Chapitre 6

Les algorithmes d'approximation

Objectifs

Acquérir des habilités de résolution de problèmes à travers l'apprentissage d'algorithmes d'approximation

Plan du chapitre

Ce document PDF a été édité via **Icecream PDF Editor**.
Passez à la version PRO pour retirer le filigrane.

Chapitre 6

Les algorithmes d'approximation

I. Introduction

La résolution exacte de la plupart des problèmes d'optimisation naturels impliquerait un temps de calcul prohibitif. Caractériser la difficulté de l'approximation de ces problèmes par des algorithmes de temps polynomial est donc un sujet d'étude inévitable en informatique et en mathématiques.

Depuis des décennies, les chercheurs essaient de concevoir des algorithmes d'approximation qui fournissent, en temps polynomial, des solutions «quasi-optimales» dont l'écart à l'optimum peut être borné supérieurement. Depuis quinze ans, ces chercheurs ont décrit de nouvelles techniques, basées sur l'arrondissement des valeurs de programmes linéaires, la programmation semi-définie et le plongement des espaces métriques.

Ils ont aussi montré qu'il était difficile de trouver des solutions approchées de certains problèmes.

Les problèmes d'optimisation forment donc un ensemble très riche de possibilités : de la possibilité d'approcher avec une précision arbitraire, à l'impossibilité de toute garantie sur la qualité de l'approximation.

II. Recherche du point fixe d'une fonction

Présentation :

En mathématiques, pour une application f d'un ensemble E, un élément x de E est un point fixe de f si f(**x**) **= x**.

Exemples :

- Dans le plan, la symétrie par rapport à un point A admet un unique point fixe : A
- L'application inverse (définie sur l'ensemble des réels non nuls) admet deux points fixes : -1 et 1

Toutes les fonctions n'ont pas nécessairement de point fixe; par exemple, la fonction f telle que f(x) = x + 1 n'en possède pas, car il n'existe aucun nombre réel x égal à x+1.

Dans la suite de ce paragraphe, nous allons établir des algorithmes permettant de calculer une valeur approchée du point fixe d'une fonction.

Soit la suite réelle (U_n) récurrente et définie par sa valeur initiale U_0 et par la relation de récurrence $U_{n+1} = f(U_n)$. Dans le cas où (U_n) converge, elle le fait nécessairement vers **un point fixe** de f.

Ce document PDF a été édité via **Icecream PDF Editor**.
Passez à la version PRO pour retirer le filigrane.

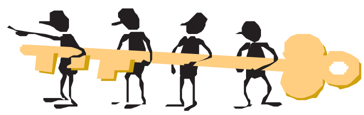
Activité 1

Nous voulons résoudre l'équation sin(x) = 1-x

a) Proposez une analyse modulaire au problème,

b) Déduisez les algorithmes correspondants,

c) Traduisez et testez la solution obtenue. Enregistrez votre programme sous le nom **Pt_fixe**



a) Analyse du problème

Résultat : Ecrire ("Le point fixe est : ", xact, " trouvé après ", i, " itérations. ")

Traitement : xact représente le $i^{ème}$ terme de la suite. En effet, l'équation sin(x) = 1-x équivaut à 1-sin(x) = x, et donc l'application f est représentée comme suit : f(x) = 1-sin(x).

xact ← 1 {choix arbitraire}
i ← 0
Répéter
  xpre ← xact
  xact ← f(xact)
  i ← i + 1
Jusqu'à (Abs (xact-xpre) < Epsilon)

b) Algorithme du programme principal et codification des objets

0) Début Pt_Fixe
1) i ← 0, xact ← 1
  Répéter
    xpre ← xact
    xact ← f(xact)
    i ← i + 1
  Jusqu'à (Abs (xact-xpre) < Epsilon)
2) Ecrire ("Le point fixe est : ", xact, " trouvé après ", i, " itérations. ")
3) Fin Pt_Fixe

Tableau de codification des objets globaux

Objets	Type / Nature	Rôle
Epsilon	Constante = 10^{-5}	Différence entre deux termes consécutifs
i	Entier non signé	Nombre d'itérations
xact, xpre	Réel	Deux termes consécutifs de f
f	Fonction	Retourne la valeur de 1-sin(x)

Ce document PDF a été édité via **Icecream PDF Editor**.
Passez à la version PRO pour retirer le filigrane.

