Chapitre 3

Dérivabilité

" [...] Pour résoudre ces équations, il étudie le maximum des expressions algébriques. Il prend "la dérivée première" de ces expressions qu'il annule et démontre que la racine de l'équation obtenue, substituée dans l'expression algébrique donne le maximum. [...] Et comme la seule démonstration convaincante est de faire parler le texte même d'Al-Tusi, nous allons prendre trois exemples dans l'œuvre de ce mathématicien :[...], le troisième, pour dégager comment transformation affine, divisibilité et dérivée se conjuguent dans la solution de l'équation."

(R. Ras hed, Entre Arithmétique et Algèbre , 1984).

Sharaf Al-Din Al-Tusi est un mathématicien arabe qui a écrit un traité mathématique vers 1213.

Chapitre 3

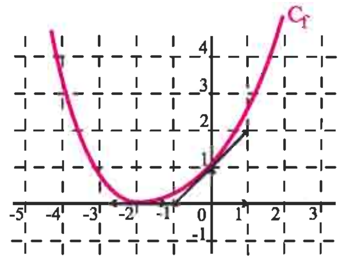
Dérivabilité

I. Rappels

Dans ce paragraphe nous rappelons les principaux résultats vus en troisième année.

Activité 1

Dans la figure ci-contre on a représenté une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que les tangentes aux points d'abscisses respectives -2 et 0.



1. Déterminer les nombres dérivés de f en -2 et 0.
2. Déterminer $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h)-1}{h}$ et $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{f(x)}{x+2}$.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer le nombre dérivé de f en chacun des réels 0 et 1.
2. Préciser les tangentes à C_f aux points d'abscisses 0 et 1.
3. Donner une approximation affine de chacun des réels $(1.0002)^3$ et $(2.0001)^3$.

Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est dérivable en un réel a de I s'il existe un réel, noté $f'(a)$ tel que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$.

Soit $f : x \mapsto a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ une fonction polynôme.
La fonction f est dérivable en tout réel x et $f'(x) = n a_n x^{n-1} + ... + a_1$.

Si f est dérivable en a, alors le réel $f(a) + f'(a)h$ est une approximation affine de $f(a+h)$.

Activité 3

Donner une approximation affine de chacun des réels $\sin(0.0001)$; $\cos(0.0001)$.

Activité 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = |x^2 - 1|$.

On note C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est dérivable en un réel a de I, si et seulement si, elle est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.

1. Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en -1. Interpréter.
2. Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 1. Interpréter.

Activité 5

Dans chacun des cas ci-dessous, étudier la dérivabilité de la fonction f sur l'intervalle I .

$f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$, $I = \mathbb{R}$.

$f : x \mapsto \dfrac{1+x+x^2}{1-x^2}$, $I = \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

$f : x \mapsto \dfrac{x(x+1)}{1-x^2}$, $I = [-3\ ,\ -1[$.

- Une fonction est dérivable sur un intervalle ouvert I si elle est dérivable en tout réel de I.
- Soit deux réels a et b tels que $a < b$.
Une fonction est dérivable sur $[a,b]$ si elle est dérivable sur $]a,b[$, à droite en a et à gauche en b.
- On définit de façon analogue la dérivabilité d'une fonction sur les intervalles $[a,b[$, $]a,b]$, a et b finis ou infinis.

Nous donnons dans les deux tableaux ci-dessous les dérivées de certaines fonctions usuelles, ainsi que les règles opératoires sur les dérivées.

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Intervalle	f′
$x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	Tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -nx^{-n-1}$
$x \mapsto \sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto a\cos(ax+b)$
$x \mapsto \cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -a\sin(ax+b)$
$x \mapsto \tan(ax+b)$	Tout intervalle inclus dans l'ensemble de définition de f.	$x \mapsto a\left(1+\tan^2(ax+b)\right)$

Opérations sur les fonctions dérivables

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Intervalle	Fonction dérivée
$f+g$	I	$f'+g'$
af $(a \in \mathbb{R})$	I	af'
$f \times g$	I	$f' \times g + g' \times f$
$\dfrac{1}{f}$	Tout intervalle inclus dans $\{x \in I\ ;\ f(x) \neq 0\}$	$\dfrac{-f'}{f^2}$
$\dfrac{f}{g}$	Tout intervalle inclus dans $\{x \in I \text{ tel que } g(x) \neq 0\}$	$\dfrac{f'g - g'f}{g^2}$
f^n, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$	I	$nf'\,f^{n-1}$
$\dfrac{1}{f^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	Tout intervalle inclus dans $\{x \in I\ ;\ f(x) \neq 0\}$	$-nf'\,f^{-n-1}$

Activité 6

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la dérivée de la fonction f en précisant son ensemble de définition, ainsi que celui de sa dérivée.

