Chapitre 9

Fonction exponentielle

Des questions telles que "Si le nombre d'habitants d'une province s'accroît tous les ans d'une trentieme, & qu'il y ait au commencement 100.000 habitants; on veut savoir combien il y en aura au bout de 100 ans ?" (Euler 1748, Introductio §110) ou "Un particulier doit 400.000 florins, dont il est convenu de payer tous les ans l'intérêt à 5 pour cent…"
En appliquant la formule du binôme, Euler dit sans la moindre hésitation, "Si N est un nombre plus grand qu'aucune quantité assignable la fraction $\left(\frac{N-1}{N}\right)$ égalera l'unité". […] si N tend vers l'infini, $\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$ tend vers le nombre d'Euler e.

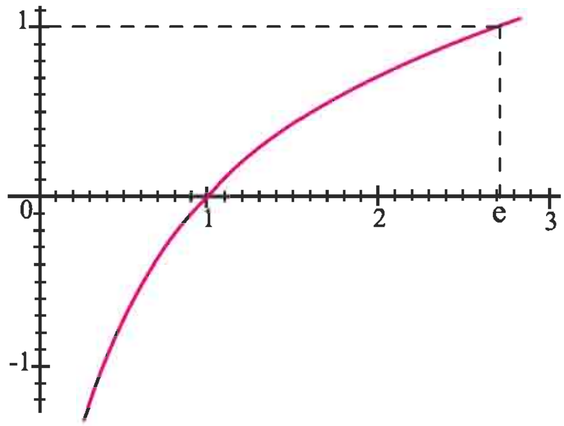
(E.Haier et al, L'analyse au fil de l'histoire, 2000)

Fonction exponentielle

I. Définition et propriétés

Activité 1

1. Dans la figure ci-contre on a représenté la fonction logarithme népérien.
Donner graphiquement une valeur approchée de l'antécédent de chacun des réels $\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$



2. Montrer que la fonction $\ln : x \mapsto \ln x$ admet une fonction réciproque que l'on désignera par exp. Tracer la courbe représentative de la fonction exp.
3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction exp et ses limites aux bornes de l'ensemble de définition.
4. Que valent $\exp(0)$, $\exp(1)$, $\exp(2)$ et $\exp(-1)$?

Définition

On appelle fonction exponentielle la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.
L'image d'un réel x par la fonction exponentielle est noté e^x.

Conséquences

- Pour tout réel x et pour tout réel strictement positif y, $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$.
- Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$. • Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.
- $\ln e = 1$.

Activité 2

Utiliser une calculatrice pour donner une valeur approchée de $e^{\frac{1}{2}}$, $e^{\frac{2}{3}}$, $e^{\sqrt{3}}$ et $e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Activité 3

Simplifier $e^{\ln 1}$, $e^{\ln 2}$, $e^{-\ln 3}$, $\ln(e^{-2})$, $\ln(e^{-2\ln 3})$.

Propriétés

Soit deux réels a et b.

P_1. $e^{a+b} = e^a \times e^b$, $\quad e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$, $\quad e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.

P_2. Pour tout entier n , $e^{na} = \left(e^a\right)^n$.

P_3. Pour tout entier naturel $q \geq 2$, $e^{\frac{a}{q}} = \sqrt[q]{e^a}$.

P_4. Pour tout entier naturel $q \geq 2$ et tout entier p, $e^{\frac{p}{q}a} = \sqrt[q]{e^{pa}}$.

Démonstration

P_1. • On sait que $e^{a+b} = e^a \times e^b$, si et seulement si, $\ln\left(e^{a+b}\right) = \ln\left(e^a \times e^b\right)$.

D'autre part, $\ln\left(e^{a+b}\right) = a + b$ et $\ln\left(e^a \times e^b\right) = \ln\left(e^a\right) + \ln\left(e^a\right) = a + b$.

La propriété en découle.

• D'après la première égalité, $e^{a-a} = e^0 = 1 = e^a \times e^{-a}$. Le résultat en découle.

• De plus, $e^{a-b} = e^a \times e^{-b}$. Par suite $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

La propriété P_2 découle de l'équivalence $e^{na} = \left(e^a\right)^n$, si et seulement si,

$\ln\left(e^{na}\right) = \ln\left(\left(e^a\right)^n\right)$

et des propriétés algébriques de la fonction ln.

P_3. Soit un entier $q \geq 2$ et a un réel .

En écrivant $a = q \times \dfrac{a}{q}$, on obtient $e^a = e^{q \times \frac{a}{q}}$.

De la propriété P_2 on en déduit que $e^a = \left(e^{\frac{a}{q}}\right)^q$. Par suite, $e^{\frac{a}{q}} = \sqrt[q]{e^a}$.

P_4. Soit un entier $q \geq 2$ et p un entier naturel. On peut écrire $e^{\frac{p}{q}a} = e^{\frac{1}{q}(pa)} = \sqrt[q]{e^{pa}}$.

Activité 4

Simplifier les écritures suivantes $\sqrt[6]{e^2} \times e^{\frac{3}{2}}$; $\dfrac{\sqrt{e^3}}{\sqrt{e^{-4}}}\sqrt[4]{e^2}$ et $\dfrac{\sqrt{e^{30}}}{\sqrt{e^{-42}}}\sqrt[10]{e^{-20}}$.

Activité 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $e^x = 3$
2. $\ln x = 3$
3. $e^{2x+3} = 4$
4. $e^{2x+3} = e$
5. $(e^x - 1)(e^x - 2) = 0$
6. $e^{2x} + e^x - 3 = 0$

II. Etude de la fonction exponentielle

Activité 1

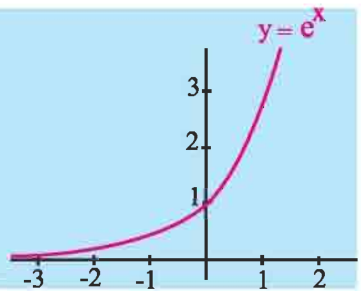
On désigne par C la courbe de la fonction exponentielle dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x$.
2. On pose $X = e^x$.
   a. Montrer que $\dfrac{e^x}{x} = \dfrac{X}{\ln X}$.
   b. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$ puis interpréter le résultat graphiquement.
3. a. Justifier la dérivabilité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.
   b. Calculer alors $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.
   c. Dresser le tableau de variation de la fonction exponentielle.
4. Etudier l'intersection de la courbe C avec les axes du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
5. a. Déterminer l'équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0.
   b. Soit la fonction h définie pour tout réel x par $h(x) = e^x - x - 1$.
   Etudier les variations de h et en déduire la position relative de C par rapport à T.
6. Tracer C et T.

