Chapitre 1

Continuité et limites

C'est l'élaboration d'une démonstration précise du théorème des valeurs intermédiaires, qui amena Bolzano (1817) à définir la notion de continuité d'une fonction.
Le théorème des valeurs intermédiaires , qui semble géométriquement évident, a été utilisé sans scrupules par Euler et Gauss.
Bolzano, cependant estime qu'une démonstration précise est nécessaire pour atteindre une plus grande rigueur en Analyse.

(E.Haier et al, L'analyse au fil
de l'histoire , 2000).

Chapitre 1

Continuité et limites

I. Rappels

Dans ce paragraphe nous rappelons les principaux théorèmes vus en troisième année.

I.1 Continuité et limite en un réel

Activité 1

Dans chacun des cas suivants déterminer l'ensemble de définition de la fonction f et justifier la continuité de f en tout réel de son ensemble de définition.

$f : x \mapsto 1 - x + x^2$.

$f : x \mapsto x - \dfrac{1}{x-1}$.

$f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$.

$f : x \mapsto \left|\dfrac{-5x+1}{x^2+4}\right|$.

$f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+2x+3}$.

- Toute fonction polynôme est continue en tout réel.
- Toute fonction rationnelle est continue en tout réel de son ensemble de définition.
- Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont continues en tout réel.

Théorème

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

- Si f et g sont continues en a, alors les fonctions $f+g$ et $f \times g$ sont continues en a.
- Si f est continue en a, alors les fonctions $\alpha f \ (\alpha \in \mathbb{R})$, $|f|$ et $f^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$ sont continues en a.
- Si f est continue en a et $f(a) \neq 0$, alors les fonctions $\dfrac{1}{f}$ et $\dfrac{1}{f^n} \ (n \in \mathbb{N}^*)$ sont continues en a.
- Si f et g sont continues en a et $g(a) \neq 0$, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.
- Si f est positive sur I et f est continue en a, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en a.

Activité 2

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^2 - 4x + 2}{|x-1|}$.

1. Vérifier que pour tout réel $x \neq 1$, $f(x) = 2|x-1|$.
2. En déduire $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel a de I.
S'il existe une fonction g définie sur I, continue en a et telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \neq a$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g(a)$.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=x+\dfrac{\sin 2x}{x}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et déterminer son prolongement.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf en un réel a de I.
Si la fonction f admet une limite finie ℓ lorsque x tend vers a, alors la fonction g définie sur I par $g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\neq a,\\ \ell & \text{si } x=a.\end{cases}$ est continue en a.

Activité 4

Soit f la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{si } x\leq 1,\\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2x} & \text{si } x>1.\end{cases}$$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.
2. La fonction f est-elle continue en 1 ?

Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est continue en un réel a de I, si et seulement si, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$.

Activité 5

Soit la fonction $f: x\mapsto \dfrac{|x+1|}{x+1}$

La fonction f admet-elle une limite en -1 ?

I.2 Continuité sur un intervalle

Activité 6

Soit f la fonction définie sur $[0,\pi]$ par

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{x} & \text{si } x\in\,]0,\pi],\\ 3 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $[0,\pi]$.

- Une fonction est continue sur un intervalle ouvert I si elle est continue en tout réel de I.
- Une fonction est continue sur un intervalle $[a,b]$ si elle est continue sur $]a,b[$, à droite en a et à gauche en b.

De façon analogue, on définit la continuité de f sur les intervalles $[a,b[$, $]a,b]$, $[a,+\infty[$ et $]-\infty,a]$.

I.3 Opérations sur les limites

Soit L et L′ deux réels.
Les résultats qui suivent concernent les opérations sur les limites en un réel ou à l'infini.

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f+g)$
L	L'	$L+L'$
L	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	L'	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f\times g)$
L	L'	$L\times L'$
$+\infty$	$L'>0$	$+\infty$
$+\infty$	$L'<0$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\lim f$	$\lim \lvert f\rvert$	$\lim \sqrt{\lvert f\rvert}$
L	$\lvert L\rvert$	$\sqrt{\lvert L\rvert}$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

$\lim f$	$\lim g$	$\lim\left(\frac{f}{g}\right)$
L	$L'\neq 0$	$\frac{L}{L'}$
$+\infty$	$L'>0$	$+\infty$
$+\infty$	$L'<0$	$-\infty$
L	$+\infty$	0
L	$-\infty$	0
$L\neq 0$	0	∞ (On applique la règle des signes).

