Chapitre 5

Etudes de fonctions

Euler (1707-1783) définit une fonction d'une quantité variable comme " une expression analytique composée d'une manière quelconque de cette quantité variable et de nombres ou de quantités constantes". En fait Euler donne une classification des fonctions en deux types: algébriques (fonctions rationnelles et irrationnelles), transcendantes (fonctions trigonométriques, logarithmes, exponentielles, puissances).

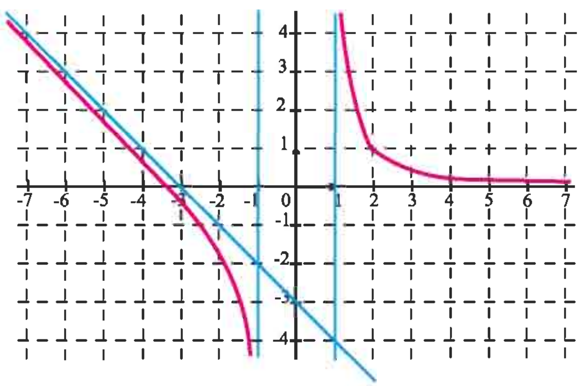
Etudes de fonctions

I. Branches infinies

Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
On dit que C_f admet une branche infinie dès que l'une des coordonnées d'un point de C_f tend vers l'infini.

Activité 1

La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. Les droites d'équations $x=-1$, $x=1$, $y=0$ et $y=-x-3$ sont des asymptotes à cette courbe.
Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x+3$
$\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.



Nous avons résumé dans le tableau ci-dessous la nature de certaines branches infinies vues en $3^{\text{ème}}$ année.

f	C_f
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$.	La droite $D: x=a$ est asymptote à C_f.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$. (L réel)	La droite $D: y=L$ est asymptote à C_f.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x)-(ax+b)\right)=0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x)-(ax+b)\right)=0$.	La droite $D: y=ax+b$ est asymptote à C_f.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$.
On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. a. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b. Montrer que pour tout réel strictement positif x, $f(x) = x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$.

c. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

2. a. Montrer que pour tout réel strictement positif x, $f(x) - x = \dfrac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}$.

b. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x$. Interpréter graphiquement.

3. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) + x$. Interpréter graphiquement.

• Soit f une fonction telle que $f(x)$ tend vers l'infini, lorsque x tend vers l'infini. On désigne par C_f sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Alors la branche infinie de C_f dépend de la limite de $\frac{f(x)}{x}$, lorsque x tend vers l'infini.

Nous donnons dans le tableau ci-dessous un procédé de détermination de la branche infinie de C_f dans le cas où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ est infinie. Les autres cas se déterminent de façon analogue.

* Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ est infinie, alors C_f admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

* Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors C_f admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{i})$ au voisinage de $+\infty$.

* Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ $(a \in \mathbb{R}^*)$ alors deux cas peuvent se présenter selon $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$.

• Si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b$ $(b \in \mathbb{R})$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

• Si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$ est infinie alors la droite d'équation $y = ax$ est une direction asymptotique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par $f(x)=2x+\sqrt{x+1}$ et C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Déterminer la nature de la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$.

Activité 4

Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x+1}$ et C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Etudier les branches infinies de C_f.

II. Eléments de symétrie

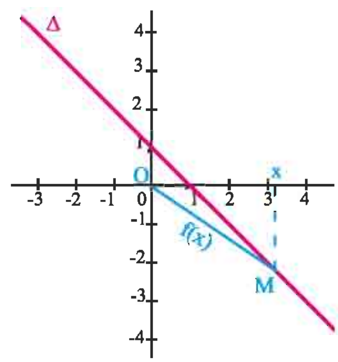
Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit Δ la droite d'équation $y=1-x$.

A tout réel x, on associe le point M de Δ d'abscisse x et on désigne par f la fonction définie par $f(x)=OM$.

Soit C_f la courbe représentative de f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.