Théorème

- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.
- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est la fonction $x \mapsto e^x$.

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.



Activité 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $e^{3x} \leq e^{x^2}$. 2. $e^{3x} \leq 4e^{x}$. 3. $e^{x(x-1)} > 1$.

III. Limites usuelles

Activité 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x}$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer la nature de la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$.
2. a. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t}{e^{t}}$.

   b. En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^{x}$ puis interpréter le résultat graphiquement.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer que C_f admet un point d'inflexion I que l'on précisera.
5. Tracer C_f en précisant la tangente T en I.

Activité 2

1. Déterminer $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln^{m} X}{X^{n}}$ et $\lim\limits_{X \to 0^{+}} X^{n} \ln^{m} X$, où n et m sont des éléments de $\mathbb{N}^{*}$.
2. a. En déduire que pour tous entiers naturels non nuls n et m, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{nx}}{x^{m}} = +\infty$.

   b. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \left| x^{m} e^{nx} \right|$.

Théorème

Soit m et n deux entiers naturels non nuls, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{nx}}{x^{m}} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{m} e^{nx} = 0$.

Activité 3

Calculer les limites ci-dessous.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^{2} - e^{2x}\right) \; ; \; \lim_{x \to +\infty} x\left(e^{2x} - e^{x}\right) \; ; \; \lim_{x \to -\infty} x\left(e^{2x} - e^{x}\right) ; \; \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{e^{x}+1} \; ; \; \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x^{3}+1} .$$

IV. La fonction $x \mapsto e^{u(x)}$

Activité 1

Etudier et représenter la fonction $x \mapsto e^{2x}$.

Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
La fonction $h : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $h'(x) = u'(x)e^{u(x)}$, $x \in I$.

Démonstration

On peut écrire pour tout réel x de I, $h(x) = f(u(x))$ avec $f : x \mapsto e^{x}$. Par suite, $h = f \circ u$.
Le théorème en résulte.

Corollaire

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .
Les primitives sur I de la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sont les fonctions
$x \mapsto e^{u(x)} + k,\ k \in \mathbb{R}$.

Activité 2

Calculer les dérivées des fonctions ci-dessous.

$x \mapsto \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$, $x \mapsto (2x+1)e^{-3x}$, $x \mapsto \dfrac{e^{2x}+1}{2e^{2x}+3}$ et $x \mapsto x^{3}e^{3x}$.

Activité 3

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions ci-dessous.

$x \mapsto e^{-3x}$; $x \mapsto xe^{x^2}$; $x \mapsto (2x+1)e^{x^2+x}$ et $x \mapsto \sin x\, e^{\cos x}$.

Activité 4

Calculer les intégrales ci-dessous.

$\int_0^1 e^{x}dx$, $\int_0^1 e^{-x+1}dx$, $\int_0^1 \dfrac{e^{x}}{(e^{x}+1)^2}dx$ et $\int_0^1 xe^{x^2}dx$. .

Exercice résolu

Calculer à l'aide d'une intégration par parties $I = \int_0^1 xe^{x}dx$ et $J = \int_0^1 x^{2}e^{x}dx$.

Solution

- En posant $u(x)=x$, $u'(x)=1$,
  $v'(x)=e^x$, $v(x)=e^x$,

on obtient

$$I=\int_0^1 xe^x dx=\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x dx=1.$$

- En posant $u(x)=x^2$, $u'(x)=2x$,
  $v'(x)=e^x$, $v(x)=e^x$,

on obtient

$$J=\int_0^1 x^2e^x dx=\left[x^2e^x\right]_0^1-2\int_0^1 xe^x dx=e-2I=e-2.$$

Activité 5

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}dx$.

1. a. Montrer que tout entier naturel n, $0\le I_n\le\dfrac{1}{n+1}$.

   b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice résolu

Le plan est muni d'une repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit la fonction $f:x\mapsto e^{-x^2}$ et C sa courbe représentative.

1. Etudier et représenter f.
2. On considère la fonction F définie pour tout réel $X\ge 0$, par $F(X)=\int_0^X f(x)dx$.

   Donner une interprétation géométrique de $F(X)$.
3. a. Montrer que pour tout $x\ge 1$, $e^{-x^2}\le e^{-x}$.

   b. Montrer que pour tout $X\ge 1$, $\int_0^1 e^{-x^2}dx\le F(X)\le\int_0^1 e^{-x^2}dx+\int_1^X e^{-x}dx$.

   c. En déduire que tout $X\ge 1$, $e^{-1}\le F(X)\le 1+e^{-1}$.
4. Montrer que la fonction F est croissante sur $[1,+\infty[$ et en déduire qu'elle possède une limite finie L quand X tend vers $+\infty$.
   Donner un encadrement de L.

Solution

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -2xe^{-x^2}$.
On en déduit que $f'(x) \geq 0$, si et seulement si, $x \leq 0$.

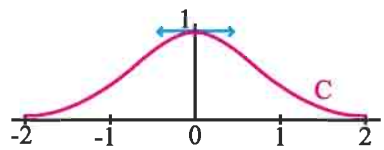
De plus, l'égalité $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ implique que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x^2} = 0$.

La fonction f étant paire, on en déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x^2} = 0$. Ce qui prouve que la courbe C de f admet la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

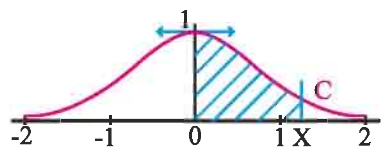
Tableau de variation de f

x	$-\infty$				$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Représentation graphique de f



2. Le réel F(X) représente l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = X$.



3. a. Pour tout $x \geq 1$, $x^2 \geq x$. On en déduit que $-x^2 \leq -x$, puis que $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ car la fonction exponentielle est croissante.

b. Pour tout $X \geq 1$, $F(X) = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^X e^{-x^2}dx$.

De plus, $0 < e^{-x^2} \leq e^{-x}, x \geq 1$. Ce qui implique que $0 \leq \int_1^X e^{-x^2}dx \leq \int_1^X e^{-x}dx, X \geq 1$.

