Chapitre 10

Equations différentielles

Le pendule isochrone. Le problème consiste à modifier le pendule standard pour rendre la période indépendante de l'amplitude.
Hygens (1673, Horologium Oscillatorium) a l'idée de modifier le cercle du pendule standard pour que la force accélératrice devienne proportionnelle à la longueur d'arc s.
Le mouvement du pendule serait alors décrit par $s'' + Ks = 0$, dont les oscillations sont indépendantes de l'amplitude.

(E.Haier et al, L'analyse au fil de l'histoire, 2000).

Chapitre 10

Equations différentielles

I. Définition

Activité 1

1. Soit la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$. Déterminer une relation entre f' et f.
2. Reprendre la même question pour les fonctions $g : x \mapsto -2e^{-x}$ et $h : x \mapsto 0,5e^{-x}$.
3. Représenter les fonctions f, g et h dans un même repère orthonormé.
4. Donner d'autres fonctions qui vérifient la relation trouvée dans la première question.

Activité 2

Une expérience consiste à étudier l'évolution d'une population de bactéries.
On désigne par N_0 le nombre de bactéries à l'instant $t = 0$, $N(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t et on note $N'(t)$ la vitesse instantanée d'évolution des bactéries à l'instant t.

1. On constate que $N(t) = 9000e^{-0,4t}$.
   a. Donner le nombre de bactéries aux instants $t = 0$, $t = 10$ et $t = 20$.
   b. Donner une relation entre N' et N.
   c. Déterminer la vitesse instantanée d'évolution aux instants $t = 10$ et $t = 20$.
   d. Représenter la fonction $t \mapsto N(t)$.
2. Reprendre les questions précédentes si on suppose que $N(t) = 3000e^{-0,4t}$.

Vocabulaire

Une équation de la forme $y' = ay$, où l'inconnue y est une fonction et a est un réel, est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation de la forme $y' = ay$, c'est trouver toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $y' = ay$.
Ces fonctions sont appelées solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = ay$.

Théorème

Soit a un réel. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto ke^{ax}$, où k est un réel quelconque.

Démonstration

Désignons par (E) l'équation différentielle $y' = ay$.

Pour tout réel k, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ke^{ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f'(x) = k\,ae^{ax} = af(x)$, pour tout x de $\mathbb{R}$.

Réciproquement, montrons que toute solution g de (E) est telle que $g(x) = ke^{ax}$, pour tout x de $\mathbb{R}$.

Soit g une solution de (E) et h la fonction définie pour tout réel x par $h(x) = g(x)e^{-ax}$,

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = g'(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax}$, pour tout réel x.

La fonction g étant solution de (E) par hypothèse, on en déduit que

$h'(x) = ag(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax}$, ou encore que $h'(x) = 0$, pour tout réel x.

Ce qui implique que la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$, c'est à dire qu'il existe un réel k tel que $h(x) = g(x)e^{-ax} = k$, pour tout x de $\mathbb{R}$.

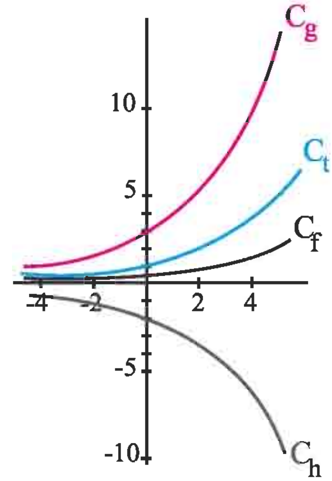
Il en résulte que $g(x) = ke^{ax}$, pour tout réel x.

Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

On a représenté ci-contre les courbes représentatives de quatre fonctions f, g, h et t, solutions de l'équation $y' = 0.3y$.

Donner les expressions des fonctions f, g, h et t.



Activité 4

1. a. Résoudre l'équation différentielle $(E): 2y' + 3y = 0$.

   b. Montrer qu'il existe une unique solution f de (E) vérifiant $f(0) = -3$.

   c. Représenter graphiquement cette solution.

2. Reprendre la question précédente pour l'équation $(E): y' = 0$.

Théorème

Soit a un réel non nul. Pour tous réels x_0 et y_0, l'équation $y' = ay$ admet une unique solution qui prend la valeur y_0 en x_0.

C'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto y_0 e^{a(x - x_0)}$.

Démonstration

Soit f une solution de (E) qui prend la valeur y_0 en x_0.

Alors $f(x)=ke^{ax}$, pour tout x de $\mathbb{R}$ et $ke^{ax_0}=y_0$. Il en résulte que $k=y_0e^{-ax_0}$.

Par suite $f(x)=y_0e^{a(x-x_0)}$, $x\in\mathbb{R}$.

Activité 5

Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Représenter graphiquement la fonction f dont la courbe C_f passe par le point $A(1,2)$ et telle que la tangente en tout point M de C_f a un coefficient directeur égal au double de l'ordonnée de M.