1. Montrer que $f(x)=\sqrt{x^2+(1-x)^2}$.
2. Montrer que la droite $\Delta : x=\dfrac{1}{2}$ est un axe de symétrie de C_f.
3. Montrer que la droite Δ' d'équation $y=\sqrt{2}x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ est une asymptote à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

Soit f une fonction définie sur D.
On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
La droite $\Delta : x=a \ (a\in\mathbb{R})$ est un axe de symétrie pour C_f si pour tout x de D, $\begin{cases}(2a-x)\in D,\\ f(2a-x)=f(x).\end{cases}$

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit f une fonction définie sur un ensemble D, de courbe représentative C et O' le point de coordonnées (a,b).

Le point O' est un centre de symétrie de C, si pour tout x appartenant à D, $2a-x$ appartient à D et $f(2a-x)=2b-f(x)$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases} 2-\sqrt{2-x} & \text{si } x<1, \\ \sqrt{x} & \text{si } x\geq 1. \end{cases}$$

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Montrer que le point $I(1,1)$ est un centre de symétrie de C_f.
2. Montrer que f est dérivable en 1.
3. Donner une équation de la tangente T en I à C_f.
4. Montrer que I est un point d'inflexion de C_f.
5. Donner la position relative de T et C_f.

III. Exemples d'étude de fonctions

Exemple 1

Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{8}x^3+x-4$ et C_1 sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Etudier les branches infinies de C_1.
2. a. Expliciter $f'(x)$, pour tout réel x.
   b. Montrer que C_1 admet un point d'inflexion I.
   c. Donner une équation de la tangente T à C_1 au point I.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
5. Représenter dans le même repère orthonormé les courbes respectives C_1 et C_2 de f et f^{-1}.

Solution

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{8}x^3+x-4=+\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{8}x^3+x-4=-\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{8}x^3+x-4}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{8}x^2=+\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{8}x^2=+\infty.$$

On en déduit que la courbe de f admet deux branches paraboliques de direction $(O,\vec{j})$.

2. a. La fonction polynôme f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Le calcul donne $f'(x)=\frac{3}{8}x^2+1$.

b. La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = \frac{3}{4}x$, pour tout réel x.

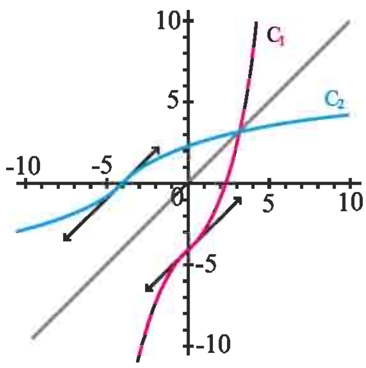
La fonction f'' s'annule en 0 en changeant de signe. On en déduit que le point $I(0,-4)$ est un point d'inflexion de C_1.

c. Des égalités $f(0) = -4$ et $f'(0) = 1$, on déduit que T à pour équation $y = x - 4$.

3. **Tableau de variation de f.**

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$-\infty \nearrow +\infty$

5. **Représentation graphique de f et de f^{-1}.**



4. La fonction continue f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.

De plus, $f(\mathbb{R}) = \left]\lim_{x\to-\infty} f, \lim_{x\to+\infty} f\right[= \mathbb{R}$.

Ce qui prouve le résultat.

Exemple 2

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{2x^2 + x - 4}{x - 1}$.

1. Vérifier que $f(x) = 2x + 3 - \frac{1}{x-1}$, $x \neq 1$.

2. Etudier la fonction f et tracer sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3. Montrer que pour tout réel k, l'équation $f(x) = k$ admet exactement deux solutions.

Solution

1. On peut écrire pour tout $x \neq 1$, $2x + 3 - \frac{1}{x-1} = \frac{(2x+3)(x-1)-1}{x-1} = \frac{2x^2+x-4}{x-1}$.

2. **Etude de f.**

• **Limites aux bornes de l'ensemble de définition.**

La fonction rationnelle f est définie sur $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$.

De plus, $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x-4}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+x-4}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty$.