Il en résulte que $\int_0^1 e^{-x^2}dx \leq F(X) \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^X e^{-x}dx$, pour tout $X \geq 1$.

c. Soit $X \geq 1$.
La fonction f étant décroissante sur $[0, +\infty[$, on peut écrire

$\int_0^1 e^{-1}dx \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq \int_0^1 1dx$, ou encore, $e^{-1} \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq 1$ (*).

Par ailleurs, $\int_1^X e^{-x}dx = e^{-1} - e^{-X}$, ce qui prouve que $\int_1^X e^{-x}dx \leq e^{-1}$ (**).

On déduit de (*) et (**) que $e^{-1} \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq F(X) \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^X e^{-x}dx \leq 1 + e^{-1}$.

4. La fonction F est croissante sur $[1,+\infty[$ car sa dérivée est positive sur $[1,+\infty[$.
D'après la troisième question, la fonction F est majorée sur $[1,+\infty[$.
On en déduit qu'elle possède une limite finie L quand X tend vers $+\infty$.
La double inégalité $e^{-1} \leq F(X) \leq 1+e^{-1}$ implique que $e^{-1} \leq L \leq 1+e^{-1}$.

V. Exponentielle de base a

Activité 1

1. Calculer les réels $e^{3\ln 2}$, $e^{4\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$, $e^{-\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$, $e^{-2\ln\sqrt{2}}$.
2. Vérifier que pour tout réel a strictement positif et pour tout entier n, $a^n = e^{n\ln a}$.

Soit un réel $a > 0$. Pour tout réel b, on pose $a^b = e^{b\ln a}$.

Activité 2

Soit p et q deux entiers tels que $q \geq 2$ et a un réel strictement positif.

Montrer que $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$; $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

Activité 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous.

$2^x = \frac{1}{2}$, $10^{x+1} = 2^{-x+2}$ et $2^x = 2^{-x+1}$.

Les règles opératoires ci-dessous découlent des propriétés de la fonction logarithme népérien et de la fonction exponentielle.

Propriétés

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b et tous réels c et d,

$a^{c+d} = a^c \times a^d$; $\left(a^c\right)^d = a^{cd}$; $a^{-d} = \frac{1}{a^d}$; $a^{c-d} = \frac{a^c}{a^d}$; $a^c \times b^c = (ab)^c$; $\frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c$.

Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit les fonctions $f : x \mapsto e^{x\ln 2}$ et $g : x \mapsto e^{-x\ln 2}$. On note C_f et C_g leurs courbes représentatives.

1. Etudier et représenter la fonction f.
2. Soit un réel a et $A(a, f(a))$ un point de C_f.
   Montrer que le symétrique de A par rapport à l'axe des ordonnées est un point de C_g.
3. Montrer que C_f et C_g sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Définition

Soit un réel $a > 0$. On appelle fonction exponentielle de base a la fonction $x \mapsto a^x$.

Conséquences

Les résultats ci-dessous découlent de la définition précédente et des propriétés de la fonction logarithme népérien et de la fonction exponentielle.

Soit un réel $a > 0$. La fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est la fonction $x \mapsto (\ln a)a^x$.

La fonction $x \mapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 1$.
La fonction $x \mapsto a^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $0 < a < 1$.
La fonction $x \mapsto 1^x$ est une fonction constante.

Si $a > 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.

Si $0 < a < 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$.

Tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto a^x$.

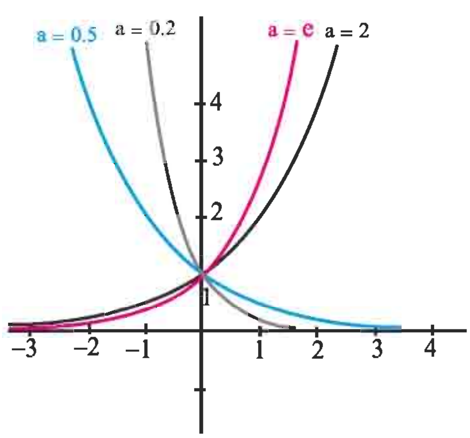
$a > 1$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

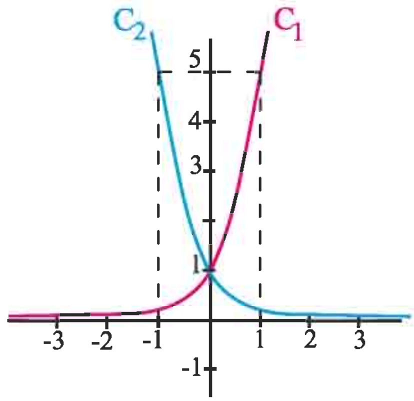
$0 < a < 1$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0

Courbes représentatives



Activité 5



Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Le graphique ci-contre représente C_1 et C_2 deux courbes représentatives respectives des fonctions $f_{b_1} : x \mapsto (b_1)^x$ et $f_{b_2} : x \mapsto (b_2)^x$.
Déterminer les réels strictement positifs b_1 et b_2.

Activité 6

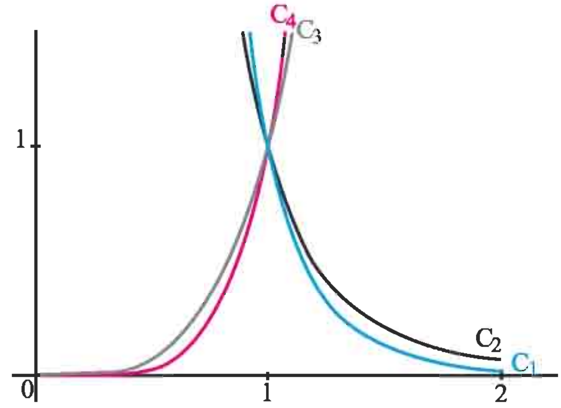
Déterminer les limites ci-dessous.

$$\lim_{x\to+\infty} 2^{x^2-2x} \; ; \quad \lim_{x\to-\infty} 2^{x^2-2x} \; ; \quad \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2x}.$$

VI. Fonctions puissances

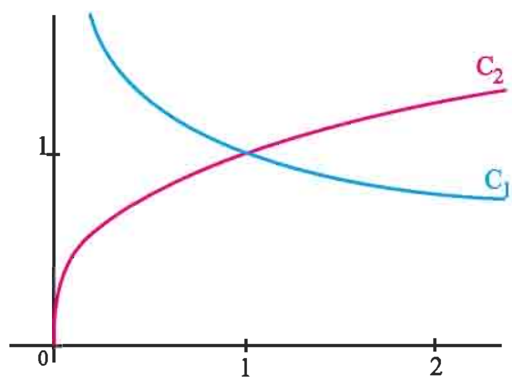
Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On a représenté les fonctions
$x \mapsto x^4$; $x \mapsto x^5$; $x \mapsto x^{-4}$; $x \mapsto x^{-5}$, $x > 0$.
Identifier chacune des fonctions.