Activité 6

On considère une substance radioactive. On désigne par $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs existants dans la substance à l'instant t (exprimé en années) et par N_0 le nombre de noyaux existants à $t=0$.

On constate que la vitesse $N'(t)$ de désintégration des noyaux à l'instant t est proportionnelle au nombre $N(t)$, avec un coefficient de proportionnalité égal à $-\lambda$, où le réel strictement positif λ est appelé constante radioactive du noyau.

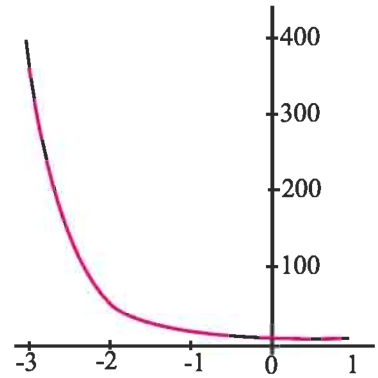
1. Donner l'expression de $N(t)$.
2. Déterminer, en fonction de λ, le temps $T_{0.5}$ au bout duquel la moitié des noyaux s'est désintégrée. ($T_{0.5}$ est appelé durée de demi-vie de la substance).
3. On suppose que la substance radioactive est du carbone 14.
   a. Déterminer λ sachant que $T_{0.5}=5730$.
   b. Déterminer l'âge d'un fragment d'os qui contient 60% de la quantité initiale.

II. Equations différentielles du type $y'=ay+b$, où a et b sont deux réels tels que $a\neq 0$

Activité 1

On a représenté ci-contre la fonction $f: x \mapsto e^{-2x}+3$.

1. Montrer que f vérifie l'équation différentielle $(E): y'=-2y+6$.
2. Montrer que g est solution de (E), si et seulement si, $h: x \mapsto g(x)-3$ est solution de l'équation différentielle $y'=-2y$.
3. Donner toutes les solutions de (E).



Théorème

Soit a et b deux réels tels que $a\neq 0$.
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'=ay+b$ est l'ensemble des fonctions $f: x \mapsto ke^{ax}-\frac{b}{a}$, où k est un réel quelconque.

De plus pour tous réels x_0, y_0, la fonction $f: x \mapsto \left(y_0+\frac{b}{a}\right)e^{a(x-x_0)}-\frac{b}{a}$ est l' unique solution de $y'=ay+b$, telle que $f(x_0)=y_0$.

Démonstration

Soit a non nul.

L'équation différentielle (E): $y'=ay+b$, est équivalente à l'équation différentielle

$(E_1): \left(y+\frac{b}{a}\right)'=a\left(y+\frac{b}{a}\right)$.

On en déduit qu'une fonction f est solution de (E), si et seulement si, $f+\frac{b}{a}$ est solution de (E_1). Il en résulte que les solutions de (E) sont les fonctions $f: x \mapsto ke^{ax}-\frac{b}{a}$, où k est un réel quelconque.

Si f est une solution de (E) prenant la valeur y_0 en x_0, alors

$f(x_0)=ke^{ax_0}-\frac{b}{a}=y_0$. On en déduit que $k=(y_0+\frac{b}{a})e^{-ax_0}$, ou encore que f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\left(y_0+\frac{b}{a}\right)e^{a(x-x_0)}-\frac{b}{a}$.

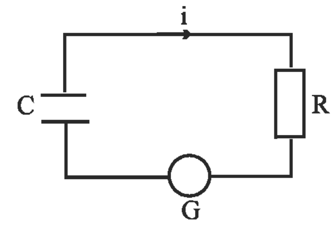
Activité 2

Donner, dans chacun des cas ci-dessous, la solution f de l'équation différentielle et la représenter.

a. $\sqrt{2}y' - 2y = 1, \; f(0) = -1.$ b. $\sqrt{2}y' - 2y = 1, \; f(0) = -\frac{1}{2}.$

Activité 3

Un circuit électrique est constitué d'un générateur G délivrant une tension E, d'un condensateur C et d'une résistance R.



On désigne par $i(t)$ l'intensité du courant électrique à l'instant t (en seconde) et par $q(t)$ la charge à l'instant t.

1. Donner une relation entre $i(t)$ et $q'(t)$.
2. Montrer que $Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = E$.
3. Donner l'expression de $q(t)$, puis de $i(t)$.
4. Représenter $t \mapsto i(t)$ si l'on sait que $i(0) = 10$ mA.

