{2}{5}<x_0<\frac{9}{20}$.

15 Soit la fonction $f: x \mapsto (\ln x)^2-3\ln x+2$.

1. Dresser le tableau de variation de f,
(on pourra remarquer que $\ln\left(\sqrt{e^3}\right)=\frac{3}{2}$).
2. Tracer dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe C de f et préciser les points d'intersection de C avec l'axe $(O,\vec{i})$.
3. Montrer que la fonction
$F: x \mapsto x(\ln x)^2-5x\ln x+7x$ est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.
4. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C et les droites d'équations $x=e$, $x=e^2$ et $y=0$.

16 Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=2-x+\frac{\ln x}{x}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$.
2. Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=1-x^2-\ln x$.
a. Etudier le sens de variation de g.
b. Calculer $g(1)$. En déduire le signe de g.
3. Vérifier que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.
4. On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
a. Montrer que la droite $\Delta : y=-x+2$ est une asymptote à C.
b. Etudier la position relative de C et Δ.
c. Tracer C et Δ.

17 A/ Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=x^2-2+2\ln x$.

1. Dresser le tableau de variation de g.
2. Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution x_0 appartenant à $[1,\ 2]$.
Donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-1} près.
En déduire le signe de g sur $]0,+\infty[$.
3. Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.
a. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de g , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=2$ et $x=3$.
b. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de g , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\frac{1}{3}$ et $x=0.5$.

B/ Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x-2-\frac{2\ln x}{x}$.
On désigne par C sa courbe dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
1. Montrer que pour tout $x>0$, $f\,'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. a. Montrer que C admet une asymptote D au voisinage de $+\infty$ dont on donnera une équation.
b. Etudier la position de C et D.
c. tracer C et D.

18 1. Soi g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=2x\sqrt{x}-3\ln x+6$.
a. Etudier les variations de g sur $]0,+\infty[$.
b. En déduire le signe de g sur $]0,+\infty[$.
2. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{3\ln x}{\sqrt{x}}+x-1$. On désigne par C sa courbe dans un repère orthogonal.
a. Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$.
b. Etudier les variations de f sur $]0,+\infty[$.
3. a. Montrer que C admet une asymptote D au voisinage de $+\infty$ dont on donnera une équation.
b. Etudier la position de C et D.
c. tracer C et D.

19 Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1-\ln x}{x}$. On note C_f sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Tracer C_f
3. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.
4. Soit $C=\{M(x,y)$ tels que $y=f(x)$ et $1\le x\le e\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox).
a. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$ puis $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$.
b. En déduire le volume de S.

20 On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)$.

1. Déterminer les limites de f à droite en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et déterminer sa dérivée.

3. Soit u la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$u(x)=\ln x+x-3$.

a. Etudier les variations de u.

b. Montrer que l'équation $u(x)=0$ possède une unique solution α appartenant à l'intervalle $[2.2,\ 2.21]$.

c. Etudier le signe de u(x) sur $]0\ ;\ +\infty[$.

4. a. Etudier les variations de f.

b. Montrer que $f(\alpha)=-\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 2×10^{-2}.

5. Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

21 A/ Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=1-x-2x\ln x$.

1. Etudier les variations de g sur $]0,+\infty[$,

(on pourra remarquer que $\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{e^3}}\right)=-\dfrac{3}{2}$).

2. Calculer $g(1)$ puis en déduire le signe de $g(x)$ pour $x>0$.

B/ Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{(1+x)^2}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Vérifier que pour tout $x>0$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(1+x)^3}$.

b. Dresser le tableau de variation de f.

c. Etudier les branches infinies de C.

3. Déterminer une équation de la tangente à C au point d'intersection de C avec l'axe des abscisses.

4. Tracer C.

C/ Soit un réel $\lambda>1$.

1. Vérifier que pour tout $x>0$, $\dfrac{1}{x(1+x)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$.

2. En déduire $\int_1^{\lambda}\dfrac{dx}{x(1+x)}$.

3. On pose $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisse et les droites d'équation $x=1$ et $x=\lambda$.

a. A l'aide d'une intégration par partie, déterminer $A(\lambda)$.

b. Calculer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)$.