Les règles énoncées dans les tableaux précédents ne s'appliquent pas lorsqu'il s'agit d'étudier

* la limite de la somme de deux fonctions dont l'une tend vers $+\infty$ et l'autre tend vers $-\infty$.
* la limite du produit de deux fonctions dont l'une tend vers l'infini et l'autre tend vers 0.
* la limite du quotient de deux fonctions qui tendent toutes les deux vers l'infini ou toutes les deux vers 0.

Une transformation d'écriture adéquate pourra nous ramener à l'un des théorèmes résumés dans les tableaux ci-dessus.

Théorème

- La limite d'une fonction polynôme à l'infini est la même que celle de son terme de plus haut degré.
- La limite d'une fonction rationnelle à l'infini est la même que celle du quotient des termes de plus haut degré.

Activité 7

Déterminer les limites ci-dessous.

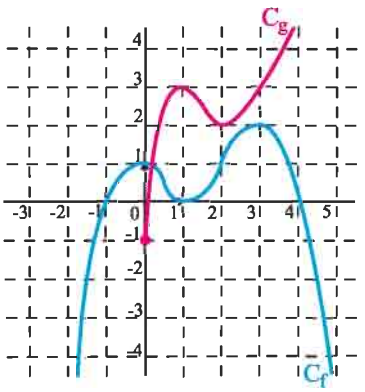
1. $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+\dfrac{1}{x^2+1}$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{-5x+1}-3x$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-x^2-x\right)^2+\sqrt{2}\,x$.
4. $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{1}{\lvert x-2\rvert^3}-\dfrac{1}{\lvert x-2\rvert}$.
5. $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{3}{(x-3)^2}-2$.
6. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3-3x^2+2x}{x^2-1}$.
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}-x$.

II. Continuité et limite d'une fonction composée

II.1 Composée de deux fonctions

Activité 1

Dans la figure ci-contre C_f et C_g sont les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+$.



1. Lire sur le graphique les images par f des réels -1, 0, 1, 2 et 3, ainsi que les images par g des réels 0, 1, 2, et 3.
2. Soit les fonctions $h : x \mapsto g\big(f(x)\big)$ et $k : x \mapsto f\big(g(x)\big)$.
   a. Déterminer les images par h des réels -1, 0, 1, 2 et 3.
   b. Déterminer les images par k des réels 0, 1, 2 et 3.

Définition

Soit u une fonction définie sur un ensemble I et v une fonction définie sur un ensemble J tel que $u(I)$ est inclus dans J.

La fonction notée $v \circ u$, définie sur I par $v \circ u(x) = v\big(u(x)\big)$, est appelée fonction composée de u et v.

Activité 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer deux fonctions u et v telles que $f = v \circ u$.

1. $f : x \mapsto \cos(\pi x + 1)$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{1+\cos x}{2+\cos x}$.
3. $f : x \mapsto \sin\left(\dfrac{x+x^4}{x^2+1}\right)$

II. 2 Continuité d'une fonction composée

Théorème (admis)

Soit u une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a et v une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant le réel $u(a)$.

Si u est continue en a et v est continue en $u(a)$, alors la fonction $v \circ u$ est continue en a.

Corollaire

La composée de deux fonctions continues est continue.

Activité 3

Etudier dans chaque cas la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

1. $f : x \mapsto \sin\left(x^2 + \dfrac{\pi}{4}\right)$.
2. $f : x \mapsto \cos(\sin x)$.

II. 3 Limite d'une fonction composée

Théorème (admis)

Soit u et v deux fonctions. Soit a, b et c finis ou infinis.

Si $\lim\limits_{x\to a} u(x)=b$ et $\lim\limits_{x\to b} v(x)=c$ alors $\lim\limits_{x\to a} v\circ u(x)=c$.

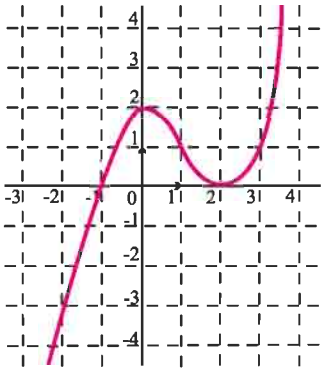
Activité 4

Déterminer dans chaque cas la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a.

1. $f:x\mapsto \tan\dfrac{x^2}{4}$, $a=\sqrt{\pi}$. 2. $f:x\mapsto \dfrac{\cos x^2-1}{x^2}$, $a=0$. 3. $f:x\mapsto \sin\left(\dfrac{\pi}{x-1}\right)$, $a=2$.