De même, $\lim_{x\to1^+} 2x + 3 - \frac{1}{x-1} = -\infty$ et $\lim_{x\to1^-} 2x + 3 - \frac{1}{x-1} = +\infty$.

- **Etude des branches infinies.**

La courbe C de f admet la droite $x=1$ comme asymptote.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x-3)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x-1}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-2x-3)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{x-1}=0$.

Ce qui prouve que la droite d'équation $y=2x+3$ est une asymptote à la courbe C de f, au voisinage de l'infini.

- **Tableau de variation.**

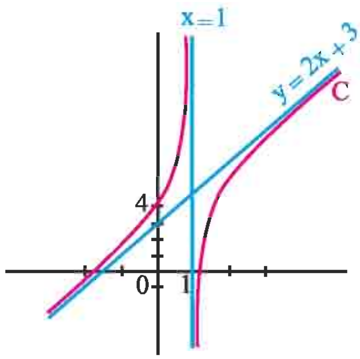
La fonction rationnelle f est dérivable en tout réel de son ensemble de définition.

Le calcul donne $f'(x)=2+\frac{1}{(x-1)^2}$. Ce qui prouve que f est strictement croissante sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Représentation graphique



3. La fonction f est continue et strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty,1[$ et $]1,+\infty[$.

On en déduit que $f(]-\infty,1[)=\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f,\ \lim\limits_{x\to1^-}f\right[=\mathbb{R}$ et $f(]1,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to1^+}f,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f\right[=\mathbb{R}$.

Ce qui prouve que pour tout réel k, l'équation $f(x)=k$ admet exactement deux solutions x_1 et x_2 appartenant respectivement à $]-\infty,1[$ et $]1,+\infty[$.

Exemple 3

Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{(x+3)(x-2)}$.

1. Vérifier que $f(x)=\frac{1}{5(x-2)}-\frac{1}{5(x+3)}$, $x\neq-3$ et $x\neq 2$.
2. Etudier la fonction f et tracer sa courbe dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.
3. Etudier, graphiquement, suivant les valeurs du réel k, les solutions de l'équation $f(x)=k$.

Solution

1. On peut écrire $\dfrac{1}{5(x-2)}-\dfrac{1}{5(x+3)}=\dfrac{(x+3)-(x-2)}{5(x-2)(x+3)}=\dfrac{1}{(x-2)(x+3)}$, $x \neq -3$ et $x \neq 2$.

2. **Etude de f.**

- **Limites aux bornes de l'ensemble de définition**

La fonction rationnelle f est définie sur $]-\infty,-3[\cup]-3,2[\cup]2,+\infty[$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{(x+3)(x-2)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{(x+3)(x-2)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$.

De même,

$\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{1}{5(x-2)}-\dfrac{1}{5(x+3)}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1}{5(x-2)}-\dfrac{1}{5(x+3)}=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{1}{5(x-2)}-\dfrac{1}{5(x+3)}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-3^-}\dfrac{1}{5(x-2)}-\dfrac{1}{5(x+3)}=+\infty$.

- **Etude des branches infinies**

La courbe C de f admet les droites d'équations $x=-3$ et $x=2$ comme asymptotes.

D'autre part, la droite d'équation $y=0$ est asymptote à la courbe C de f, au voisinage de l'infini.

- La fonction rationnelle f est dérivable sur son ensemble de définition.

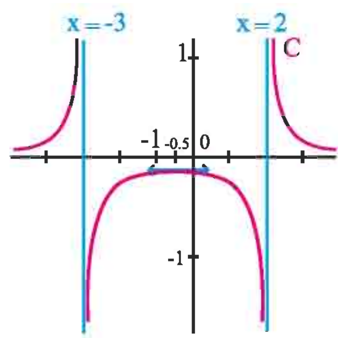
Le calcul donne $f'(x)=-\dfrac{1}{5(x-2)^2}+\dfrac{1}{5(x+3)^2}=\dfrac{-2x-1}{(x-2)^2(x+3)^2}$, $x \neq 2$ et $x \neq -3$.