22 I. On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=x(x-1)+\ln x$.

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ pour $x>0$.

II. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=(x-1)^2+\ln^2 x$.

On désigne par C_1 la courbe de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1.a. Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

b. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x)=2\dfrac{g(x)}{x}$ pour $x>0$.

c. Dresser le tableau de variation de f sur $]0,+\infty[$.

2. Montrer que la restriction h de f à $]0,1]$ est une bijection de $]0,1]$ sur $[0,+\infty[$.

On désigne par h^{-1} la réciproque de h et par C_2 la courbe représentative de h^{-1} dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3. Soit u la fonction définie sur $]0,1]$ par $u(x)=h(x)-x$.

a. Dresser la tableau de variation de u sur $]0,1]$.

b. En déduire qu'il existe un seul réel a de$]0,1]$ tel que $h(a)=a$.

Vérifier que $0.5<a<1$.

2. a. Montrer que C_1 admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$.

b. Tracer dans le même repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ la droite Δ d'équation $y=x$, la courbe C_1 et la courbe C_2.

III. On désigne par A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_1, l'axe des abscisses et les droites d' équations $x=a$ et $x=1$.

Soit $I=\int_a^1 xf'(x)dx$.

1. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $I=-a^2-A$.

2. a. Montrer que $I=2\int_a^1 g(x)\,dx$.

b. En déduire que $I=-\frac{2}{3}a^3+a^2+2a-\frac{7}{3}-2a\ln a$.

c. Déterminer A en fonction de a.

23 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(0)=0, \\ f(x)=\frac{1}{2}x^2(3-2\ln x) \text{ si } x>0. \end{cases}$$

On note C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

A/ 1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. a. Étudier la dérivabilité de f en 0.

b. Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et déterminer f'.

3. Étudier le sens de variations de f sur $]0,+\infty[$ puis dresser son tableau de variations.

4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ possède une solution unique α dans $]0,+\infty[$.

Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

B/ 1. Déterminer une équation de la tangente D à la courbe C au point d'abscisse 1.

2. On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par

$g(x)=f(x)-2x+\frac{1}{2}$.

a. Déterminer g' et g''.

Étudier le sens de variations de g'.

En déduire le signe de g' sur $]0,+\infty[$.

b. Étudier le sens de variations de g. En déduire la position de la courbe C par rapport à la tangente D.

3. Construire la courbe C et la tangente D.

C/ 1. Soit n un entier naturel non nul. Exprimer en fonction de n le réel $I_n=\int_{\frac{1}{n}}^1 x^2\ln x dx$.

2. En déduire en fonction de n, l'aire A_n de la partie du plan limitée par la courbe C, la tangente D et les deux droites d'équation $x=\frac{1}{n}$ et $x=1$.

3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$.

24 Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Tracer la fonction $x \mapsto \ln x$.

Pour tout entier un entier $n\geq 2$, on pose

$S_n=\ln 1+\ln 2+...+\ln n$ et

$T_n=\ln 1+\ln 2+...+\ln(n-1)$.

1. Montrer que $T_n\leq\int_1^n \ln x\,dx\leq S_n$.

2. En déduire que $\ln(n-1)!\leq n\ln n-n+1\leq \ln n!$.

Puis que $e\left(\frac{n}{e}\right)^n\leq n!\leq ne\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

25 Soit f la fonction définie par $f(x)=\ln(\ln x)$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.

2. Etudier la dérivabilité de f et calculer $f'(x)$.

3. On pose $S_n=\sum\limits_{k=2}^n \frac{1}{k\ln k}$ avec $n\geq 2$.

Montrer que pour tout entier $k\geq 2$

$\int_k^{k+1}\frac{1}{t\ln t}dt\leq\frac{1}{k\ln k}$.