$f : x \mapsto \left(2-x^3\right)^4$; $f : x \mapsto \cos x \sin^4 x$; $f : x \mapsto \dfrac{1+x^4}{x^2-1}$;

$f : x \mapsto \dfrac{1}{(x-2)^3}+\dfrac{2}{x}$; $f : x \mapsto \left(1+\tan^2 x\right)\tan^2 x$; $f : x \mapsto \dfrac{\tan^2 x}{\cos^2 x}$.

II. Dérivées successives

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

La dérivée f' de f est appelée la dérivée première de f.

Si la fonction f' est dérivable sur I, sa fonction dérivée est appelée dérivée seconde de f et notée $f^{(2)}$ ou f''.

Par itération, si la fonction $f^{(n-1)}$ $(n \geq 2)$ est dérivable sur I, sa fonction dérivée est appelée dérivée $n^{\text{ème}}$ de f et est notée $f^{(n)}$.

La dérivée $n^{\text{ème}}$ de f est aussi appelée dérivée d'ordre n de f.

Activité 1

Donner, dans chacun des cas ci-dessous, les dérivées d'ordre 1, 2, 3 et 4 de f.

1. $f : x \mapsto 2x^3-4x^2+x-1$. 2. $f : x \mapsto \sin x$. 3. $f : x \mapsto \cos x$.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

Calculer $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$ et $f^{(4)}(x)$, $x \in]1,+\infty[$.

III. Dérivabilité des fonctions composées

Activité 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin x^2$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x^2}$.
2. Vérifier que pour tout réel x non nul, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=x\dfrac{\sin x^2}{x^2}$.

   En déduire que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

Théorème (admis)

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a et g une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant $f(a)$.

Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$.

Corollaire

Si f est dérivable sur un intervalle I et g est dérivable sur un intervalle J contenant $f(I)$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'[f(x)]$, pour tout x de I.

Activité 2

Dans chacun des cas ci-dessous, montrer que la fonction est dérivable sur I et déterminer sa dérivée.

$f : x \mapsto \sin x^2$, $I = \mathbb{R}$. $g : x \mapsto 1 - \cos x^2$, $I = \mathbb{R}$. $h : x \mapsto \sin \frac{1}{x}$, $I =]-\infty, 0[$.

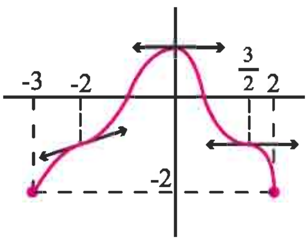
IV. Théorème des accroissements finis

Activité 1

Soit f une fonction définie sur $[-3,2]$ et dérivable sur $]-3,2[$.

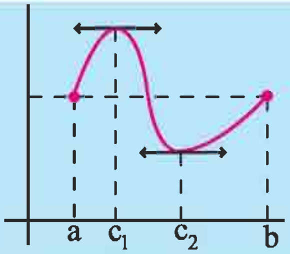
Dans la figure ci-contre on a représenté la courbe C_f de f, ainsi que les tangentes aux points d'abscisses -2, 0 et $\frac{3}{2}$.

Lire sur le graphique les abscisses des points de C_f en lesquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.



Théorème de Rolle

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.
Alors il existe un réel c de $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Si C_f est la représentation graphique de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, alors il existe au moins une tangente à C_f parallèle à l'axe des abscisses.

Démonstration

Si f est constante sur $[a, b]$, le résultat est immédiat.

Supposons f non constante sur $[a, b]$.