Ce qui prouve que $f'(x)\geq 0$, si et seulement si, $x \leq -0.5$ et $x \neq -3$.

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		-3		-0.5		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	
f	0	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	-0.16	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	0

Représentation graphique de f



3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=k$ revient à déterminer le nombre de points d'intersection de la courbe de f avec la droite d'équation $y=k$.

Si $k<-0.16$ ou $k>0$, il y a deux points d'intersection.

Si $k=-0.16$, il y a un unique point d'intersection.

Si $-0.16<k\leq 0$, il n'y a aucun point d'intersection.

Exemple 4

Soit la fonction $f : x \mapsto x+\sqrt{x^2-1}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'ensemble D de définition de f.
2. a. Montrer que $f(x)f(-x)=-1$, pour tout réel x de D.

   b. En déduire que $f(x)\neq 0$, pour tout réel x de D.

   c. Etudier la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   d. Montrer que la droite $\Delta : y=2x$ est asymptote à C.
3. Montrer que $f'(x)=\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2-1}}$, $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.
4. Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et à gauche en -1.
5. dresser le tableau de variation de f et tracer C.

Solution

1. La fonction f est définie pour tout réel x tel que $x^2-1\geq 0$.

On en déduit que $D=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$.

2. a. On peut écrire $f(x)f(-x)=\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)=-1$, $x\in D$.

b. Cela résulte de l'égalité $f(x)f(-x)=-1$, pour tout réel x de D.

c. Les égalités $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}=+\infty$ donnent $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

D'autre part l'égalité $f(x)f(-x)=-1$, valable pour tout réel x de D implique que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{f(-x)}=0.$$

d. Le calcul donne $f(x)-2x=-x+\sqrt{x^2-1}=\dfrac{-1}{x+\sqrt{x^2-1}}$, $x\in D$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=0$. Ce qui prouve que la droite $\Delta : y=2x$ est asymptote à C.

3. Il est clair que la fonction f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables.

De plus, $f'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2-1}}$ pour tout réel x de $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

4. Pour tout $x>1$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{x-1+\sqrt{x^2-1}}{x-1}=1+\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}=1+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Ce qui implique que $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$.

De même , on vérifie que pour $x<-1$, $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = 1+\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

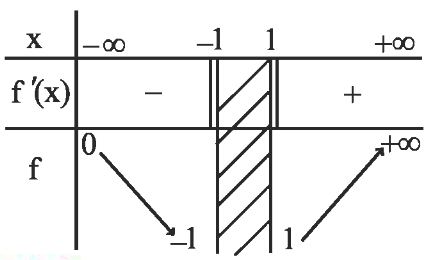
Par suite $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = -\infty$.

5. La fonction continue f ne s'annule sur aucun des intervalles $]-\infty,-1]$ et $[1,+\infty[$.

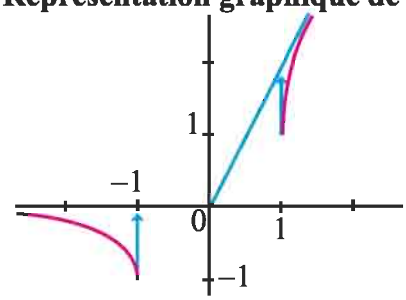
On en déduit qu'elle garde un signe constant sur chacun des intervalles $]-\infty,-1]$ et $[1,+\infty[$. Ce qui prouve que $f(x)$ est du signe de $f(1)$ pour $x \geq 1$ et $f(x)$ est du signe de $f(-1)$ pour $x \leq 1$.

Il en résulte que $f'(x)>0$, si et seulement si, $x>1$.

Tableau de variation de f



Représentation graphique de f



Exemple 5

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4\sin x}{2+\cos x}$.

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de f.
   b. Etudier la parité de f et vérifier que 2π est une période de f.
2. .Etudier les variations de f sur $[0,\pi]$.
3. Tracer, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe de la restriction de f à $[-2\pi,2\pi]$

Solution

1. a. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, car $2+\cos x \neq 0$ pour tout réel x.

b. On vérifie facilement que f est impaire et que 2π est une période de f.