III. Equations différentielles du type $y'' + \omega^2 y = 0$, ω réel

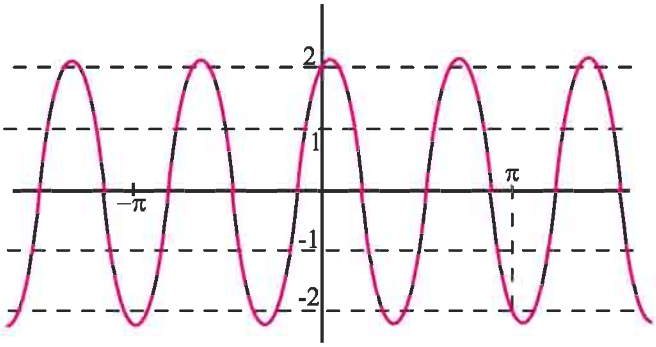
Activité 1

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \sin x + \cos x$.
   a. Déterminer les réels $r > 0$ et φ appartenant à $]-\pi, \pi]$ tels que $f(x) = r\cos(x - \varphi)$ pour tout réel x.
   b. Ecrire f'' en fonction de f.
   c. Représenter la fonction f.
2. Reprendre les questions précédentes pour la fonction $g : x \mapsto \sqrt{3}\sin(2x) - \cos(2x)$.

Activité 2

Dans la figure ci-contre on a représenté la courbe d'une fonction de la forme $f : x \mapsto a\sin(3x) + b\cos(3x)$.

1. Déterminer les réels a et b.
2. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et trouver une relation entre f'' et f.



Vocabulaire

Une équation de la forme $y''+\omega^2 y=0$, où l'inconnue y est une fonction et ω est un réel, est appelée équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

Résoudre une équation de la forme $y''+\omega^2 y=0$, c'est trouver toutes les fonctions deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ qui la vérifient.

Activité 3

On considère l'équation différentielle $(E): y''+9y=0$, où l'inconnue y est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \sin(3x)$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \cos(3x)$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
3. a. Montrer que pour tous réels a et b, la fonction $f: x \mapsto a\sin(3x)+b\cos(3x)$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

   b. On suppose que $f(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $f'(0)=\frac{3}{2}$. Déterminer a et b.

   c. En déduire les réels $r>0$ et φ appartenant à $]-\pi,\pi]$ tels que $f(x)=r\cos(3x-\varphi)$ pour tout réel x.

   d. Représenter f.

Activité 4

Soit ω un réel non nul, x_0 et y_0 deux réels.

On considère l'équation différentielle $(E): y''+\omega^2 y=0$

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{y_0}{\omega}\sin(\omega x)+x_0\cos(\omega x)$

est solution de (E).

Vérifier que $f(0)=x_0$ et $f'(0)=y_0$.

2. On suppose qu'il existe une autre fonction g solution de (E) qui vérifie

$g(0)=x_0$ et $g'(0)=y_0$.

Soit h la fonction définie par $h(x)=\omega^2\left(f(x)-g(x)\right)^2+(f'(x)-g'(x))^2$.

a. Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifier que pour tout réel x,

$h'(x)=2\omega^2\left(f'(x)-g'(x)\right)(f(x)-g(x))+2\left(f''(x)-g''(x)\right)\left(f'(x)-g'(x)\right)$.

b. En déduire que la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$.

c. Calculer $h(0)$ et conclure.

Théorème

Soit ω un réel non nul et x_0, y_0 deux réels.

L'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = x_0$ et $f'(0) = y_0$.

C'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{y_0}{\omega}\sin(\omega x) + x_0\cos(\omega x)$.

Conséquence

Soit ω un réel non nul.

La fonction nulle est l'unique solution de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ qui vérifie $y(0) = y'(0) = 0$.

Activité 5

1. a. Déterminer la solution f de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$,telle que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

b. Représenter f .

c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $f(x) = 1$, $f(x) = -1$.

2. Reprendre les questions précédentes pour la solution g de l'équation différentielle $y'' + \pi^2 y = 0$, qui vérifie $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$.

Activité 6

Soit ω un réel non nul et l'équation différentielle $(E): y'' + \omega^2 y = 0$.

A/ 1. Montrer que les fonctions $x \mapsto \cos(\omega x)$ et $x \mapsto \sin(\omega x)$ sont des solutions de (E).

2. Montrer que pour tous réels A et B la fonction $x \mapsto A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$ est une solution de (E).

B/ Soit f une solution de (E).

1. Montrer que pour tous réels A et B la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = f(x) - A\sin(\omega x) - B\cos(\omega x)$ est une solution de (E).

2. a. Déterminer $g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b. En déduire qu'il existe un unique couple (A, B) de réels tel que $g(0) = g'(0) = 0$.

3. Montrer alors que les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Théorème

Soit ω un réel non nul.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y''+\omega^2 y=0$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=A\sin(\omega x)+B\cos(\omega x)$, $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.

Activité 7

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y''+9y=0$.
2. Montrer qu'il existe une seule solution de (E) telle que $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$.
3. Existe-il une solution de (E) telle que $f(0)=\frac{1}{2}$ et $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=1$?