Activité 5

Dans la figure ci-contre est représentée une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



Déterminer $\lim\limits_{x\to 2} f\left(\dfrac{2}{x}\right)$, $\lim\limits_{x\to 4} f\left(\dfrac{x-4}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(\sin x-1)$.

Exercice résolu 1

Soit la fonction $f:x\mapsto \cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)-\dfrac{1}{x^2}$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Solution

Soit les fonctions $v:x\mapsto \cos x-x$ et $u:x\mapsto \dfrac{1}{x^2}$ de sorte que $f:x\mapsto (v\circ u)(x)$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\cos x-x=1$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

Activité 6

Déterminer $\lim\limits_{x\to 1^+}\tan\left(\dfrac{\pi}{2x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-1}\sin\left(\dfrac{\pi x}{2x-1}\right)$.

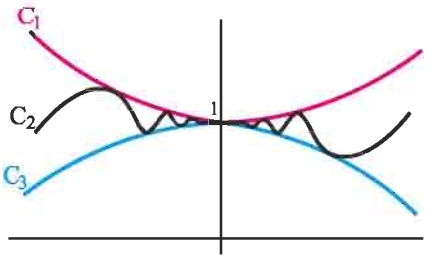
III. Limites et ordre

Activité 1

Soit f, g et h les fonctions définies par $f(x)=x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)+1$, $g(x)=-x^2+1$ et $h(x)=x^2+1$.

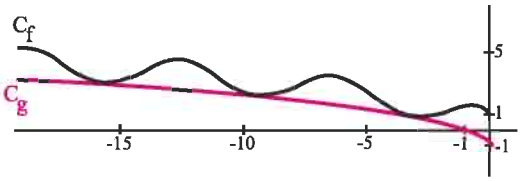
1. Montrer que pour tout réel non nul x, $g(x)\le f(x)\le h(x)$.

2. Dans la figure ci-contre on a représenté les trois fonctions f, g et h.
   a. Identifier la courbe de chacune de ces fonctions.
   b. Que peut-on conjecturer sur la limite de f(x) lorsque x tend vers 0 ?



Activité 2

Dans la figure ci-contre on a représenté les fonctions f et g définies par $f(x)=\sqrt{-x}+\cos x$ et $g(x)=\sqrt{-x}-1$



1. Etudier la position relative de C_f et C_g.

2. Que peut-on conjecturer sur la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$?

Les résultats énoncés ci-dessous permettent de déterminer la limite d'une fonction par comparaison avec les limites d'autres fonctions.

Théorème (admis)

Soit f, u et v trois fonctions définies sur un intervalle I sauf peut-être en un réel a de I.
Soit deux réels ℓ et ℓ'.

- Si $u(x)\le v(x)$ pour tout $x\neq a$ et si $\lim\limits_{a} u=\ell$ et $\lim\limits_{a} v=\ell'$, alors $\ell\le\ell'$.
- Si $u(x)\le f(x)\le v(x)$ pour tout $x\neq a$ et si $\lim\limits_{a} u=\lim\limits_{a} v=\ell$, alors $\lim\limits_{a} f=\ell$.
- Si $v(x)\ge u(x)$ pour tout $x\neq a$ et si $\lim\limits_{a} u=+\infty$, alors $\lim\limits_{a} v=+\infty$.
- Si $v(x)\le u(x)$ pour tout $x\neq a$ et si $\lim\limits_{a} u=-\infty$, alors $\lim\limits_{a} v=-\infty$.

Les résultats énoncés ci-dessus restent valables lorsque l'on considère des limites à l'infini, à droite en a ou à gauche en a.

Exercice résolu 2

Soit la fonction $f: x\mapsto \dfrac{\cos^2 x+1}{x}$. Déterminer $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{-\infty} f$.

Solution

On sait que $0\le\cos^2 x\le 1$, pour tout réel x et alors $1\le\cos^2 x+1\le 2$.

Il en résulte que $\dfrac{1}{x}\le\dfrac{\cos^2 x+1}{x}\le\dfrac{2}{x}$ pour tout $x>0$

et $\dfrac{2}{x}\le\dfrac{\cos^2 x+1}{x}\le\dfrac{1}{x}$ pour tout $x<0$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$. On en déduit que $\lim\limits_{+\infty} f=0$.

On montre de même que $\lim\limits_{-\infty} f=0$.

Activité 3

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2} + \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$.