Activité 2

On a représenté les fonctions
$x \mapsto \sqrt[3]{x}$; $x \mapsto \sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}$.
Identifier chacune des fonctions.



Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\sqrt{x^3}$.

1. Montrer que pour tout réel $x>0$, $f(x)=e^{\frac{3}{2}\ln x}$
2. Etudier et représenter f.
3. Montrer que f est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Déterminer f^{-1}.

Activité 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\sqrt[n]{x}$, $n\geq 2$

Montrer que pour tout réel $x>0$, $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$.

Notation

Pour tout rationnel r et tout $x>0$, on note $e^{r.\ln x}=x^r$.

Définition

Soit r un rationnel. On appelle fonction puissance r la fonction $x\mapsto e^{r.\ln x}$, $x>0$.

Les résultats ci-dessous découlent des propriétés des limites des fonctions ln et exp.

Si $r>0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^r=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x^r=0$.

Si $r<0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^r=0$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x^r=+\infty$.

Activité 5

Calculer les limites ci-dessous.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{2}{3}}$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{3}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-\frac{4}{3}}$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{-\frac{4}{3}}$.

Théorème

Soit r un rationnel. La fonction $x\mapsto x^r$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est la fonction $x\mapsto r\,x^{r-1}$.

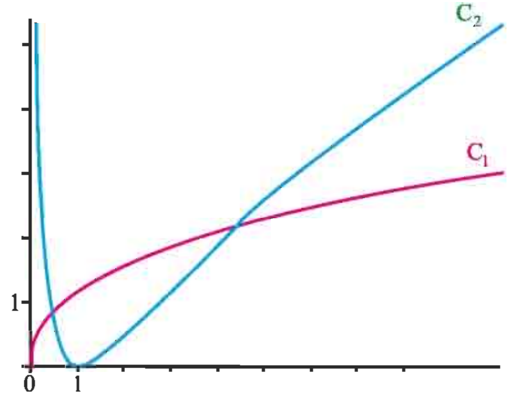
Corollaire

Soit r un rationnel différent de -1. Les primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto x^r$ sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{r+1}x^{r+1} + k,\ k \in \mathbb{R}$.

VIII. Croissances comparées

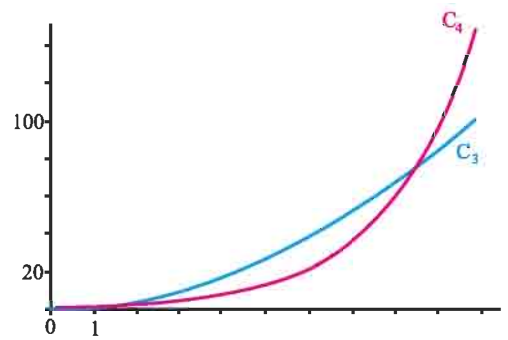
Activité 1

On a représenté les fonctions $f : x \mapsto (\ln x)^2$, $g : x \mapsto \sqrt{x}$. Identifier chacune des courbes.



Identifier chacune des courbes.

On a représenté les fonctions $h : x \mapsto x^2$, $t : x \mapsto \sqrt{e^x}$.



Identifier chacune des courbes.

Limites usuelles

Théorème

Soit r un rationnel strictement positif.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0 \ ; \ \lim_{x \to 0^+} x^r \ln x = 0 \ ; \ \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty \ .$$

Démonstration

On peut écrire $\frac{\ln x}{x^r} = \frac{1}{r}\frac{\ln x^r}{x^r}$. Il découle alors de $\lim_{x\to+\infty} x^r = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$.

On démontre de même que $\lim_{x\to 0^+} x^r \ln x = 0$.

On peut écrire pour tout $x > 0$, $\frac{e^x}{x^r} = e^{x - r\ln x}$.

De plus $x - r\ln x = x\left(1 - r\frac{\ln x}{x}\right)$.

Il en résulte que $\lim_{x\to+\infty} (x - r\ln x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - r\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$.

Par suite $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty$.

Activité 2

1. Montrer que $(1+x)^{-\frac{3}{4}} \le x^{-\frac{3}{4}}$, pour tout $x > 0$.

2. Comparer $(1+x)^{\frac{1}{4}}$ et $1 + x^{\frac{1}{4}}$ pour tout $x > 0$

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Le réel $e^{-3\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$ est égal à

☐ $-\frac{1}{8}$. ☐ 8. ☐ -6.

2. Le réel $2e^{x+y}$ est égal à

☐ e^{2x+2y}. ☐ $e^{2x}e^{2y}$. ☐ $2e^{x}e^{y}$.

3. l'équation $e^{x}=\frac{1}{e}$ est équivalente à

☐ $x=-1$. ☐ $x=\ln e$. ☐ $x=e$.

4. L'inéquation $-2<e^{x^2-1}<1$ est équivalente à

☐ $e^{x^2-1}>0$. ☐ $x^2>1$. ☐ $-1<x<1$.

5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{2e^{x}}{x^4}-\frac{1}{x^2}$.

☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$. ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

6. Sur $\mathbb{R}_+^*$ la dérivée de $f: x\mapsto \frac{e^{x}}{x}$ est

☐ $f'(x)=e^{x}$. ☐ $f'(x)=\frac{x-1}{x^2e^{-x}}$. ☐ $f'(x)=\frac{e^{x}(x+1)}{x^2}$.

7. L'intégrale $\int_0^1 xe^{x^2}dx$ est égale à

☐ $e-1$. ☐ $\frac{1}{2}e$. ☐ $\frac{1}{2}(e-1)$.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et égale à sa dérivée.
2. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\ln x<x<e^{x}$.
3. Soit r un rationnel différent de -1.
   La fonction $x\mapsto x^{r+1}$ est une primitive de $x\mapsto x^{r}$ sur $]0,+\infty[$.
4. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$ est paire.
5. L'équation $\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=1$ est équivalente à $e^{x}=1$.