4. Calculer $\int_2^{n+1}\frac{1}{t\ln t}dt$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

26 1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}_+$,

$x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x$.

2. a. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^n k=\frac{n(n+1)}{2}$ et

$\sum\limits_{k=1}^n k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. On pose $P_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\times\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\times\ldots\times\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$.

a. Montrer que

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n}k^2 \le \ln P_n \le \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k$$

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$.

27 I. Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$g(x)=\ln(x+2)-\ln x-\frac{2}{x+2}+\frac{1}{4}$.

1. a. Étudier le sens de variation de g.

b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

c. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $[0,+\infty[$.

2. Montrer que, pour tout x de $[2, 3]$, $g(x)<\frac{1}{2}$.

II. Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$f(x)=x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)+\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$ pour $x>0$ et

$f(0)=\frac{1}{2}$.

On désigne par C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$ et montrer que f est continue en 0 à droite.

2. La fonction f est-elle dérivable en 0 à droite ? Donner une interprétation graphique du résultat.

3. Étudier le sens de variation de f.

4. a. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)=2$.

b. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c. Montrer que la droite Δ d'équation $y=\frac{x}{4}+\frac{5}{2}$ est asymptote à C au voisinage de $+\infty$.

5. Tracer dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la droite Δ, la courbe C et la droite D d'équation $y=x$.

III. 1. Soit la fonction h définie sur $[2, 3]$ par $h(x)=f(x)-x$. Montrer que, pour tout x de $[2, 3]$, $h'(x)<0$.

2. En déduire le sens de variation de h et montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α dans $[2, 3]$.

3. Montrer que, pour tout x de $[2, 3]$, $0<f'(x)<\frac{1}{2}$.

4. En déduire que, pour tout x de $[2, 3]$,

$|f(x)-\alpha|<\frac{1}{2}|x-\alpha|$.

On définit la suite (u_n) par $u_0=2$ et pour tout $n\ge0$, $u_{n+1}=f(u_n)$.

a. Montrer que pour tout n, u_n appartient à $[2, 3]$.

b. Montrer que pour tout n, $|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$.

c. En déduire que pour tout n, $|u_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

d. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite sa limite.

28 I. Soit f l'application définie sur $]0,+\infty[$ par

$f(x)=4-x-\frac{\ln x}{4}$.

On désigne par C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Calculer les limites de f aux bornes de $]0,+\infty[$.

Etudier les branches infinies de C.

2. a. Dresser son tableau de variations.

b. En déduire que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique a appartenant à $[3, 4]$

c. Tracer C.

3. Soit A l'aire de la partie du plan limitée par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=4$.

Exprimer A en fonction de a.

II. 1. Soit g l'application définie sur $]0,+\infty[$ par

$g(x)=4-\frac{1}{4}\ln x$.

a. Montrer que a est solution de l'équation $g(x)=x$.

b. Montrer que $g([3, 4])\subset[3, 4]$.

c. Montrer que, pour tout réel x de $[3, 4]$,

$|g'(x)| \leq \frac{1}{12}$.

2. Soit (u_n) la suite définie par

$u_0 = 3$ et $u_{n+1} = g(u_n)$, $n \geq 0$.

a. Montrer que pour tout n, u_n appartient à $[3, 4]$.

b. Montrer que pour tout n ,

$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{12}|u_n - \alpha|$.

c. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite sa limite.

29 A/ 1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$

par $g(x) = (1-x)\ln x$.

Déterminer le signe de $g(x)$.

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$

par $h(x) = \ln x - x$.

a. Dresser le tableau de variation de h.

b. En déduire le signe de h.

B/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

par $f(x) = \ln x(\ln x - x)$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que f est dérivable sur

$\mathbb{R}_+^*$ et que $f'(x) = \frac{g(x)+h(x)}{x}$.

2. Dresser le tableau de variation de f.

3. Déterminer la nature des branches infinies de C_f.

4. a. Déterminer le point d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.

b. Déterminer une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 1.

c. Vérifier que le point $A(e, -e+1)$ est un point d'intersection de C_f avec T.