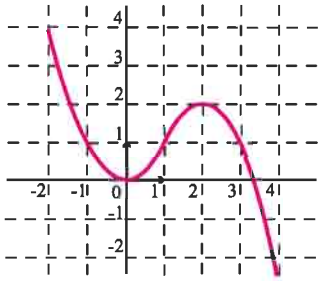
1. Montrer que $f(x) \geq \frac{1}{x^2}$, $x \in \mathbb{R}^*$.
2. Etudier la limite de f en 0.

IV. Image d'un intervalle par une fonction continue

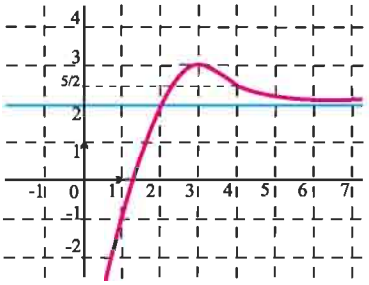
IV. 1 Théorème des valeurs intermédiaires

Activité 1

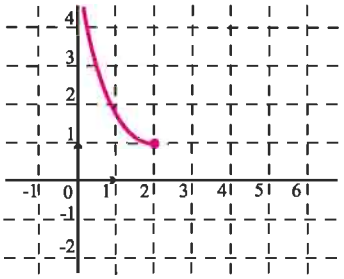
Dans chacun des cas suivants, déterminer graphiquement l'image $f(I)$ de l'intervalle I.



$I =]-1,3[$



$I = [1,4]$



$I =]0,2]$

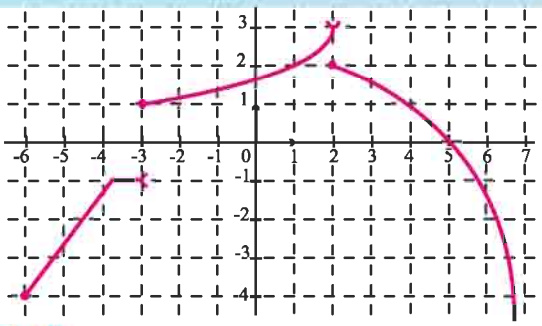
Théorème (Rappel)

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Activité 2

Le graphique ci-contre représente une fonction g définie sur $[-6,+\infty[$.

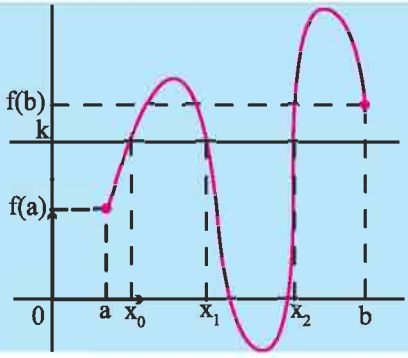
Déterminer $g([-6,4])$ et $g([-3,5])$.



Théorème des valeurs intermédiaires (Rappel)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = k$ possède au moins une solution dans l'intervalle $[a,b]$.

En particulier, si $f(a).f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a,b[$.



Activité 3

Montrer que les fonctions ci-dessous sont strictement monotones sur I.

$x \mapsto x^2$, $I = \mathbb{R}_+$;

$x \mapsto \dfrac{x+2}{x+1}$, $I =]-1, +\infty[$;

$x \mapsto (1+x)^{20}$, $I = [0, 4]$.

Une fonction f est strictement croissante sur un intervalle I si pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, $f(a) < f(b)$.

Une fonction f est strictement décroissante sur un intervalle I si pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, $f(a) > f(b)$.

Une fonction est strictement monotone sur un intervalle I, si elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.

Théorème

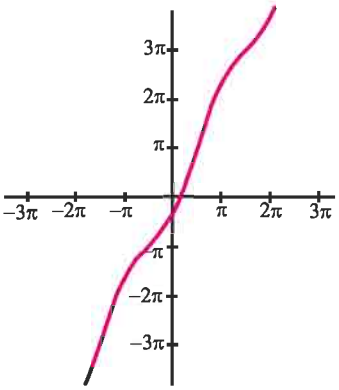
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.
Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a, b]$.

Démonstration

Elle découle du théorème des valeurs intermédiaires et de la stricte monotonie de f.

Activité 4

Le graphique ci-contre représente la fonction
$f : x \mapsto 2x - \cos x$



1. Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

2. a. Montrer que f est strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

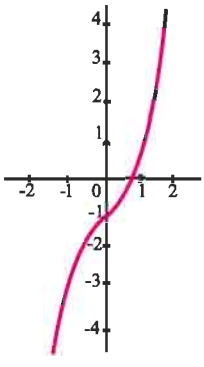
   b. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{\pi}{6}$ admet une solution unique α dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

3. a. Lequel des intervalles $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ et $\left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ contient la solution α ?

   b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude $\dfrac{\pi}{8}$.