La fonction f étant continue sur $[a, b]$, elle est bornée et atteint ses bornes m et M.

Soit x_0 et x_1 tels que $m = f(x_0)$ et $M = f(x_1)$. Alors l'un des réels x_0 ou x_1 appartient à $]a, b[$, car f n'est pas constante sur $[a, b]$. On en déduit que $f'(x_0) = 0$ ou $f'(x_1) = 0$.

Le théorème en découle.

Activité 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x + 2$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.
2. En déduire que $\mathscr{C}$ admet au moins une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit A et B les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 3 et 1.

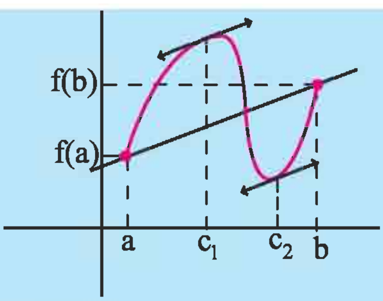
Existe-t-il des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite (AB) ?

Théorème des accroissements finis

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a, b]$.

Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe un réel c de $]a, b[$ tel que

$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.



Si C_f est la représentation graphique de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ alors il existe au moins une tangente à C_f parallèle à la droite (AB) où A et B sont les points de C_f d'abscisses respectives a et b.

Démonstration

Considérons la fonction g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.

D'après l'hypothèse faite sur f, la fonction g est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $g(a) = g(b)$.

On déduit du théorème de Rolle, l'existence d'un réel c de $]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.

Le théorème en découle.

Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = x^2\sqrt{x-1}$ et C_f sa courbe représentative.

Montrer que C_f admet au moins une tangente parallèle à la droite (AB), où A et B sont de coordonnées respectives (1, 0) et (2, 4).

V. Inégalité des accroissements finis

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ $(a < b)$ et dérivable sur $]a, b[$. Soit deux réels m et M.

Si $m \le f'(x) \le M$ pour tout x de $]a, b[$, alors $m(b-a) \le f(b) - f(a) \le M(b-a)$.

Démonstration

Le théorème des accroissements finis justifie l'existence d'un réel c de $]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

L'hypothèse faite sur f' permet de déduire que $m \le f'(c) \le M$. Ce qui implique que $m(b-a) \le f'(c)(b-a) \le M(b-a)$, car $b - a > 0$. Le théorème en découle.

Corollaire

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $M > 0$.

Si $|f'(x)| \le M$ pour tout x de I, alors $|f(b) - f(a)| \le M|b-a|$, pour tous réels a et b de I.

Activité 1

Soit $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sin x$

1. Montrer que $0 \le f'(x) \le 1$, pour tout réel x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. En déduire que $0 \le \sin t \le t$, pour tout réel t de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice résolu

Soit $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$.

2. Montrer que $\frac{1}{\sqrt{6}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$, pour tout réel x de $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$.

3. Montrer que $1+\frac{t}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{1+t} \leq 1+\frac{t}{2}$, pour tout réel t de $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$.

4. En déduire un encadrement de $\sqrt{1+10^{-10}}$.

Solution

1. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ est dérivable en tout réel x tel que $1+x>0$.

On en déduit que f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et par suite sur $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$.

2. Pour tout réel x de $[0,\ \frac{1}{2}]$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$.

Par ailleurs, $1 \leq \sqrt{1+x} \leq \sqrt{1.5}$ pour tout réel x de $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$.

On en déduit que $\frac{1}{2\sqrt{1.5}} \leq \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{2}$, ou encore que $\frac{1}{\sqrt{6}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$, pour x de $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$.

3. Soit $t \in \left]0,\ \frac{1}{2}\right]$. La fonction f étant dérivable sur $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$, elle est dérivable sur l'intervalle $[0,\ t]$.

Le théorème sur les inégalités des accroissements finis implique que

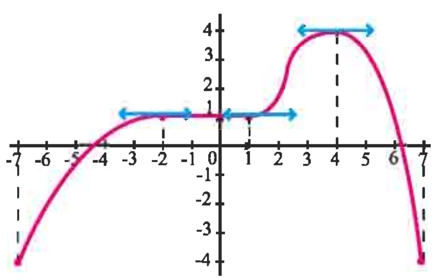
$\frac{1}{\sqrt{6}}t \leq f(t)-f(0) \leq \frac{1}{2}t$, ou encore que $1+\frac{t}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{1+t} \leq 1+\frac{t}{2}$, pour tout t de $\left]0,\ \frac{1}{2}\right]$.