Problème résolu

Un mobile se déplace sur un axe horizontal $(x'x)$ avec un mouvement uniformément varié.

On désigne par $x(t)$ la position du mobile à l'instant, $x'(t)$ sa vitesse et $x''(t)$ son accélération. (t est exprimé en secondes et $x(t)$ en mètres).

On suppose de plus qu' à tout instant t, l'accélération $x''(t)$ est proportionnelle à $x(t)$ avec un coefficient égal à $-\frac{\pi^2}{4}$.

1. Donner l'équation horaire du mouvement si l'on sait que $x(1)=2$ et $x(2)=0$.
2. déterminer la position et la vitesse du mobile à l'instant $t=0$.
3. Représenter $t\mapsto x(t)$.

Solution

1. La fonction $x\mapsto x(t)$ est la restriction à $\mathbb{R}_+$ de la solution de l'équation différentielle $x''+\frac{\pi^2}{4}x=0$ qui vérifie $x(1)=2$ et $x(2)=0$.

Il existe deux réels A et B tels que $x(t)=A\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)+B\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right), t\in\mathbb{R}_+$.

De l'hypothèse $x(1)=2$ et $x(2)=0$ on en déduit que $A=2$ et $B=0$.

Par conséquent l'équation horaire du mouvement est $x(t)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$, $t\geq 0$.

2. • A l'instant $t=0$, $x(0)=0$, c'est-à-dire le mobile est à l'origine du repère.

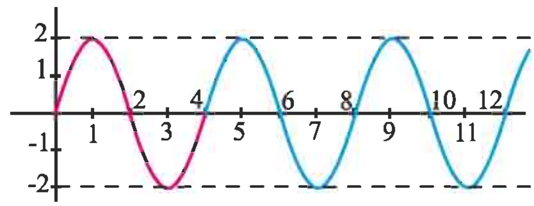
• Pour tout $t \geq 0$, $x'(t)=\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

Par conséquent $x'(0)=\pi$, c'est-à-dire la vitesse à l'instant $t=0$ est π m/s.

3. La fonction $t \mapsto 2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ est périodique de période 4, il suffit donc de l'étudier sur $[0,4]$. Pour tout $t \geq 0$, $x'(t)=\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

Tableau de variation de f sur $[0,4]$.

	0		1		3		4
x'(t)		+	0	−	0	+	
x(t)	0	↗	2	↘	−2	↗	0



QCM

Cocher la réponse exacte.

1. La fonction $x \mapsto 2e^{2x}$ est solution de l'équation différentielle

☐ $y' = 4y$. ☐ $y' = -4y$. ☐ $y' = 2y$.

2. Si f est la solution de l'équation différentielle $y' = 2y$ telle que $f(0) = 1$ alors la courbe de f admet une tangente

☐ horizontale. ☐ parallèle à $y = 2x$. ☐ parallèle à $y = -x$.

3. Si f est la solution de l'équation différentielle $y' = -y + 1$ telle que $f(0) = 1$ alors la fonction f est

☐ négative. ☐ positive. ☐ n'a pas un signe constant.

4. La fonction $x \mapsto 2\cos x - 3\sin x$ est solution de l'équation différentielle

☐ $y'' + 2y = 0$. ☐ $y'' + y = 0$. ☐ $y'' + 3y = 0$.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. La fonction $f : x \mapsto 2^x$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y\ln 2 = 0$.

2. Si f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -2y$ alors la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Si f est la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 3y$ telle que $f'(1) = 3$ alors $f(1) = 1$.

4. Si f est la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 2y = 0$ qui s'annule et change de signe en $\frac{\pi}{4}$ alors sa courbe dans un repère orthonormé admet un point d'inflexion.

1 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations différentielles ci-dessous.

a. $y'+3y=0$.

b. $y'+\sqrt{2}y=0$.

c. $-5y'+y=0$.

2. Pour chacun des cas ci-dessous, donner la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle.

a. $y'-\frac{y}{2}=0$ et $y(-1)=e$.

b. $-3y'-y=0$ et $y(\ln 8)=1$.

c. $y'-2y=0$ et $y(0)=1$.

3 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ chacune des équations différentielles ci-dessous

a. $y'-2y+1=0$.

b. $y'-\pi y+3=0$.

c. $-2y'+5y-1=0$.

2. Pour chacun des cas ci-dessous, donner la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle.

a. $y'-y-1=0$ et $y(2)=0$.

b. $2y'+y-3=0$ et $y(0)=3$.

c. $y'+3y+\frac{3}{4}=0$ et $y(-1)=0$.

4 La loi de refroidissement de Newton, établit que la vitesse instantanée de perte de chaleur d'un corps homogène et inerte est proportionnelle à la différence de température entre le corps et le milieu.
On suppose que la température de l'air ambiant est constante et égale à 25 °C.
Dans ces conditions, la température d'un corps homogène et inerte passe de 100 °C à 75 °C en 15minutes.
On désigne par $f(t)$ la température de ce corps à t minutes.