5. Construire C_f et T.

6. Soit $\alpha \in]0,1[$ et D la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$.

a. Calculer à l'aide, d'une intégration par parties,

$\int_\alpha^1 \ln^2 x dx$ et $\int_\alpha^1 x \ln x dx$.

b. En déduire, à l'aide de α, l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de D.

c. Déterminer $\lim_{\alpha \to 0^+} \mathcal{A}(\alpha)$.

7. a. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle J à préciser.

b. Tracer dans le même repère la courbe de f^{-1} .

30 A/ Soit f la fonction définie

sur $]0,+\infty[\setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln x}$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim_{x \to 1^+} f(x)$, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Interpréter les résultats graphiquement.

2. a. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[\setminus \{1\}$

et que $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x(\ln x)^2}$.

b. Dresser le tableau de variation de f.

3. Soit h la restriction de f à $]0,1[$.

a. Montrer que h réalise une bijection de $]0,1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet dans $]0,1[$ une unique solution α et que $0.5 < \alpha < 0.6$.

c. En déduire que C_f coupe l'axe des abscisses en un seul point que l'on précisera.

4. Tracer C_f.

5. Tracer dans le même repère la courbe représentative de la fonction h^{-1}.

6. a. Montrer que $h'(\alpha) = -\frac{\alpha+1}{\alpha^3}$.

b. Montrer que h^{-1} est dérivable en 0

et exprimer $(h^{-1})'(0)$ en fonction de α.

B/ Soit g la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $g(x)=2f(x^2)$.

On désigne par C_g la courbe de g dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Vérifier que pour tout $x\in]1,+\infty[$, $f(x)-g(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}$.

2. En déduire la position relative de C_f et C_g sur $]1,+\infty[$.

3. Soit $x\in[2,+\infty[$, on désigne par M et N les points respectifs de C_f et C_g d'abscisse x.

Pour quelle valeur de x, la distance NM est-elle maximale ?

31 I/ 1. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $h(x)=x-\ln x$.

a. Dresser le tableau de variation de f.

b. En déduire que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $h(x)\geq 1$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-\ln x} & \text{si } x>0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

a. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

b. La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ?

II/ Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$F(x)=\int_x^{2x} f(t)\,dt.$$

1. a. montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$.

b. Montrer que pour tout x de $[0,+\infty[$, $F'(x)=\frac{\ln 2-\ln x}{h(2x).h(x)}$ et $F'_d(0)=0$.

2. Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $\int_x^{2x}\frac{dt}{t}=\ln 2$.

3. Montrer que pour tout x de $[1,+\infty[$, $0\leq F(x)-\ln 2\leq\frac{\ln(2x)}{x-\ln x}$.

En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

4. a. Montrer que $F\left(\frac{1}{2}\right)\leq\ln 2$.

b. Montrer alors qu'il existe un réel α de $[\frac{1}{2}, 1]$ tel que $F(\alpha)=\ln 2$.

5. a. Dresser le tableau de variation de F.

b. Donner l'allure de la courbe représentative de F dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(On donne $F(1)\simeq 0.9$ et $F(2)\simeq 1.1$).

III/ Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

1. Soit la suite (v_n) définie par

$$v_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{t}{t-\ln t}dt,\ n\geq 1.$$

a. Montrer que pour tout t de $]0,+\infty[$, $\frac{t}{t-\ln t}\leq t$.

b. Montrer que la suite (v_n) est croissante.

c. En déduire que la suite (v_n) est convergente et que $0\leq\lim\limits_{n\to+\infty} v_n\leq\frac{1}{2}$.

2. Soit la suite (w_n) définie par

$$w_n=\int_1^n\frac{t}{t-\ln t}dt\ n\ n\geq 1.$$

a. Montrer que pour tout t de $[1,+\infty[$, $1\leq\frac{t}{t-\ln t}$.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.