Activité 5

La courbe représentée ci-contre est celle de la fonction $f : x \mapsto x^3 + x - 1$.



I. 1. Donner l'ensemble de définition de f.

2. Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0, 1]$.

4. On se propose de trouver un encadrement de plus en plus précis de α, en divisant à chaque fois l'intervalle contenant α en deux intervalles de même amplitude.
(Ce procédé est appelé « méthode de dichotomie »).

a. Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et en déduire que α appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

b. Calculer $f\left(\frac{3}{4}\right)$ et en déduire que α appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$.

c. Poursuivre le procédé pour déduire un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

d. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

II. Avec l'ordinateur

Pour réaliser la feuille de calcul ci-contre avec le tableur Excel,

- dans les cellules A1, B1, C1, D1, E1 et F1 taper respectivement a, b, $(a+b)/2$, $f(a)$, $f(b)$ et $f((a+b)/2)$;
- dans la cellule A2, taper 0 ; dans la cellule B2, taper 1 (encadrement initial) ;
- dans la cellule C2, taper $=(A2+B2)/2$; dans la cellule D2, taper $=PUISSANCE(A2;3)+A2-1$ et recopier vers la droite en E2 et F2 ;
- dans la cellule A3, taper $=SI(F2*E2>0;A2;C2)$ et dans la cellule B3, taper $=SI(F2*E2>0;C2;B2)$;

	A	B	C	D	E	F
1	a	b	(a+b)/2	f(a)	f(b)	f((a+b)/2)
2	0	1	0,5	-1	1	-0,375
3	0,5	1	0,75	-0,375	1	0,171875
4	0,5	0,75	0,625	-0,375	0,171875	-0,13085938
5	0,625	0,75	0,6875	-0,13085938	0,171875	0,01245117
6	0,625	0,6875	0,65625	-0,13085938	0,01245117	-0,06112671
7	0,65625	0,6875	0,671875	-0,06112671	0,01245117	-0,02482986
8	0,671875	0,6875	0,6796875	-0,02482986	0,01245117	-0,0063138
9	0,6796875	0,6875	0,68359375	-0,0063138	0,01245117	0,00303739
10	0,6796875	0,68359375	0,68164063	-0,0063138	0,00303739	-0,001646
11	0,68164063	0,68359375	0,68261719	-0,001646	0,00303739	0,00069374
12	0,68164063	0,68261719	0,68212891	-0,001646	0,00069374	-0,00047662
13	0,68212891	0,68261719	0,68237305	-0,00047662	0,00069374	0,00010844
14	0,68212891	0,68237305	0,68225098	-0,00047662	0,00010844	-0,00018412

Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Si la fonction f ne s'annule en aucun point de I alors elle garde un signe constant sur I.

Démonstration

Supposons que f change de signe sur I.

Il existe alors deux réels α et β $(\alpha<\beta)$ de I tels que $f(\alpha).f(\beta)<0$

La fonction f étant continue sur $[\alpha,\beta]$, l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans $[\alpha,\beta]$. Ce qui contredit l'hypothèse « f ne s'annule en aucun point de I ».

Activité 6

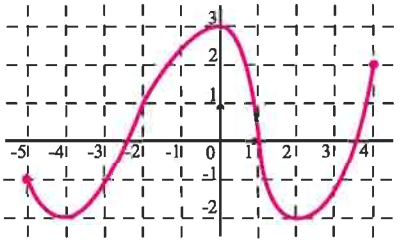
1. Montrer que pour tout $x \neq 1$, $1+x+x^2+x^3+x^4 = \dfrac{x^5-1}{x-1}$.

2. En déduire que la fonction $f : x \mapsto 1+x+x^2+x^3+x^4$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$.

IV. 2 Image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue

Activité 7

On a représenté ci-contre la courbe d'une fonction f définie sur $[-5,4]$.



1. Déterminer $f([-5,4])$.

2. a. Déterminer le minimum m et le maximum M de f sur $[-5,4]$.

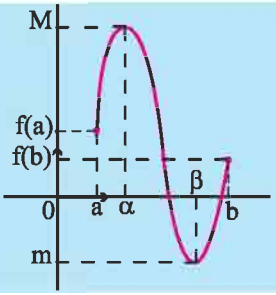
   b. Résoudre graphiquement chacune des équations $f(x) = m$ et $f(x) = M$.