1. Vérifier qu'il existe un réel a tel que

$$\begin{cases} f'(t)=a(f(t)-25) \\ f(0)=100 \\ f(15)=75 \end{cases}$$

2. Déterminer f.
3. Au bout de combien de temps (à 1 minute près), ce corps aura une température de 25°C ?

5 Une substance se dissout dans l'eau à une vitesse instantanée proportionnelle à la quantité non encore dissoute.
On place 20 g de cette substance dans un volume d'eau suffisant pour la dissoudre totalement. On sait que les dix premiers grammes se dissolvent en 5 minutes.

1. Donner l'expression de la quantité dissoute $f(t)$ (en grammes) en fonction du temps t (en minutes).
2. Quelle est la quantité (à 1mg près) non dissoute au bout de 10minutes ? 30minutes ? 1heure ?

6 On désigne par $C(t)$ la concentration (en mg/l) d'un certain médicament dans le sang, en fonction du temps exprimé en heures. La concentration initiale est de 5 mg/l.
On suppose que la vitesse instantanée d'élimination de ce médicament par l'organisme est donnée par $C'(t)=-0.25\,C(t)$.

1. Déterminer $C(t)$.
2. Représenter la fonction $C:t\mapsto C(t)$.
3. Donner un encadrement à 0.1 près de l'instant t_0 à partir duquel $C(t)<1$.

7 La charge et la décharge d'un condensateur sont définies sur l'intervalle $[0,2\ln 3[$ par la fonction f qui vérifie les conditions suivantes :

- Sur l'intervalle $[0,2\ln 3[$, f est une solution de l'équation différentielle $y'+y=0$ avec $f(\ln 3)=-2$.

1. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
2. Etudier f et la représenter.

8 1. Vérifier que la fonction $u:x\mapsto 2$ vérifie l'équation différentielle $y'+2y=y^2$.

1. Soit E l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, qui ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$, telles que $f'(x)+2f(x)=(f(x))^2$ pour tout réel x.

a. Vérifier que l'ensemble E est non vide.

b. Soit f une fonction de E.

Montrer que la fonction $g=\frac{1}{f}$ est une solution d'une équation différentielle de la forme $y'=ay+b$, où a et b sont deux réels.

c. Déterminer alors E.

9 Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à un instant t, exprimé en heures, peut être considéré comme une fonction y à valeurs réelles de la variable t.
La vitesse de prolifération à l'instant t du nombre de microbes est la dérivée y' de cette fonction.
On a constaté que : $y'(t) = ky(t)$ où k est un coefficient réel strictement positif.
On désigne par N le nombre de microbes à l'instant $t = 0$.
1. Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle $y' = ky$ telle que $y(0) = N$.
2. Sachant qu'au bout de deux heures, le nombre de microbes a quadruplé, calculer en fonction de N, le nombre de microbes au bout de trois heures.
3. Quelle est la valeur de N sachant que la culture contient 6400 microbes au bout de cinq heures ?

11 Soit l'équation différentielle $(E): y' + 2y = x^2$.
1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E_0): y' + 2y = 0$.
2. Déterminer un trinôme du second degré qui vérifie (E).
3. Montrer qu'une fonction f est solution de (E), si et seulement si, $f - g$ est une solution de (E_0).
4. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

12 Soit l'équation différentielle $(E): y' - y = 4\cos x$.
1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E_0): y' - y = 0$.
2. Déterminer les nombres a et b tels que la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = a\cos x + b\sin x$, vérifie (E).
3. Montrer qu'une fonction f est solution de (E), si et seulement si, $f - g$ est une solution de (E_0).
4. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

13 Dans un circuit contenant un générateur de force électromotrice E ainsi qu'une bobine de résistance r (en ohms) et d'inductance (en henrys), on montre que l'intensité est une fonction du temps solution de l'équation différentielle $Ly' + ry = E$.
On prend $E = 10v$, $r = 100\Omega$ et $L = 0.2H$.
A l'instant 0, l'intensité est nulle dans le circuit.
1. Déterminer la fonction $i : t \mapsto i(t)$ décrivant l'évolution de l'intensité i en fonction du temps.
2. Déterminer la limite de i quand t tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat.

14 Pour chacun des cas ci-dessous, donner la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle.
1. $y'' + 2y = 0$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = \sqrt{2}$.
2. $y'' + 16y = 0$, $y(\pi) = -1$ et $y'(\pi) = -2$.
3. $y'' + \frac{y}{4} = 0$, $y(-\pi) = 1$ et $y'(-\pi) = 0$.

15 On désigne par (E) l'équation différentielle $y'' = 2y'$.
1. En posant $z = y'$, résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f'(0) = 1$ et $f(0) = 2$.