1 Ecrire sous la forme d'une puissance de e les expressions ci-dessous

$$\frac{e^7}{e^2} \;;\; \frac{\left(e^{-1}\right)^4}{e} \;;\; \left(e^2\right)^{-3} ;\; e^2e^{-3}.$$

2 1. Simplifier les écritures ci-dessous.

$$e^{5\ln(3)} \;;\; e^{-3\ln(2)} \;;\ln\left(e^{-\frac{2}{3}}\right) \;;\; e^{(\ln 3-\ln 2)}$$

$$e^{5\ln 2}-e^{3\ln 4} ;\; \frac{e^{2\ln 3}}{e^{\ln 81}} \;;\; \frac{e^3}{e^{4+\ln 3}}.$$

3 1. Soit x un réel. Ecrire plus simplement les réels ci-dessous.

$$e^x.e^{-2x} \;;\; e.e^x \;;\left(e^{-x}\right)^2 ;\; \frac{e^x}{e^{-x}} ;\; \frac{e^{2x}}{e^{1-x}} \;;\; \frac{\left(e^x\right)^4}{e^{2x}}.$$

2. Vérifier que pour tout réel x,

a. $e^{2x}+e^{-2x}+2=\left(e^x+e^{-x}\right)^2$.

b. $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$$e^{(2x-3)}=1 \quad ;\; e^x=2 \quad ;e^{-2x}=-2.$$

$$e^{(3x+1)}=e^{1-5x} \;;\; \left(e^x\right)^2-3e^x+2=0 \;;$$

$$e^{x^2-16}=e^{(x-4)} ;e^{-x}+e^x=2.$$

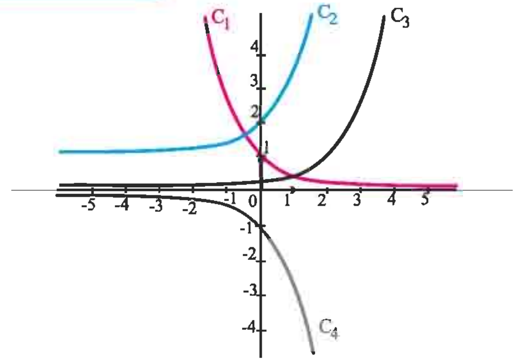
5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

$$e^{-x}\le 1 ;\; e^{-3x}\ge 0 ;\; 2-e^{\frac{1}{x}}>0 ;\; e^x+\frac{2}{e^x}-3\le 0.$$

6 On a représenté dans un même repère les courbes représentatives des fonctions

$f:x\mapsto -e^x$, $g:x\mapsto e^{-x}$, $h:x\mapsto \dfrac{1}{e^{2-x}}$ et

$k:x\mapsto 1+e^x$.



Associer chaque fonction à sa courbe.

7 Déterminer les limites suivantes.

$$\lim_{x\to+\infty} x^2-e^x \;;\; \lim_{x\to+\infty} e^{3x}-2e^x \;;\; \lim_{x\to+\infty} 2e^x-\frac{1}{x} \;;$$

$$\lim_{x\to-\infty} 2e^x-\frac{1}{x} ;\; \lim_{x\to-\infty} xe^{-(1-x)} ;\; \lim_{x\to-\infty} \left(x^2-2x+3\right)e^x;$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(x^2-x\right)e^x \;;\; \lim_{x\to0^+} xe^{\frac{1}{x}} \;;\; \lim_{x\to+\infty} x^3-e^{2x} \;;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x+1}} ;\; \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-e^x}{x^2+x} ;\; \lim_{x\to0^+} \frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x} \;;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x} ;\; \lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{2x}-e^x\right) ;\; \lim_{x\to0} \frac{e^{2x}-1}{x} \;;$$

$$\lim_{x\to0} \frac{x}{1-e^{-x}} ;\; \lim_{x\to0^+} \frac{e^x-1}{\sqrt{2x}} ;\; \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) ;$$

$$\lim_{x\to-\infty} x(e^{\frac{1}{x^2}}-1) ;\; \lim_{x\to+\infty} \frac{x(e^{\frac{1}{x}}-1)}{e^{\frac{1}{x}}+1} \;;$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}) ;\; \lim_{x\to-\infty} x^2(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}).$$

8 Pour chacune des fonctions suivantes, donner la dérivée f' sur l'intervalle I.

1. $f:x\mapsto 2x-e^{-x}$, $\quad I=\mathbb{R}$.
2. $f:x\mapsto x^2+e^{\frac{1}{x}}$, $\quad I=\mathbb{R}_+^*$.
3. $f:x\mapsto xe^{-x}$, $\quad I=\mathbb{R}$.
4. $f:x\mapsto \dfrac{x-1}{e^x}$, $\quad I=\mathbb{R}$.
5. $f:x\mapsto \dfrac{e^{2x}-1}{x^2+1}$, $\quad I=\mathbb{R}$.

6. $f : x \mapsto 2x - 2\ln\left(1+e^x\right)$, $I = \mathbb{R}$.

7. $f(x) = e^x \ln(x)$, $I = \mathbb{R}_+^*$.

8. $f(x) = e^{-x}\left(e^{2x} + e^x - 1\right)$, $I = \mathbb{R}$.

9. $f : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $I = \mathbb{R}$.

9 Dans chacun des cas ci-dessous, donner l'ensemble de définition de la fonction f et l'ensemble sur lequel elle est dérivable, calculer $f'(x)$, donner le tableau de variation de f et la représenter (on fera l'étude des branches infinies).

1. $f : x \mapsto e^{x^2}$. 2. $f : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$.

3. $f : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$. 4. $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$.

5. $f : x \mapsto e^{\sqrt{x}}$. 6. $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+e^{-x}}$.

10 Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de f sur l'intervalle I.

1. $f : x \mapsto e^{2x}$, $I = \mathbb{R}$.

2. $f : x \mapsto xe^{x^2+1}$, $I = \mathbb{R}$.

3. $f : x \mapsto \dfrac{e^{\tan x}}{\cos^2(x)}$, $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

4. $f : x \mapsto \sin(2x)e^{\cos^2(x)}$, $I = \mathbb{R}$.

5. $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}$, $I =]1, +\infty[$.

6. $f : x \mapsto \sqrt{e^x}$, $I = \mathbb{R}$.

7. $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$, $I = \mathbb{R}$.

8. $f : x \mapsto xe^{2x^2}$, $I = \mathbb{R}$.