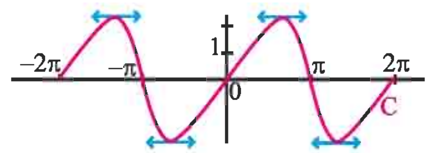
2. La fonction f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables tel que le dénominateur ne s'annule pas. De plus, $f'(x)=\dfrac{4(2\cos x+1)}{(2+\cos x)^2}$, pour tout réel x de $[0,\pi]$.

On en déduit que $f'(x)\geq 0$, si et seulement si, $x \in \left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right]$.

Tableau de variation de f sur $[0,\pi]$.

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{4}{\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

3. **Représentation graphique de f sur $[-2\pi, 2\pi]$.**



Exemple 6

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$.

1. a. Etudier les variations de f' et en déduire qu'il existe un unique réel α de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $f'(x) \geq 0$, si et seulement si, $x \in [0, \alpha]$.
   b. En utilisant la touche $\cos^{-1}$ de la calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-4} près de α.
2. Dresser le tableau de variation de f, en déduire le signe de f.
3. Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Solution

1. a. La fonction f est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

et $f'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$, pour tout réel x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

La fonction f' est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $f''(x) = -\sin x$, pour tout réel x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On en déduit que $f''(x) \leq 0$, pour tout réel x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Tableau de variation de f'.

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$	0	$-$	
f'	$1-\frac{2}{\pi}$	$\searrow$	$\frac{-2}{\pi}$

La fonction f' réalise une bijection strictement décroissante de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[-\frac{2}{\pi}, 1-\frac{2}{\pi}\right]$.

Les réels $-\frac{2}{\pi}$ et $1-\frac{2}{\pi}$ étant de signe contraire, il existe alors un unique réel α de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tel que $f'(\alpha)=0$.

On en déduit que $f'(x) \geq 0$, si et seulement si, $x \in [0, \alpha]$.

b. Le réel α est l'unique solution dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ de l'équation $\cos(x)=\frac{2}{\pi}$.

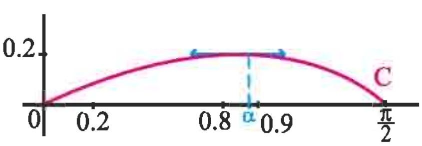
En utilisant la touche $\cos^{-1}$ de la calculatrice, on obtient $\alpha \simeq 0.88068923$, On en déduit que 0.8807 est une valeur approchée à 10^{-4} près de α.

3. La calculatrice donne, $f(\alpha) \simeq 0.21051366$.

Tableau de variation de f.

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

Représentation graphique de f.



QCM

Nous avons représenté ci-contre
le tableau de variation d'une fonction f.
Cocher la réponse exacte.

x	$-\infty$		-1		-0.5		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5

1. ☐ 0 est un minimum relatif de f.
   ☐ -1 est un minimum relatif de f.
   ☐ -5 est un minimum relatif de f.

2. ☐ La fonction f est croissante sur $[-1, 0]$.
   ☐ La fonction f est croissante sur $[-1, -0.5[$ et sur $]-0.5, 0]$.
   ☐ La fonction f est décroissante sur $]-\infty, -0.5]$.