La double inégalité est vraie pour $t=0$.

4. On déduit de ce qui précède que $1+\frac{10^{-10}}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{1+10^{-10}} \leq 1+\frac{10^{-10}}{2}$.

VI. Variations d'une fonction

Activité 1



Le graphique ci-contre représente une fonction f dérivable sur $[-7,\ 7]$.

1. Déterminer graphiquement les intervalles où f est strictement monotone.
2. Déterminer graphiquement le signe de $f'(x)$.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si la dérivée de f est strictement positive sur I, alors la fonction f est strictement croissante sur I.
Si la dérivée de f est strictement négative sur I, alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

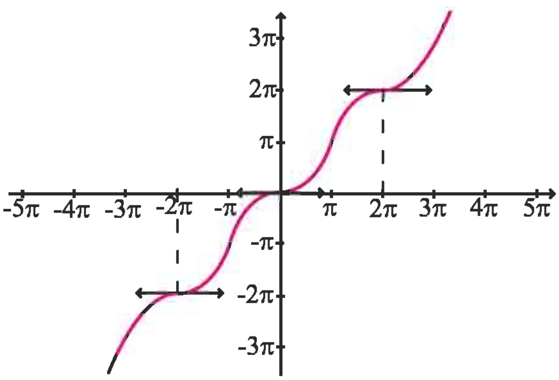
Démonstration

Supposons que $f'(x)>0$ pour tout x de I et considérons deux réels a et b de I tels que $a<b$.
La fonction f étant dérivable sur I, elle est dérivable sur $[a, b]$.
D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel c de $]a, b[$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$. On en déduit que $f(b)-f(a)>0$, car $f'(c)$ et $b-a$ sont strictement positifs. Ce qui prouve que f est strictement croissante sur I.
La deuxième propriété découle de la première en considérant la fonction –f.

Activité 2

On a représenté dans la figure ci-contre la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-\sin x$.

1. Déterminer graphiquement le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. a. Déterminer la fonction dérivée f'.
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x)=0$ et interpréter graphiquement le résultat.



Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si f' est positive et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert contenu dans I, alors f est strictement croissante sur I.
Si f' est négative et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert contenu dans I, alors f est strictement décroissante sur I.

Démonstration

De l'hypothèse $f'(x)\geq 0$ pour tout réel x de I, il résulte que la fonction f est croissante sur I.
Supposons qu'il existe deux réels a et b tels que $a<b$ et $f(a)=f(b)$. Il en résulte que $f(a)\leq f(x)\leq f(b)$, pour tout réel x de $]a, b[$. Par suite f est constante sur $[a, b]$ et $f'(x)=0$ pour tout x de $]a, b[$. Ce qui contredit l'hypothèse faite sur f'.
La deuxième propriété découle de la première en considérant la fonction –f.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

- Si f est croissante (respectivement strictement croissante) sur $]a, b[$ alors f est croissante (respectivement strictement croissante) sur $[a, b]$.
- Si f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur $]a, b[$ alors f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur $[a, b]$.

Démonstration

Soit $c < d$ deux réels de $[a, b]$. La fonction f étant continue sur $[c, d]$ et dérivable sur $]c, d[$, il existe un réel x_0 de $]c, d[$ tel que $f(d) - f(c) = (d - c)f'(x_0)$.

Le théorème en découle.

Activité 3

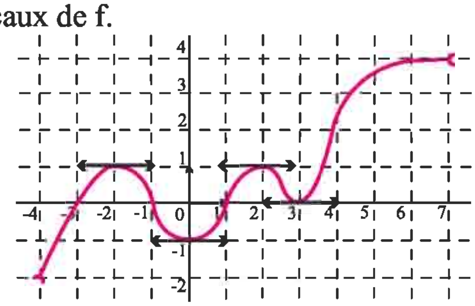
Etudier les variations de la fonction $x \mapsto \sqrt{1 - \sin x}$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

VII. Extrema

Activité 1

Dans la figure ci-dessous, on a représenté une fonction f définie sur $]-4, 7[$.