Théorème

L'image d'un intervalle fermé borné $[a,b]$ par une fonction continue est un intervalle fermé borné $[m,M]$.

Le réel m est le minimum de f sur $[a,b]$.

Le réel M est le maximum de f sur $[a,b]$.



Exercice résolu 3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + x$.

Déterminer $f([0.6, 1])$, $f([-1, -0.6])$.

Solution

Si $0.6 \leq x \leq 1$ alors $0.216 \leq x^3 \leq 1$. On en déduit que $0.672 \leq f(x) \leq \dfrac{4}{3}$, $0.6 \leq x \leq 1$.

De plus $f(0.6) = 0.672$ et $f(1) = \dfrac{4}{3}$, il vient alors $f([0.6, 1]) = \left[0.672, \dfrac{4}{3}\right]$.

On vérifie facilement que la fonction f est impaire.

Par suite, $f([-1, -0.6]) = \left[-\dfrac{4}{3}, -0.672\right]$.

Activité 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin^2 x$.

1. Déterminer le minimum et le maximum de f sur $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$.

2. En déduire $f\left(\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]\right)$.

V. Image d'un intervalle par une fonction strictement monotone

Théorème (admis)

Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a,b[$ (b fini ou infini).

- Si la fonction f est croissante et majorée alors f possède une limite finie en b.
- Si la fonction f est croissante et non majorée alors f tend vers $+\infty$ en b.
- Si la fonction f est décroissante et minorée alors f possède une limite finie en b.
- Si la fonction f est décroissante et non minorée alors f tend vers $-\infty$ en b.

Activité 1

Soit f une fonction définie et croissante sur $\mathbb{R}_+$ telle que pour tout entier naturel n, $f(n)=n+1$.

1. Soit a un réel positif. Montrer que $f(E(a))\geq a$. ($E(a)$ désigne la partie entière de a).

2. Etudier la limite de f en $+\infty$.

Théorème (admis)

L'image d'un intervalle I par une fonction continue et strictement monotone sur I est un intervalle de même nature.

Exemples

Intervalle I	Si f est strictement croissante sur I	Si f est strictement décroissante sur I
$I=[a,b]$	$f(I)=[f(a),f(b)]$	$f(I)=[f(b),f(a)]$
$I=[a,b[\ (a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R})$	$f(I)=[f(a),\lim\limits_{b^-}f[$	$f(I)=]\lim\limits_{b^-}f,f(a)]$
$I=[a,+\infty[\ (a\in\mathbb{R})$	$f(I)=[f(a),\lim\limits_{+\infty}f[$	$f(I)=]\lim\limits_{+\infty}f,f(a)]$
$I=]a,b[\ (a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R})$	$f(I)=]\lim\limits_{a^+}f,\lim\limits_{b^-}f[$	$f(I)=]\lim\limits_{b^-}f,\lim\limits_{a^+}f[$

Exercice résolu 4

Déterminer l'image de l'intervalle I par la fonction f dans chacun des cas ci-dessous.

1. $f : x \mapsto x^2 - 2x, \quad I =]-\infty, 0]$.

2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}, \quad I = [1, +\infty[$.

3. $f : x \mapsto \sin x, \quad I = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Solution

1. La fonction $f : x \mapsto x^2 - 2x$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Il en résulte que $f(]-\infty, 0]) = [0, +\infty[$.

2. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Il en résulte que $f([1, +\infty[) =]0, 1]$.

3. La fonction $f : x \mapsto \sin x$ est croissante sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = 1$.

Il en résulte que $f\left(\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\right) =]0, 1[$.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Si $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - f(x)$ alors $\lim\limits_{+\infty} g$ est égale à

☐ $+\infty$. ☐ n'existe pas. ☐ $-\infty$.

2. Si f est une fonction continue et décroissante sur $[2, 5]$ et si $f([2, 5]) = [1, 3]$ alors

☐ $f(2) = 3$ et $f(5) = 1$. ☐ $f(2) = 1$ et $f(5) = 3$. ☐ $1 < f(2) < 3$.

3. Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[-2, 5]$ tel que $f(-2) = 3$ et $f(5) = -2$ alors l'équation $f(x) = -1$

☐ n'admet pas de solution dans $[-2, 5]$. ☐ admet au moins une solution dans $[-2, 5]$. ☐ admet exactement une solution dans $[-2, 5]$.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Si f est une fonction paire et si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
2. Toute fonction croissante sur $\mathbb{R}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
3. Si une fonction admet une limite finie en $-\infty$ et une limite finie en $+\infty$ alors elle est bornée.
4. Si une fonction f n'est pas définie en a alors nécessairement la droite $\Delta : x = a$ est une asymptote verticale à C_f.
5. Soit f, g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$, telles que pour tout réel x,

   $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.

   Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 3$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 5$ alors f admet une limite finie en $+\infty$.

1 Dans chacun des cas suivants, donner l'ensemble de définition de la fonction f et justifier la continuité de f en tout réel de cet ensemble.

$x \mapsto |x^2 - x - 3|$; $x \mapsto x + 1 + \sqrt{x^2 + 1}$;

$x \mapsto \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$; $x \mapsto (|x+1| - 2)^5$; $x \mapsto \dfrac{3x^2 - |x|}{x^2 + 4}$;

$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x + 1}$; $x \mapsto \dfrac{\cos x - 1}{\sin x - 1}$.

2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x < -1, \\ 2x^2 + x & \text{si } x \geq -1. \end{cases}$$

1. Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Montrer que f est continue sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$.
3. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
4. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de chacune des équations ci-dessous.

$f(x) = -3$; $f(x) = -1$; $f(x) = 0.5$; $f(x) = 1$; $f(x) = 4$.

3 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & \text{si } x \geq -2, \\ \dfrac{2x^2 - |x^3|}{x+2} & \text{si } x < -2. \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f en -2.
2. Etudier la continuité de f sur $]-\infty, -2[$ et sur $[-2, +\infty[$.
3. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

4 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[, \\ \dfrac{1 - x^3}{1 - x^2} & \text{si } -1 < x < 1. \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f à gauche et à droite en -1.
2. Etudier la continuité de f sur chacun des intervalles $]-\infty, -1]$, $]-1, 1[$ et $[1, +\infty[$.

5 Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}{x - 2}$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.
3. La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en 2.

6 Dire dans chacun des cas suivants, si la fonction f admet un prolongement par continuité en a.

1. $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|}$, $a = 0$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$, $a = -1$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{\sin x + 3x}{x}$, $a = 0$.

7 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x(x^2 - x - 2)}{|x|(x-2)} & \text{si } x \neq 2 \text{ et } x \neq 0, \\ 3 \quad \text{si } x = 2, \quad 2 \quad \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en 0 ?
2. La fonction f est-elle continue en 2 ?

8 Soit la fonction f telle que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x||x-2|}{x(x^2 - x - 2)} & \text{si } x \neq 2, \\ \dfrac{1}{3} & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Etudier les limites de f en -1 , $+\infty$ et $-\infty$.
3. La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en 0 ?

9 Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-2}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-2}{x-1}$.

2. $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{-2x^3}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{-2x^3}{x^2-1}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-3}{x^2-3x+2}$; $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-3}{x^2-3x+2}$.

4. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

10 Dans chacun des cas suivants, déterminer le prolongement par continuité de la fonction f en x_0.

1. $f:x\mapsto\dfrac{x^3+3x^2-2x-4}{x+1}$, $x_0=-1$.

2. $f:x\mapsto\dfrac{1-\sqrt{2}\cos x}{4x-\pi}$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

3. $f:x\mapsto\dfrac{\cos(4x)-1}{x^2}$, $x_0=0$.

11 Dans chacun des cas suivants, étudier la limite de la fonction f.

1. $f:x\mapsto\cos\left(\dfrac{\pi x+1}{x}\right)$ en $-\infty$.

2. $f:x\mapsto\sin\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)$ en $+\infty$.

3. $f:x\mapsto\dfrac{\sin\left(x^2\right)}{x}$ en 0^+.

12 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(\sin x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(1-\cos x)$.

13 Dans chacun des cas suivants, à l'aide des théorèmes de comparaison, étudier la limite en 0 de f.

1. $f:x\mapsto x\sin\left(\dfrac{2}{x}\right)$.

2. $f:x\mapsto 1+x^2\sin\left(\dfrac{2}{x}\right)$.

3. $f:x\mapsto\dfrac{1}{x}+\sin\left(\dfrac{2}{x}\right)$.

14 Dans chacun des cas suivants, à l'aide des théorèmes de comparaison, étudier les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction f.

1. $f:x\mapsto\dfrac{1+\cos x}{x}$.

2. $f:x\mapsto\dfrac{1+\cos x}{\sqrt{|x|}}$.

3. $f:x\mapsto\dfrac{x+x\cos x}{x^4+x^2+3}$.

15 1. Montrer que pour tout réel x, $\dfrac{1}{3}\le\dfrac{1}{2-\sin x}\le 1$.