16 On désigne par (E) l'équation différentielle $y'' = -3y' + 1$.
1. En posant $z = y'$, résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f'(0) = 0$ et $f(0) = 0$.

17 1. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 16y = 0$.
2. Trouver la solution f de cette équation vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 4$.
3. Trouver deux réels positifs a et b tels que pour tout réel t, $f(t) = \sqrt{2}\cos(at - b)$.
4. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{8}]$.

18 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + y' = 0$.
2. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y''' + y'' = 0$.

20 Soit l'équation différentielle $4y''+\pi^2y=0$

1. Résoudre cette équation différentielle.
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Déterminer la fonction g solution de cette équation différentielle, qui satisfait aux conditions ci-dessous.

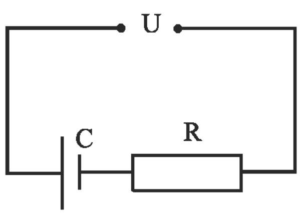
- La courbe représentative de g passe par le point N de coordonnées $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
- La tangente à cette courbe en N est parallèle à l'axe des abscisses.

3. Vérifier que pour tout réel x,

$g(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$.

21 On considère le circuit électrique ci-dessous où C est la capacité du condensateur, R la valeur de la résistance et U désigne la tension aux bornes du circuit.

En physique, on montre que $Rq'(t)+\frac{1}{C}q(t)=U$ où q, la charge du condensateur, est une fonction du temps qui prend la valeur 0 pour $t=0$.



1. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par q.
2. Montrer que $q(t)=CU-CUe^{-\frac{t}{RC}}$
3. Sachant que l'intensité $i(t)=q'(t)$, déterminer $i(t)$.

22 On se propose de déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation

(E): Pour tout réel x, $f(x)=\int_0^x f(t)dt+x$.

1. Montrer que si une fonction f vérifie l'équation (E), alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que toute solution de (E) est solution de l'équation différentielle $(E'): y'=y+1$.

Réciproquement ,quelle condition doit vérifier une solution de (E') pour être une solution de (E) ?

3. Résoudre (E).

23 **(La piqûre intraveineuse)**

A l'instant $t=0$ (t est exprimé en heures), on injecte dans le sang par piqûre intraveineuse une dose de 1.8 unité d'une substance médicamenteuse.
On suppose que la substance se répartit instantanément dans le sang et qu'elle est ensuite progressivement éliminée.
On note $Q(t)$ la quantité de substance présente dans le sang à l'instant t, exprimée en unités adaptées.
On admet que le processus d'élimination se modélise par l'équation différentielle $Q'(t)=-\alpha Q(t)$ où α est un nombre qui sera déterminé expérimentalement.

1. Montrer que $Q(t)=1.8e^{-\alpha t}$.

Sachant qu'au bout d'une heure, la quantité de substance présente dans le sang a diminué de 30 %, en déduire une équation vérifiée par α.

En utilisant la fonction $x\mapsto e^{-x}$, montrer qu'il existe un réel α unique tel que $e^{-\alpha}=0.7$

Donner une valeur décimale approchée de α à 10^{-4} près.

2. Etudier le sens de variation de Q pour $t\geq 0$, déterminer sa limite en $+\infty$ et tracer la courbe représentative C de Q.
3. On décide de réinjecter une dose analogue à l'instant $t=1$ (au bout d'une heure), puis aux instants $t=2$, $t=3$, etc.

On note R_n la quantité de substance présente dans le sang à l'instant $t=n$, dès que la nouvelle injection est faite.

a. Montrer que $R_1=1.8+0.7\times1.8$.

b. Montrer que $R_2=1.8+0.7\times R_1$ et calculer R_2.

c. Exprimer R_{n+1} en fonction de R_n.

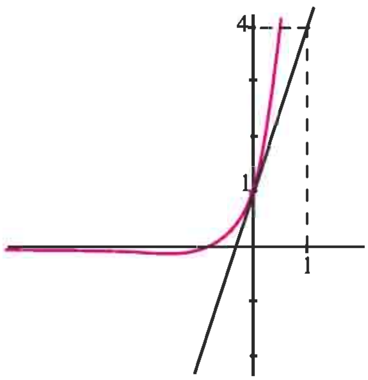
d. Montrer que pour tout entier naturel n,

$R_n=6\left(1-(0.7)^{n+1}\right)$.

e. Déterminer la limite de R_n quand n tend vers l'infini.

24 On considère les deux équations différentielles $(I): y' = 2y$ et $(II): y' = y$.

1. Résoudre chacune de ces équations différentielles.
2. Le graphique ci-dessous représente une partie de la courbe C d'une fonction f et d'une de ses tangentes T, dans un repère orthonormé.
Cette fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, où f_1 est une solution de l'équation (I) et f_2 une solution de l'équation (II).