Déterminer graphiquement les extrema locaux de f.



Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.

On dit que f admet un maximum local en a, s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I tel que pour tout x de J, $f(x) \le f(a)$.

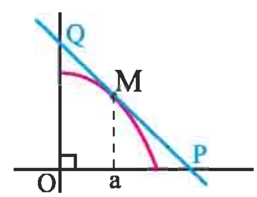
On dit que f admet un minimum local en a, s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I tel que pour tout x de J, $f(x) \ge f(a)$.

Lorsque f admet un minimum local ou un maximum local en a on dit que f admet un extremum local en a.

Activité 2

Dans la figure ci-contre on a représenté la restriction de la fonction $f : x \mapsto 1 - x^2$ sur $[0, 1]$ dans un repère orthonormé ainsi que la tangente en un point M d'abscisse a dans $]0, 1]$.

Déterminer le point M pour que l'aire du triangle OPQ soit minimale.



Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.

Si $f'(x)$ s'annule en a en changeant de signe alors f admet un extremum local en a.

VII. Point d'inflexion

Activité 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x+1$.

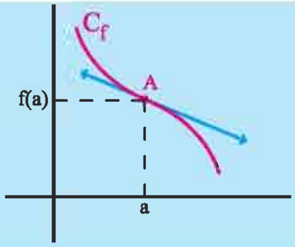
On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé.

1. Ecrire une équation de la tangente T à C_f en son point d'abscisse 0.
2. Etudier la position relative de C_f et T.
3. Etudier les variations de f puis tracer T et C_f.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et dérivable en un réel a de I et C_f sa courbe dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On dit que le point $A(a,f(a))$ est un point d'inflexion de C_f si C_f traverse sa tangente en ce point.



Théorème (admis)

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]a-h,\ a+h[$, $(h>0)$ et C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

Si la fonction dérivée seconde f'' de f s'annule en a en changeant de signe, alors le point $I(a,f(a))$ est un point d'inflexion de la courbe C_f.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4-6x^2+1$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Montrer que C_f admet deux points d'inflexion que l'on précisera.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x-\sin x$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier les variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$.
2. Déterminer les points d'inflexions de C_f sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. La fonction $x \mapsto \cos\left(\pi x^2\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est

☐ $x \mapsto 2\pi \sin\left(\pi x^2\right)$. ☐ $x \mapsto 2\pi x \sin\left(\pi x^2\right)$. ☐ $x \mapsto -2\pi x \sin\left(\pi x^2\right)$.

2. Soit f une fonction dérivable sur $[-2, 2]$ dont le tableau de variation de f' est le suivant.

x	-2		-1		0		1		2
f'	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{1}{4}$

• Alors

☐ $f(-2) < f(-1)$. ☐ $f(-1) < f(0)$. ☐ $f(0) < f(1)$.

• Dans un repère orthogonal, la courbe de f admet exactement deux tangentes parallèles à la droite d'équation

☐ $y = -\frac{1}{2}$. ☐ $y = \frac{1}{2}x$. ☐ $y = -\frac{1}{2}x$.

3. L'image de $[1, +\infty[$ par la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 1} - 1$ est

☐ $[0, +\infty[$. ☐ $[-1, +\infty[$. ☐ $]-\infty, 0]$.

4. La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{1}{20}x^5 - 4x^2$ admet un point d'inflexion d'abscisse

☐ $x = 0$. ☐ $x = -2$. ☐ $x = 2$.

5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$.

La courbe de f dans un repère orthogonal admet exactement

☐ deux tangentes horizontales. ☐ une tangente horizontale. ☐ aucune tangente horizontale.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Soit f une fonction dérivable sur $[-1, 2]$ telle que $f(-1) = 2$, $f(2) = -1$.

   Alors l'équation $f'(x) = -1$ admet au moins une solution dans $[-1, 2]$.

2. Si le produit de deux fonctions est dérivable en un réel a alors chacune des deux fonctions est dérivable en a.

3. Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \left(x^2 - x\right)(x - 2)$ admet exactement deux tangentes horizontales.