11 1. Calculer les intégrales suivantes.

a. $\int_0^1 \left(1+e^x\right)dx$. b. $\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$.

c. $\int_0^1 \dfrac{e^x}{1+e^x}dx$. d. $\int_1^2 \dfrac{dx}{1+e^x}$.

e. $\int_0^1 \dfrac{1}{x}e^{\ln(x)}\,dx$ f. $\int_1^2 \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$.

2. Calculer à l'aide des intégrations par parties les intégrales suivantes.

a. $\int_1^2 2xe^{-x}dx$. b. $\int_0^1 \dfrac{x^3}{e^{x^2}}dx$. c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin x dx$.

d. $\int_0^{-\ln(2)} \dfrac{\ln\left(1+e^x\right)}{e^x}dx$. e. $\int_1^0 x^2e^x dx$.

12 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = x - \dfrac{1}{1+e^x}$ et C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

1 a. Vérifier que pour tout réel x, $f'(x) > 0$.

b. Dresser le tableau d variation de f.

2. a. Montrer que les droites $\Delta_1 : y = x$ et $\Delta_2 : y = x - 1$ sont asymptotes à C.

b. Préciser les positions relatives de C et de ses asymptotes.

3 Tracer C.

13 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = \dfrac{2+e^x}{1+e^x}$.

1. Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = 2 - \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

2. Calculer $\int_0^1 \dfrac{2+e^x}{1+e^x}dx$.

14 1. Calculer les intégrales $\int_0^1 \dfrac{e^x}{1+e^x}dx$ et $\int_0^1 \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$.

2. Déterminer les réels a, b et c tels que

$$\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{(1+t)} + \frac{ct}{(1+t)^2}, \quad t \geq 0 .$$

En déduire la valeur de $I = \int_0^1 \dfrac{1}{\left(1+e^x\right)^2}dx$.

3. On pose $J=\int_0^1 \frac{xe^x}{\left(1+e^x\right)^3}dx$.

4. Exprimer J en fonction de I et en déduire la valeur de J.

15 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$.

On désigne par C sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Dresser le tableau de variation de f.

2. Soit I le point de coordonnées $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$.

a. Vérifier que I appartient à C.

b. Montrer que I est un centre de symétrie de C.

c. Montrer que la tangente T à la courbe C au point I a pour équation $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$.

3. Montrer que pour tout réel x, $f'(x)\le\frac{1}{4}$.

4. a Soit x un réel strictement positif

Montrer que $f(x)\le\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$.

b. En déduire les positions relatives de C et T.

5. Tracer C et T.

16 Soit la fonction $f:x\mapsto x-2+e^{-\frac{x}{2}}$.

On désigne par C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier les variations de f.

2. a. Vérifier que la droite $D: y=x-2$ est une asymptote à C.

b. Tracer D et C.

3. Soit $\lambda>0$ et la droite $\Delta: x=\lambda$. On note $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par C, D, Δ et l'axe des ordonnées. Calculer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)$.

17 Calculer les limites ci-dessous.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3}\right)^x$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x}{2^{x^2+x}}$.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x+3^{x+1}}{2^x+2^{x-1}}$.

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{2}{3}}$.

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{2^x}$.

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{3}}e^{-x}$.

9. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{4}{3}}\right)\ln x$.

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x-e^x$.

18 Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$f(x)=\ln\left(2^x\right)-\ln\left(x^2\right)$.

1. Calculer $f(2)$ et $f(4)$.

2. Etudier les variations de la fonction f et en déduire son signe.

3. Comparer x^2 et 2^x.

19 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$f(x)=\frac{4^x}{4^{2x}-1}$.

1. Montrer que f est impaire.

2. Etudier les variations de f sur $]0,+\infty[$.

3. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=\frac{4}{15}$.

b. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x)=-\frac{4}{15}$.

20 Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 3^x dx$.

2. $\int_0^{-1}\frac{3^x}{1+3^x}dx$.

3. $\int_1^2 x^{\frac{4}{3}}dx$.

4. $\int_{\frac{1}{2}}^1 4x^{-\frac{1}{5}}dx$.

5. $\int_0^1 \sqrt[4]{x}\,dx$.

6. $\int_0^{\frac{1}{\ln(2)}}2^x\left(1+2^x\right)^2dx$.

21 Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$g(t)=\begin{cases}\frac{1-e^{-t}}{t} & \text{si } t>0,\\ 1 & \text{si } t=0.\end{cases}$$

1. a. Établir que g est continue à droite en 0.
b. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. a. Calculer $g'(t)$, pour tout $t > 0$.
b. Prouver que pour tout $t \geq 0$, $1-t \leq e^{-t}$.
En déduire en intégrant sur $[0, x]$ que
$e^{-x} \leq 1-x+\frac{x^2}{2}, x \geq 0$.
c. Montrer alors que $e^{-u} \geq 1-u+\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{6}, u \geq 0$.
d. Prouver que g est dérivable en 0 et donner la valeur de $g'(0)$.
4. Tracer la courbe de g dans un repère orthonormé.

22 On considère la fonction h définie sur $[0,+\infty[$ par $h(x)=(x-2)e^x+2$
1. Déterminer les variations de h (on précisera h(0)).
2. Montrer qu'il existe un unique réel a de l'intervalle $[1, 2]$ tel que $h(a) = 0$.
En déduire le signe de h sur $[0,+\infty[$.
3. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{e^x-1}{x^2}$.
a. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
b. Montrer que pour tout réel x strictement positif $f'(x)=\frac{xe^x-2e^x+2}{x^3}$.
Dresser le tableau de variation de f.
c. Montrer que $f(a)=\frac{-1}{a(a-2)}$ et en déduire le signe de $f(a)$.
4. Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé.

23 Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.
On désigne par C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. Etudier la parité de f.
2. a. Etudier les variations de f.
b. Tracer C.
3. Soit $\lambda > 1$ et la droite $\Delta : x = \lambda$.
On note $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par C, Δ, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
Calculer $A(\lambda)$.