3. La courbe de f admet pour asymptote la droite d'équation
   ☐ $x = 2$. ☐ $x = -0.5$. ☐ $x = -5$.

4. La courbe de f admet pour asymptote la droite d'équation
   ☐ $y = 2$. ☐ $y = -0.5$. ☐ $y = -1$.

5. La courbe de f et l'axe des abscisses ont
   ☐ un point commun. ☐ deux points communs. ☐ trois points communs.

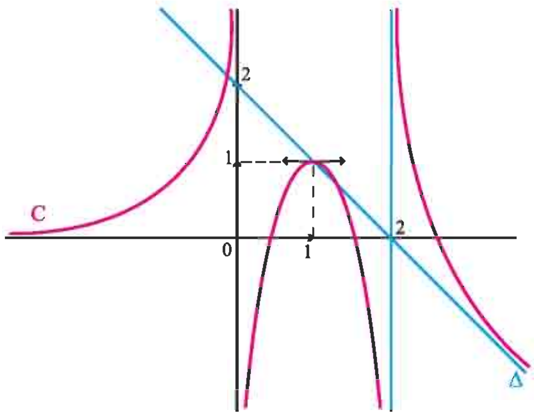
VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle $]a-h, a+h[$, $(h > 0)$ et admettant une dérivée seconde continue.

1. Si $f''(a) = 0$ alors la courbe de f admet un point d'inflexion d'abscisse a.
2. Si f' est décroissante sur $]a-h, a[$ et croissante sur $[a, a+h[$ alors la courbe de f admet un point d'inflexion d'abscisse a.
3. Si f' est croissante sur $]a-h, a+h[$ alors f est croissante sur $]a-h, a+h[$.
4. Si f'' est négative sur $]a-h, a+h[$ alors f est décroissante sur $]a-h, a+h[$.

1 La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$. La droite Δ et les droites d'équations respectives $x=0$, $x=2$ et $y=0$ sont des asymptotes à la courbe C.



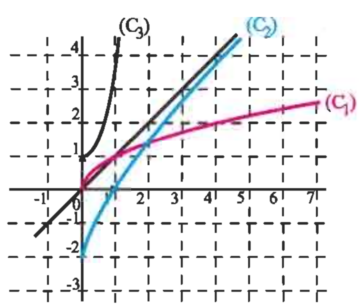
1. Déterminer graphiquement,

$\lim\limits_{-\infty} f$, $\lim\limits_{0^-} f$, $\lim\limits_{0^+} f$, $\lim\limits_{2^-} f$, $\lim\limits_{2^+} f$, $\lim\limits_{+\infty} f$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+x-2$.

2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Déterminer suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.

2 On a représenté trois fonctions f, g et h définies sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par

$f(x)=x^2+1$, $g(x)=\sqrt{x}$ et $h(x)=x-\frac{2}{x+1}$.



1. Identifier pour chaque fonction sa courbe représentative.
2. Préciser pour chaque courbe la nature de sa branche infinie.

3 Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$. Déterminer la nature des branches infinies de la courbe de f dans chacun des cas ci-dessous.

1. $f: x \mapsto 2x-3\sqrt{x-1}$.
2. $f: x \mapsto \frac{1}{x}-\sqrt{x+2}$.
3. $f: x \mapsto x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

4 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ et on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Montrer que l'axe des abscisses est une asymptote à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.
2. Montrer que la droite d'équation $y=2x$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

5 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+4 & \text{si } x\le 1,\\ \frac{1}{x}+x+1 & \text{si } x>1.\end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable en 1 et préciser $f'(1)$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'.
3. Dresser le tableau de variation de f et construire la courbe de f dans un repère orthonormé.

6 1. Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{x^2}{3}+\frac{9}{4x}$.
2. Déterminer l'ensemble de définition de f.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Etudier les branches infinies.
5. Construire la courbe de f dans un repère orthonormé.
6. En déduire la construction de la courbe d'équation $y=\left|\frac{x^2}{3}+\frac{9}{4x}\right|$.

7 Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x)-x-2)$ et interpréter les résultats obtenus.
2. Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

8 Soit la fonction

$f : x \mapsto \dfrac{x^3+3x^2+3x+5}{(x+1)^2}$, $x \neq -1$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que

$f(x) = ax+b+\dfrac{c}{(x+1)^2}$, $x \neq -1$.

2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Soit C la courbe de f dans un repère orthonormé.

a. Montrer que C admet, au voisinage de l'infini, une asymptote D que l'on déterminera.
b. Etudier la position relative de C et D.
c. Tracer D et C.

9 Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$, $x \neq 1$ et C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que

$f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-1}$, $x \neq 1$.