4. Soit f une fonction dérivable sur $[2, 5]$ telle que $|f'(t)| \le 2$ pour $t \in [2, 5]$.

   Alors $|f(5) - f(2)| \le 6$.

1 Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Dans chacun des cas ci-dessous justifier la dérivabilité de f en a et donner une équation de la tangente au point d'abscisse a.

1. $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$, $a=2$.
2. $x \mapsto 0.25x^4+0.5x^3-x$, $a=0$.
3. $x \mapsto \sqrt{x^2-4}$, $a=-3$.
4. $x \mapsto \sqrt{|2x+1|}$, $a=-1$.

2 En utilisant la définition de la dérivabilité en un réel, calculer les limites ci-dessous.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}\ ;\ \lim_{x\to 3}\frac{x-\sqrt{x-2}-2}{x-3}\ ;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^{195}-1}{x}\ ;\ \lim_{x\to 1}\frac{x^5+x^4+x^3+x^2-4}{x-1}.$$

3 Soit la fonction $f : x \mapsto |x^2-4|$.

1. Etudier la dérivabilité de f en 2 et en -2.
2. Construire, dans un repère orthonormé, les demi-tangentes à la courbe de f aux points d'abscisses 2 et -2

4 1. Donner une approximation affine de $\dfrac{1}{(1+h)^2}$ pour h voisin de 0.

2. En déduire une estimation des réels

$$\frac{1}{(1.0000000002)^2} \text{ et } \frac{1}{(0.9999999998)^2}.$$

5 Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I et déterminer sa fonction dérivée.

1. $f : x \mapsto 3x^{10}-\dfrac{5}{4}x^8+3x-10$, $I=\mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto (1-x-3x^3)(x+2x)^3$, $I=\mathbb{R}$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{1-x}$, $I=]1,\ +\infty[$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{(x+1)^3}{x^2}$, $I=[1,+\infty[$.
5. $f : x \mapsto \cos(3x)-\sin(2x)$, $I=\mathbb{R}$.
6. $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$, $I=]0,\pi]$.
7. $f : x \mapsto (1+\sin(2x))^3$, $I=\mathbb{R}$.
8. $f : x \mapsto \tan^2\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$, $I=[0,1[$.
9. $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, $I=]1,\ +\infty[$.
10. $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$, $I=]0,\ +\infty[$.

6 Soit les fonctions f et g définies par

$f(x)=x^3-3x$ et $g(x)=x-\dfrac{4}{x}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthonormé.

1. Montrer que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont deux points communs A et B.
2. Vérifier qu'en chacun de ces points les deux courbes admettent la même tangente. Donner une équation de ces tangentes.

7 Soit f la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x-1} & \text{si } x<-1,\\ x^2-1 & \text{si } -1\le x\le 1,\\ 2\sin(x-1) & \text{si } x>1.\end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f en -1 et en 1.
2. Etudier la dérivabilité de f en -1 et en 1.
3. Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,\ 1[$ et $]1,\ +\infty[$.

8 Déterminer, dans chacun des cas, les dérivées successives de la fonction f.

1. $f : x \mapsto x^5-2x^3+3x+4$.
2. $f : x \mapsto \cos x+\sin x$.
3. $f : x \mapsto \sin 2x$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}$, $x>1$.

9 Vérifier, dans chacun des cas suivants, que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I et déterminer sa dérivée.

2. $f : x \mapsto \sqrt{\sin x}$, $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

3. $f : x \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$, $I = [1, +\infty[$.

4. $f : x \mapsto \tan(\sin x)$, $I = \mathbb{R}$.

10 Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé.

1. Montrer que $\mathscr{C}$ admet deux tangentes parallèles à la droite d'équation $y = -3x$.

2. Calculer les coordonnées de chacun des points de contact et écrire une équation de chacune des tangentes en ces points.

11 On considère la fonction f définie sur $[1, 2]$ par $f(x) = x^3 - 3x + 2$ et on note $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé.

Soit A et B les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 1 et 2.

Déterminer les points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite (AB).