24 Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par
$f(x)=xe^{-x}-\frac{1}{2}x$.
1. Calculer la dérivée de f ainsi que $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2. a. On désigne par g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=(1-x)e^{-x}-\frac{1}{2}$.
b. Etudier le sens de variation de g et montrer que l'équation $g(x)=0$ a une solution unique a sur $[0, 0.5]$.
c. En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0,+\infty[$.
d. Déterminer les variations de f.
2. Soit h la fonction définie sur $[0, 0.5]$ par
$h(x)=1-\frac{1}{2}e^x$.
a. Montrer que a est l'unique solution sur $[0, 0.5]$ de l'équation $h(x)=x$.
b. Etudier les variations de h.
c.En déduire que $h([0, 0.5]) \subset [0, 0.5]$.
c. Prouver que pour tout x de $[0, 0.5]$,
$-0,83 \leq h'(x) \leq 0$.
En déduire que pour tout x de $[0, 0.5]$,
$|h(x)-a| \leq 0,83|x-a|$.
3. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par
$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = h(u_n). \end{cases}$
a. Montrer que pour tout entier n, u_n appartient à $[0, 0.5]$ et $|u_{n+1}-a| \leq 0,83|u_n-a|$.
b. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

25 I. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x)=(3+x)e^{-\frac{x}{2}}$.
1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Construire la courbe C de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4. a. Montrer que l'équation $f(x)=3$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.
Soit α la solution non nulle, montrer que $-2<\alpha<-\frac{3}{2}$.

b. Déterminer graphiquement suivant les valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.

II. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=3e^{\frac{x}{2}}-3$.

1. Montrer que $f(x)=3$, si et seulement si, $\varphi(x)=x$.

2. a. Calculer, pour tout réel x, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$.
Justifier que $\varphi'(\alpha)=\frac{\alpha+3}{2}$.

b. Étudier le sens de variation de φ', puis celui de φ.

c. On se place désormais dans l'intervalle $I=[-2,\alpha]$.

3. a. Montrer que $\varphi(I)\subset I$.

b. montrer que $\frac{1}{2}\leq\varphi'(x)\leq\frac{3}{4}$, pour tout x de I.

c. En déduire en intégrant sur $[x,\alpha]$ que pour tout x de l'intervalle I,
$0\leq\frac{1}{2}(\alpha-x)\leq\varphi(\alpha)-\varphi(x)\leq\frac{3}{4}(\alpha-x)$.

4. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par
$$\begin{cases}u_0=-2,\\ u_{n+1}=\varphi(u_n).\end{cases}$$

a. Montrer que pour tout entier n, u_n appartient à l'intervalle I.

b. Justifier que, pour tout entier n,
$0\leq\alpha-u_{n+1}\leq\frac{3}{4}(\alpha-u_n)$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

d. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que $\left(\frac{3}{4}\right)^k\leq10^{-2}$.

Donner, à l'aide d'une calculatrice, une approximation à 10^{-2} près de u_k.

En déduire une valeur approchée de α à 2×10^{-2} près.

26 Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=xe^{-x+2}$.

I. 1. Dresser le tableau des variation de f sur $[0,+\infty[$.

2. Déterminer les branches infinies de la courbe représentative C de f, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2. a. Tracer les courbes de la fonction f et de la fonction ln. On notera C′ cette dernière.
Conjecturer avec ce graphique le nombre de solutions de l'équation $f(x)=\ln x$ dans $[1,+\infty[$.

b. Montrer que la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=\ln x-f(x)$, est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.
En déduire que l'équation $f(x)=\ln x$ admet une unique solution α dans $[1,+\infty[$.

c. Déterminer à 10^{-2} près une valeur approchée de α.

II . À l'aide d'une double intégration par parties déterminer $I=\int_0^3 x^2e^{-2x}dx$.

2. On définit le solide S obtenu par révolution autour de l'axe (Ox) de la courbe d'équation $y=f(x)$ pour $0\leq x\leq3$.
Déterminer une valeur approchée à 1u.a près du volume V du solide S.

27 I. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^x(1-x)+1$.

1. Étudier le sens de variation de g.

2. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1.27, 1.28]$
on note a cette solution.

3. Déterminer le signe de g(x).

II. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{x}{e^x+1}+2$.
On désigne par C la courbe de f dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter.

2. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Montrer que la droite D d'équation $y=x+2$ est une asymptote à C.

c. Étudier la position de C par rapport à D.
3. a. Montrer que la fonction dérivée de f a même signe que la fonction g.
b. Dresser le tableau de variations de f.
4. Tracer la courbe C ainsi que ses asymptotes et sa tangente au point d'abscisse a.
III. Pour tout entier naturel n, tel que $n \geq 2$, on note D_n l'ensemble des points M(x, y) du plan, dont les coordonnées vérifient $2 \leq x \leq n$ et $2 \leq y \leq f(x)$ et on appelle A_n son aire, exprimée en unités d'aire.
1. Faire apparaître D_5 sur la figure.
2. Montrer que pour tout réel $x \geq 2$,
$\frac{7}{8}xe^{-x} \leq \frac{x}{e^x+1} \leq xe^{-x}$.
3. On pose $I_n = \int_2^n xe^{-x}dx$. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_n en fonction de n.
4. Écrire un encadrement de A_n en fonction de I_n.
5. Montrer que la suite (A_n) est croissante et majorée.
Déterminer la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.
Que peut-on en déduire pour la limite de A_n lorsque n tend vers $+\infty$?

28 I. On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\ln(e^x+e^{-x})$ et on désigne par C sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
b. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[0,+\infty[$,
$f(x)=x+\ln\left(1+e^{-2x}\right)$. En déduire que la courbe C admet comme asymptote la droite D d'équation $y = x$.
c. Étudier la position de la courbe C par rapport à son asymptote D.
2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. Tracer C et D.
II. Pour tout *x* de l'intervalle $[0,+\infty[$ on pose
$F(x)=\int_0^x \ln\left(1+e^{-2t}\right)dt$.
(On ne cherchera pas à calculer F(x)).
1. Soit a un réel positif. En utilisant la partie I, donner une interprétation géométrique de F(a).
2. Étudier le sens de variation de F sur l'intervalle $[0,+\infty[$.
3. Soit a un réel strictement positif. Montrer que
$\frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{1+t} \leq 1,\ t \in [0,\ a]$.
En déduire que $\frac{a}{1+a} \leq \ln(1+a) \leq a$.
4. Soit x un réel positif. Déduire, de la question précédente, que $\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t}dt$
puis que $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln\left(1+e^{-2x}\right) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$.
5. On admet que la limite de F(x), lorsque x tend vers $+\infty$, existe et est un nombre réel noté L.
Etablir que $\frac{1}{2}\ln 2 \leq L \leq \frac{1}{2}$.
6. Pour tout entier naturel n, on pose
$u_n = \int_n^{n+1} \ln\left(1+e^{-2t}\right)dt$.
a. On considère la fonction h définie sur $[0,+\infty[$ par
$h(t)=\ln\left(1+e^{-2t}\right)$.
Étudier le sens de variation de h.
b. Montrer que pour tout naturel n,
$0 \leq u_n \leq \ln\left(1+e^{-2n}\right)$.
c. Déterminer la limite de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
7. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i$.
Exprimer S_n à l'aide de F et de n.
La suite (S_n) est-elle convergente ?
Dans l'affirmative quelle est sa limite ?