2.a. A partir des données lues sur le graphique, donner $f(0)$ et $f'(0)$.
b. Déterminer les fonctions f_1 et f_2.
En déduire que, pour tout réel x, $f(x) = 2e^{2x} - e^{x}$.
c. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
d. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe C avec l'axe des abscisses.
3. Soit un réel $t < -\ln 2$.
a. Exprimer à l'aide de t, l'aire $\mathcal{A}(t)$ du domaine du plan limité par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = t$ et $x = -\ln 2$.
b. Montrer que $\lim\limits_{t \to -\infty} \mathcal{A}(t) = \int_{-\ln 2}^{0} f(t)dt$.
Interpréter graphiquement.

25 1. a. Résoudre l'équation différentielle $(E): 4y' + 3y = 0$.
b. Déterminer la fonction f, solution de (E) telle que $f'(0) = -6$.
2. Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle $I = [0,4]$ par $g(x) = 8e^{-0.75x}$.
a. Etudier les variations de g sur I et tracer sa courbe représentative (C) dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
b. Soit A le domaine plan compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$.
Calculer le volume V du solide engendré par la rotation du domaine A autour de l'axe des abscisses.
On donnera la valeur exacte de V en cm^3 puis sa valeur approchée arrondie au mm^3.

26 La masse de sel (en grammes) que contient un mélange d'eau et de sel à l'instant t (en minutes) est notée m(t).
Soit m la fonction qui à tout instant t associe le réel m(t). Nous admettons que la fonction m vérifie les conditions ci-dessous.
$m(0) = 300$, m est solution sur $[0,+\infty[$ de l'équation différentielle $(E): 5y' + y = 0$.
1.a. Résoudre l'équation différentielle (E).
b. Montrer que pour tout t de $[0,+\infty[$, $m(t) = 300e^{-0.2t}$.
2. Déterminer le réel t_0 tel que $m(t_0) = 150$.
3. Nous admettrons qu'il est impossible de détecter la présence de sel à l'instant t, si et seulement si, $m(t) \leq 10^{-2}$.
A partir de quel instant est-il impossible de détecter la présence de sel ?

27 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos x - \sin x$.
1. Montrer que pour tout réel x, $g'(x) = g(\pi - x)$.
2. On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout x réel, $f'(x) = f(\pi - x)$.
a. Montrer que f est deux fois dérivable et que f est solution de l équation différentielle $y'' + y = 0$.
b. Déterminer les fonctions f.

28 A/ On se propose de résoudre l'équation différentielle $(E): y' - 2y = -\dfrac{2}{1+e^{-2x}}$.

1. Déterminer la solution de l'équation $y' - 2y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0.
2. soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = \ln 2$, et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} g(x)$.

a. Calculer $g(0)$.

b. Calculer $f'(x)$ en fonction de $g'(x)$ et de $g(x)$.

c. Montrer que f est une solution de (E), si et seulement si, $g'(x) = \dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

d. En déduire l'expression de $g(x)$, puis celle de $f(x)$ de telle sorte que f soit solution de (E).

B/ Etude de la fonction f définie par $f(x) = e^{2x} \ln\left(1+e^{-2x}\right)$.

1. On pose $h(x) = \ln\left(1+e^{-2x}\right) - \dfrac{1}{e^{2x}+1}$.

a. Etudier la limite de h en $+\infty$.

b. Etudier le sens de variation de h.

c. En déduire le signe de $h(x)$, pour tout réel x.

2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ est du signe de $h(x)$.
3. Etudier la limite de f en $+\infty$.

Montrer que $f(x) = e^{2x}\left[-2x + \ln\left(1+e^{2x}\right)\right]$.

En déduire la limite de f en $-\infty$.

4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé en prenant 5 cm pour unité. Préciser la tangente au point d'abscisse nulle.

C/ 1. En remarquant que $\dfrac{1}{1+e^{-2x}} = \dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$, déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+e^{-2x}}$.

2. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'aire $\left(\text{en}\,\text{cm}^2\right)$ du domaine du plan limité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f définie au B/ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

On donnera la valeur exacte de cette aire ainsi qu'une valeur approchée à 10^{-3} près.

D/ On définit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $f([0,1]) \subset [0,1]$ et en déduire que pour tout $n \geq 0$, $u_n \in [0,1]$.
2. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

En déduire qu'elle converge vers un réel α.

3. Vérifier que $f(\alpha) = \alpha$ et $0 < \alpha < 1$.
4. Utiliser le graphique de f, pour donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

29 Un corps dont la température initiale θ_0 est égale à $30\ °C$, est placé dans une ambiance dont la température T est constante.

La température de ce corps est une fonction du temps $\theta : t \mapsto \theta(t)$.

Une loi de physique (Newton) énonce que la dérivée de θ est proportionnelle à la différence entre la température ambiante et la température du corps.