2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Montrer que C admet un centre de symétrie.
4. a. Montrer que C admet une asymptote oblique D que l'on déterminera.

b. Etudier la position relative de C et D.
c. Tracer D et C.

5. Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $[1+\sqrt{2}, +\infty[$ réalise une bijection de $[1+\sqrt{2}, +\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.

a. Dresser le tableau de variation de g^{-1}.
b. Résoudre l'équation g(x) = x. En déduire les coordonnées des points d'intersection des courbes C et C', où C' est la courbe de g^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
c. Tracer la courbe C'.

10 Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{3}}{x}$ et C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier les variations de f et tracer C.
2. Soit S la symétrie orthogonale par rapport à la droite D d'équation $x = 1$.

Soit $M(x, y)$ un point du plan et $M'(x', y')$ son symétrique par rapport à D.

a. Exprimer les coordonnées de M', à l'aide de celles de M.
b. Trouver l'équation de la courbe C' image de C par S.
c. Déterminer les points communs à C et C'.
d. Tracer C' dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

11 Soit la fonction $f : x \mapsto |x+1| + \dfrac{x}{x^2-1}$ et C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Déterminer les asymptotes de C.
4. Etudier la position relative de C et de ses asymptotes obliques.
5. Donner l'équation de la tangente à C au point d'abscisse 0 et préciser la position de C par rapport à cette tangente sur l'intervalle $]-1, 1[$.
6. Tracer C.

12 Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^4-6x^2+1}{x^3-x}$ et C la courbe de f dans un repère orthonormé.

1. a. Préciser l'ensemble de définition de f.

b. Déterminer les réels a, b et c tels que

$f(x) = x + \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Déterminer les asymptotes à la courbe C.
4. Résoudre les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = x$.
5. Montrer que C possède un centre de symétrie et tracer C.
6. Soit k un réel et P_k la fonction polynôme défini par $P_k(x) = x^4 - kx^3 - 6x^2 + kx + 1$.

Vérifier que l'équation $P_k(x) = 0$ admet, quelque soit le réel k, quatre racines réelles distinctes.

13 Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2}$ et C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Déterminer les asymptotes à la courbe C et tracer C.
4. Discuter graphiquement, suivant les valeurs du réel m, le nombre et le signe des solutions de l'équation $(3-m)x^2 + (m-1)x + 2(m-1) = 0$.
5. Soit g la restriction de f à l'intervalle $]2, +\infty[$.

a. Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.

b. Tracer la courbe de g^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

14 Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$, $x \neq 1$.

1. Vérifier que $f(x) = x + 5 + \dfrac{12}{x-1} + \dfrac{8}{(x-1)^2}$, $x \neq 1$.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Soit $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a. Montrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique D que l'on déterminera.

b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection A et B de la courbe $\mathscr{C}$ avec les droites d'équations $x = 0$ et $y = x + 5$.

c. Donner les équations des tangentes en A et en B à C.

d. Tracer ces tangentes et la courbe $\mathscr{C}$.

15 Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

1. a. Déterminer l'ensemble D de définition de la fonction f.

b. Montrer que pour tout réel de D, $f(x) = \sqrt{\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}}$.

2. a. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x - \dfrac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

b. Etudier la position de la courbe de f par rapport à la droite Δ.

3. Etudier la nature de la branche infinie de C_f en $-\infty$.
4. Tracer C_f et Δ.

16 Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x - 4}$ et C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Etudier la dérivabilité de f à gauche en -4 et à droite en 1.

Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3. Etudier la dérivabilité de f sur chacun des intervalles $]-\infty, -4[$ et $]1, +\infty[$ et déterminer f'.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Etudier les branches infinies.
6. a. Tracer C.

b. En déduire la représentation de la courbe d'équation $x^2 - y^2 + 3x - 4 = 0$.

17 Soit la fonction $f : x \mapsto x^2 - 32\sqrt{x} + 31$ et C la courbe de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (On prendra 1cm comme unité sur l'axe des abscisses et 2mm sur l'axe des ordonnées).

1. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Tracer C.
4. En déduire la courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto x^2 - 32\sqrt{|x|} + 31$.

18 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = x\sqrt{x} + 10$.

1. Montrer que g est dérivable à droite en 0.
2. Calculer $g'(x)$, $x > 0$.
3. Dresser le tableau de variation de g.
4. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x}$.
5. Représenter g dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

19 Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}$ et C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Etudier la dérivabilité de f en 2 à gauche et interpréter graphiquement le résultat.
3. Etudier la dérivabilité de f sur $]0,2[$ et déterminer f'.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. a. Déterminer les points d'intersection de C et de la droite D d'équation $y = x$.
b. Tracer C.
6. Soit g la restriction de f à $]0,2]$.
a. Montrer que g réalise une bijection de $]0,2]$ sur un intervalle I que l'on précisera.
b. Expliciter $g^{-1}(x)$, $x \in I$.
c. Tracer la courbe C' de g^{-1} dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

20 Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ et C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Montrer que le point d'intersection I de C avec l'axe des abscisses est un centre de symétrie de C.
3. Existe-t-il des points de C où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 1.5x$
Si oui, donner les équations de ces tangentes.
4. Tracer C.
5. a. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1}.
b. Tracer la courbe de f^{-1} dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.
c. Calculer $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

21 I. Soit la fonction $f : x \mapsto -\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$ et C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Montrer que la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera.

II. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = -\frac{1}{2}x+1+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}.$$

1. Dresser le tableau de variation de g.
2. Déterminer les asymptotes à la courbe C' de g et étudier la position de C' par rapport à ses asymptotes.
a. Tracer C'.
b. Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I que l'on précisera.
c. Vérifier que $g^{-1}(x) = \dfrac{1}{4x-4}+1-x,\ x \in I$.
d. Tracer la courbe de g^{-1} dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

22 Soit la fonction $f : x \mapsto 1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. a. Montrer que C admet un point d'inflexion A dont on déterminera les coordonnées.
b. Ecrire une équation de la tangente T à C au point A.
c. Montrer que A est un centre de symétrie pour C.
d. Construire C.
3. a. Montrer que la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I que l'on précisera.
b. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout x de I.
c. Tracer la courbe de f^{-1} dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.
d. Montrer que f^{-1} est dérivable et calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)$.
4. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $\left[\sqrt{3},2\right]$.
5. On définit la suite réelle (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$
a. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
b. Montrer que $\sqrt{3} \le u_n \le 2$, pour tout entier n.
c. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

23 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$.

24 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \frac{\cos x}{2\cos x - 1}$.

25 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^2 x + \cos x$.
On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. a. Montrer que 2π est une période de f.
b. Montrer que la droite des ordonnées est un axe de symétrie de C_f.
2. a. Etudier les variations de f.
b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0, \pi]$.
Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
c. Tracer la représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle $[-\pi, 2\pi]$.

26 I. Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3}{(x-1)^2}$.

II. Soit la fonction $h : x \mapsto \frac{\sin^3 x}{(\sin x - 1)^2}$ et C_h sa courbe dans un repère orthonormé.
1. a. Déterminer l'ensemble de définition de h.
b. Vérifier que 2π est une période de h.
c. Montrer que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour C_h.
2. a. Déterminer $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} h(x)$.
b. En écrivant $h = f \circ \sin$, déduire le sens de variation de h sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
c. Résoudre l'équation $h'(x) = 0$.
d. Montrer que l'origine du repère est un point d'inflexion de C_h.
3. Tracer C_h.

27 1. Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \frac{x(x+1)}{x-2}$.
2. Déterminer graphiquement, suivant les valeur de m, le nombre de solutions de l'équation $x^2 + (1-m)x + 2m = 0$.
3. Déterminer graphiquement, suivant les valeur de m, le nombre de solutions de l'équation $\cos^2 x + (1-m)\cos x + 2m = 0$ dans $[0, 2\pi[$.