29 I. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(x+1)^2e^{-x}$ et C la courbe de g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. a. Déterminer $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.
b. Déterminer g' et montrer que $g'(x)$ est du signe de $\left(1-x^2\right)$.
c. Dresser le tableau de variation de g.

2. Tracer la courbe C. On placera en particulier les points de la courbe d'abscisses respectives -2 , -1 , 0 , 1 et 3.
3. a. Déterminer graphiquement, suivant les valeurs du nombre réel k, le nombre de solutions de l'équation $g(x)=k$.
b. Montrer que l'équation $g(x)=2$ admet une unique solution α.
Montrer que α appartient à l'intervalle $[-2, -1]$.
c. Montrer que α vérifie la relation $\alpha=-1-\sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$.
II. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I=[-2, -1]$ par $f(x)=-1-\sqrt{2}e^{\frac{x}{2}}$.
1. a. Étudier les variations de f sur I.
b. En déduire que, pour tout élément x de I, $f(x)$ appartient à I.
c. Montrer que, pour tout élément x de I,
$|f'(x)|\le\frac{1}{\sqrt{2e}}$.
d. Montrer que, pour tout élément x de I,
$|f(x)-\alpha|\le\frac{1}{2}|x-\alpha|$.
2. Soit (u_n) la suite d'éléments de I définie par la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$, $n\ge 0$ et $u_0=-\frac{3}{2}$.
a. Montrer que, pour tout entier naturel n,
$|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$.
b. Montrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.
c. Déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
Calculer u_{n_0}.

30 I. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$g(x)=\frac{e^x}{1+2e^x}-\ln(1+2e^x)$.
1. Calculer $g'(x)$ et en déduire son signe.
2. Déterminer la limite de g en $-\infty$.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction g.
En déduire le signe de g.

II. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x)=e^{-2x}\ln(1+2e^x)$.
1. montrer que pour tout réel x, $f'(x)=2e^{-2x}g(x)$.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. On note C la courbe de f dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.
a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.
b. Tracer la courbe C et la tangente T

31 I. 1. Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par
$g(x)=e^x-x-1$.
a. Etudier les variations de g.
b. En déduire le signe de g.
2. Soit h la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par
$h(x)=(2-x)e^x-1$.
a. Etudier la fonction h et dresser son tableau de variation.
b. Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique α dans $[1, 2]$.
c. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
d. Préciser suivant les valeurs du réel positif x le signe de h(x).
II. Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par
$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$ et C sa courbe dans un repère orthonormé.
1. a. Montrer que pour tout $x\neq 0$ on peut écrire
$f(x)=\frac{1-e^{-x}}{1-xe^{-x}}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter.
b. Montrer que $f'(x)=\frac{h(x)}{(e^x-x)^2}$.
c. Dresser le tableau de variation de f.
2. a. Montrer que pour tout x,
$f(x)-x=\frac{(1-x)g(x)}{e^x-x}$.
b. En déduire la position relative de la courbe C et de la droite Δ d'équation $y=x$.
3. a. Préciser la tangente à C en son point d'abscisse 0.
b. Tracer C.

III. Soit la suite (u_n) définie par

$$u_n = \int_0^n (f(x)-1)dx.$$

1. Donner l'expression de u_n en fonction de n.
2. Interpréter géométriquement le nombre réel $-u_1$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

32 I. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = xe^x - e^x + 1.$$

1. a. Dresser le tableau de variation de la fonction u et en déduire que $u(x) \geq 0$ pour tout réel x.

b. Montrer que, pour tout réel x, $u(x) = \int_0^x te^t dt$.

2. a. Montrer que pour tout $0 \leq t \leq x$, $t \leq te^t \leq te^x$ et en déduire que, pour tout réel positif x,

$$\frac{1}{2}x^2 \leq u(x) \leq \frac{1}{2}x^2e^x.$$

b. Montrer que, pour tout $x \leq t \leq 0$, $t \leq te^t \leq te^x$ et en déduire que, pour tout réel négatif x,

$$\frac{1}{2}x^2e^x \leq u(x) \leq \frac{1}{2}x^2.$$

3. a. Calculer en utilisant la question précédente,

$$\lim_{x\to0} \frac{u(x)}{x^2}.$$

b. En déduire $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{u(x)}{x(e^x-1)} = \dfrac{1}{2}$.

II. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. a. Montrer que f est continue en 0.
b. Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

2. a. Montrer que, $f'(x) = \dfrac{-u(x)}{(e^x-1)^2}$, $x \neq 0$.

b. Dresser le tableau de variation de f.
3. Soit C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a. Montrer que C admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote D dont on donnera une équation.
b. Tracer C et D.

33 I. Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$g(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}.$$

1. Etudier les variations de g.
2. En déduire que $0 < g(x) < 1$, $x > 0$.

II. Soit f fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x\ln(-x) & \text{si } x < 0, \\ x\left(2 - e^{-\frac{1}{x}}\right) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. a. Montrer que est continue en 0.
b. Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 0.
c. Montrer que $f'(x) = 2 - g(x)$, $x > 0$.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Soit C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a. Montrer que C admet au voisinage de l'infini une asymptote D dont on donnera une équation.
b. Montrer que la droite D est tangente à la courbe C en un point d'abscisse négative que l'on déterminera.
c. Etudier la position relative de C et D pour $x \geq 0$.
d. Tracer C et D.
e. Tracer dans le même repère la courbe C', symétrique de C par rapport à l'axe des abscisses.

III. Soit α un réel de $]-1,0[$ et $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C et C' et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = -1$.

1. Calculer $\int_{-1}^{\alpha} f(x)dx$.
2. En déduire $A(\alpha)$.
3. Déterminer la limite de $A(\alpha)$ quand α tend vers 0.