2. En déduire le comportement en $+\infty$ des fonctions $x\mapsto\dfrac{x}{2-\sin x}$ et $x\mapsto\dfrac{x+\sin x}{2-\sin x}$.

16 Soit la fonction $f:x\mapsto\dfrac{x\cos x}{x^2+1}$.

1. Trouver un réel $M>0$ tel que $|xf(x)|\le M$, pour tout réel x.

2. En déduire le comportement de f en $-\infty$ et $+\infty$.

17 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}\left(2-\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

1. a. Montrer que pour tout $x>0$, $f(x)\ge\dfrac{1}{x}$.

b. En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

2. a. Montrer que pour tout $x<0$, $f(x)\le\dfrac{1}{x}$.

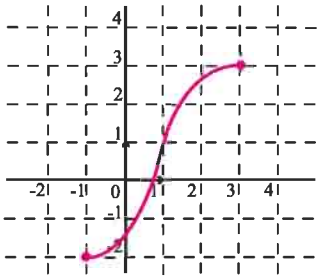
b. En déduire $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

18 Dans chacun des cas suivants, déterminer l'image de l'intervalle I par la fonction f.

1. $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-2}$, $I =]2, +\infty[$.
2. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x}$, $I =]-\infty, 0]$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$, $I = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
4. $f : x \mapsto \tan(\pi x)$, $I = \left]-\dfrac{1}{2}, 0\right]$.

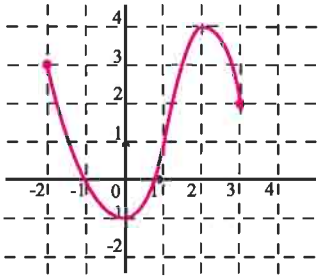
19 Dans chacun des cas ci-dessous donner $f(I)$.

1.



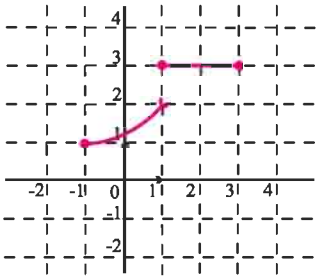
$I = [-1, 3]$

2.



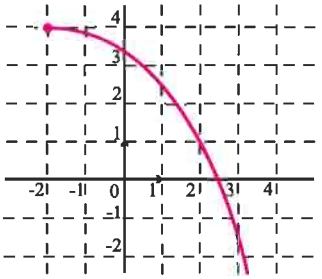
$I = [-2, 3]$

3.



$I = [-1, 3]$

4.



$I = [-2, 2[$

20 Dans chacun des cas suivants, tracer la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et donner $f(I)$.

1. $f : x \mapsto -x+3$, $I = [1,4]$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $I =]-\infty, 0[$.
3. $f : x \mapsto x^2+1$, $I =]-1,2]$.

21 Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 + 10x - 1$.

1. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution a dans $[0, 1]$.

b. Donner une valeur approchée de a à 10^{-1} près.

22 Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + x + 1$.

1. Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe dans un repère orthogonal.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution a dans $[-1, 0]$.

3. Donner une valeur approchée de a à 10^{-1} près.

23 Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 - 12x + 1$.

1. Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe dans un repère orthogonal.
2. Vérifier graphiquement que la courbe de f coupe l'axe des abscisses en trois points M_1, M_2 et M_3 dont les abscisses seront notées x_1, x_2, et x_3, avec $x_1 < x_2 < x_3$.
2. Montrer que x_1 appartient à $]-4,-3[$.

3. Donner pour x_2, et x_3 un encadrement par deux entiers consécutifs.
4. Discuter suivant les valeurs du réel k, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.
5. Donner le nombre de solutions de l'équation $|f(x)| = 1$.

24 1. On considère la fonction

$h : x \mapsto \sqrt{x} - \frac{1}{x} - 1$.

a. Montrer que h est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

b. Déterminer $h(]0, +\infty[)$.

c. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet dans $[2, 3]$ une unique solution α.

d. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

2. Représenter dans un repère orthogonal, les fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par

$f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \frac{1}{x} + 1$.

25 On considère la fonction $f : x \mapsto \cos x - x$.

1. Montrer que f est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique a dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Donner une valeur approchée de a à 10^{-1} près.

26 Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$.

On pose $g(x) = f(x) - x$.

1. Quel est le signe de $g(0)g(1)$?

2. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[0,1]$.

Application

Montrer que l'équation $\cos\frac{\pi}{2}x = x$ admet au moins une solution dans $[0, 1]$.