On a donc $\theta'(t) = k\left[T - \theta(t)\right]$ où k est le coefficient de proportionnalité fixé par la nature, la forme, la taille, etc. du corps.

On prend $k = 0.1$ et $\theta_0 = 30\ °C$, la température pour $t = 0$.

Le temps est exprimé en minutes, les températures en degrés Celsius.

1. Exprimer cette loi à l'aide d'une équation différentielle en précisant les conditions initiales.
2. Dans cette question, T, la température ambiante, est $100\ °C$.

a. Déterminer θ, la solution de cette équation différentielle.

b. Calculer la limite de θ quand t tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat.

3. Représenter les courbes d'évolution de la température en fonction du temps pour $T = 100\ °C$, $T = 30\ °C$ et $T = -10\ °C$.

30 Un fil conducteur parcouru par un courant électrique d'intensité constante s'échauffe par effet Joule et sa température, en degrés Celsius, est une fonction θ du temps t exprimé en secondes .On choisit l'instant de mise sous tension comme origine des temps $(t=0)$ et, à cet instant, la température du conducteur est égale à $0\ °C$.

Dans les conditions de l'expérience, la fonction θ vérifie $\theta'(t)+0.1\theta(t)=2$.

1. Déterminer $\theta(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$.
2. a. Quelle température atteint le conducteur au bout de dix secondes, au bout d'une minute ?
b. Calculer la limite de $\theta(t)$ quand t tend vers $+\infty$ et interpréter cette limite.

31 A/ On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{3e^{\frac{x}{5}}}{e^{\frac{x}{5}}+2}$ et (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthogonal. (L'unité graphique étant 1cm sur l'axe des abscisses et 5cm sur l'axe des ordonnées).

1. Etudier les variations de la fonction f et préciser les asymptotes de (C).
2. Donner l'équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0.
3. Tracer (C), la tangente et les asymptotes.
4. a. Trouver la primitive de f qui s'annule en 0.
b. Calculer le nombre qui mesure (en unités d'aire) l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la courbe (C) et la droite d'équation $x=5$.

B/ 1. Une population de poissons d'une certaine espèce croît au cours des ans selon la loi $g'=\frac{g}{5}$ (I), où g désigne la quantité de poissons (exprimée en milliers) dépendant du temps t (exprimé en années).
a. Résoudre l'équation différentielle (I).
b. Sachant qu'à l'instant $t=0$, la population comprend un millier de poissons, trouver l'expression ?
2. En réalité, un prédateur de cette espèce empêche une telle croissance, tuant chaque année une certaine quantité de poissons (dépend de l'effectif total).
La population suit alors la loi : $g'=\frac{g}{5}-\frac{g^2}{15}$ (II).
a. On pose $h=\dfrac{g}{3-g}$ et on suppose que pour tout t on a $g(t)\neq 3$.
Montrer que g est solution de (II), si et seulement si, h est solution de (I).
b. Trouver les fonctions h solutions de (I), puis les fonctions g solutions de (II).
c. Trouver la fonction g solution de (II) telle que $g(0)=1$.
Montrer que cette fonction coïncide avec la fonction f étudiée dans la partie A.
d. Vers quelle limite tend la population de poissons ?

32 On considère un circuit électrique fermé comprenant un condensateur dont la capacité, exprimée en farads, a pour valeur C, une bobine dont l'inductance, exprimée en henrys, a pour valeur L et un interrupteur.
Le temps t est exprimé en secondes.
A l'instant $t=0$, on suppose le condensateur chargé.
On ferme l'interrupteur et le condensateur se décharge dans le circuit.
On appelle $q(t)$ (en Coulombs) la valeur de la charge du condensateur à l'instant t.
La fonction q est deux fois dérivable sur $[0,+\infty[$.
On admet que la fonction q est solution de l'équation différentielle $(E): y''+\dfrac{1}{LC}y=0$.

Dans tout l'exercice on prend $C=1.25\times10^{-3}$ et $L=0,5\times10^{-2}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution q de (E) vérifiant $q(0)=6\times10^{-3}$ et $q'(0)=0$.
3. On sait que la valeur $i(t)$ de l'intensité, exprimée en ampères, du courant qui parcourt le circuit à l'instant t vérifie $i(t)=-q'(t)$.
On définit ainsi une fonction i sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

a. Vérifier que, pour tout t de $[0,+\infty[$,

$i(t)=2.4\sin(400t)$.

b. Calculer $\frac{400}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{400}}\cos(800t)\,dt$.

c. On désigne par I_e la valeur (positive), exprimée en ampères, de l'intensité efficace dans le circuit.
Son carré est donné par la formule

$(I_e)^2=\frac{400}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{400}}i^2(t)\,dt$.

Calculer $(I_e)^2$, puis donner une valeur approchée de I_e à 10^{-3} près.