12 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

Sans calculer $f'(x)$, montrer que f' admet trois zéros distincts.

13 Soit la fonction $f : x \mapsto \tan x$.

1. Montrer que $1 \le f'(x) \le 2$, pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

2. En déduire que $x \le \tan x \le 2x$, pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

14 1. Montrer, à l'aide du théorème des inégalités des accroissements finis, que

$0 \le \sqrt{1+x} - 1 \le \frac{x}{2}$, $x \ge 0$.

2. En déduire que pour tout réel $x > 0$,

$x \le \sqrt{1 + x^2} \le x + \frac{1}{2x}$.

15 Montrer les inégalités ci-dessous.

a. $|\sin x| \le |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

b. $x \le \tan x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

c. $1 - x \le \cos x \le 1 + x$, $x \in [0, +\infty[$.

16 Soit la fonction $f : x \mapsto (x-1)\sqrt{1-x}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Etudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter.
3. Dresser le tableau de variation de f.

17 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que

$|f'(x)| \le \frac{1}{2}$, $x \ge 0$.

2. Montrer que pour tout $x \ge 0$,

$1 - \frac{x}{2} \le \frac{1}{\sqrt{1+x}} \le 1 + \frac{x}{2}$.

3. En déduire un encadrement de $\frac{1}{\sqrt{1+10^{-11}}}$.

18 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = x^3 - x$.

1. Etudier les variations de f.
2. Comparer les réels A et B dans chacun des cas suivants.

a. $A = 0.577350269^3 - 0.577350269$.

$B = 0.577350268^3 - 0.577350268$.

b. $A = 0.577350271^3 - 0.577350271$.

$B = 0.577350272^3 - 0.577350272$.

19 Pour chacune des fonctions ci-dessous, étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle I.

1. $f : x \mapsto \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$, $\quad I = [1, +\infty[$.
2. $g : x \mapsto \cos x - \sin x$, $\quad I = [0, \pi]$.
3. $h : x \mapsto \cos(\sin x)$, $\quad I = [0, \pi]$.

20 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 4\sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 3, \\ x^2 - 5x + c & \text{si } x < 3, \end{cases} \text{ où c est un réel.}$$

1. Déterminer le réel c pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$. Pour cette valeur de c, montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Préciser l'extremum de f.

21 Soit la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$. Que peut-on dire de la courbe de f au point d'abscisse 1?
3. a. Vérifier que f est impaire.
b. Dresser le tableau de variation de f
c. Préciser les extrema de f,
4. a. Déterminer la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
b. Montrer que l'origine du repère est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$.

22 Soit f la fonction définie par

$f(x) = x\sqrt{x} - \dfrac{3}{16}x^2$, $x > 0$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. a. Montrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que

$$f'(x) = \frac{12\sqrt{x} - 3x}{8}, \; x \geq 0.$$

b. Etudier les variations de f.
c. Existe-t-il un réel positif x tel que

$$x\sqrt{x} - \frac{3}{16}x^2 = 20 \;?$$

2. a. Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$.
b. Déterminer le point d'inflexion de la courbe de $\mathscr{C}$.

23 Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{x}}$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter.
3. a. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$.
b. Dresser le tableau de variation de f.

24 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}(4 + \sin x)$.

1. Montrer que $|f'(x)| \leq 0.5$, $x \in \mathbb{R}$.
2. a. Montrer que la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
b. Montrer que $\dfrac{3}{2} - x \leq g(x) \leq \dfrac{5}{2} - x$, pour tout réel x.
c. En déduire $\lim\limits_{+\infty} g$, $\lim\limits_{-\infty} g$, puis déterminer $g(\mathbb{R})$.
d. Montrer qu'il existe un unique réel a tel que $f(a) = a$ et vérifier que $\dfrac{2\pi}{3} < a < \dfrac{5\pi}{6}$.
3. Soit un réel u_0 et (u_n) la suite de premier terme u_0 et telle que $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout entier naturel n.
a. Montrer que $|u_{n+1} - a| \leq 0.5|u_n - a|$, pour tout entier naturel n.
b. En déduire que $|u_n - a| \leq (0.5)^n |u_0 - a|$, pour tout entier naturel n.
c. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.