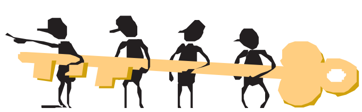
c) Traduction en Pascal

```
Program Pt_Fixe;
Uses Crt;
Const Epsilon = 1E-5;
Var
   i : word; xact, xpre : real;
   Function f (x : Real) : Real;
   Begin
          f := 1 - sin (x);
   End;
{Programme Principal}
Begin
  i := 0;
  xact := 1;
  Repeat
    xpre := xact;
    xact := f(xact);
    i := i + 1;
  Until (abs(xact-xpre) < Epsilon);
  Write ('Le point fixe est : ',xact:10:6,' trouvé après', i, ' itérations. ');
End.
```

III- Calcul de valeurs approchées de constantes connues

Activité 2

Citez quelques constantes numériques ? Donnez leurs valeurs respectives ?



e	2,718...	Le nombre de neper
π	3,1416...	Le nombre π
g	9, 80665	L'accélération normale de la pesanteur

Dans la suite, nous allons présenter des algorithmes permettant de calculer des valeurs approchées pour les constantes **π** et **e**.

Ce document PDF a été édité via **Icecream PDF Editor**.
Passez à la version PRO pour retirer le filigrane.

1) Valeur approchée de π :

a) Présentation :

Le nombre π n'est pas égal à 3,14 qui n'est qu'une approximation de π et cette approximation est suffisante pour les calculs les plus courants.

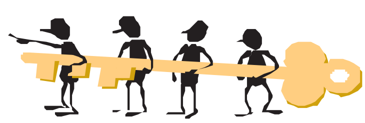
Beaucoup de techniques existent pour établir des valeurs approchées du nombre π. Dans l'Histoire, la première de ces méthodes est attribuée à Archimède. Elle consiste à encadrer le périmètre d'un cercle par ceux de deux polygones réguliers, le premier inscrit et le deuxième circonscrit au cercle. Ce sont des polygones réguliers. C'est à dire que leurs côtés ont, tous, la même longueur. Plus le nombre de côtés augmente, et plus le périmètre des polygones se rapproche de la circonférence du cercle jusqu'à presque se confondre avec lui. Le périmètre du polygone inscrit représente une approximation par défaut du périmètre du cercle. Tandis que le périmètre du polygone circonscrit représente une approximation par excès.

b) Valeur approchée par la formule d'Euler :

Nous proposons de calculer une valeur approchée de π en utilisant la formule d'Euler :

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} + ...$$

a) Proposez une analyse au problème,
b) Déduisez l'algorithme correspondant,
c) Traduisez et testez la solution obtenue. Enregistrez votre programme sous le nom **Pi_Euler**



i) **Analyse du problème**

Résultat : Ecrire ("La valeur approchée de Pi trouvée est : ", RacineCarrée (6*S2))

Traitement :

S2 ← 1, i ← 2

Répéter

S1 ← S2

S2 ← S1 + 1 / $(i)^2$

i ← i +1

Jusqu'à $\sqrt{(6 * S2)} - \sqrt{(6 * S1)}$ < Epsilon

Ce document PDF a été édité via **Icecream PDF Editor**.
Passez à la version PRO pour retirer le filigrane.

ii) Algorithme du programme principal et codification des objets

0) Début Pi_Euler
1) S2 ← 1, i ← 2
Répéter
S1 ← S2
S2 ← S1 + 1 / **Carré (i)**
i ← i +1
Jusqu'à RacineCarrée (6*S2)- RacineCarrée (6*S1) < Epsilon
2) Ecrire ("La valeur approchée de Pi trouvée est : ", **RacineCarrée** (6*S2))
3) Fin Pi_Euler

Tableau de codification des objets

Objets	Type / Nature	Rôle
i	Entier Long	Compteur
S1, S2	Réel	Deux termes consécutifs
Epsilon	Constante = 10^{-4}	Erreur de l'approximation

iii) Traduction en Pascal

```
Program Pi_Euler;
Uses Crt;
Const Epsilon = 10E-4;

Var
  i : longint;
  S1, S2 : Real;

Begin

   S2:= 1; i := 2;
   Repeat
    S1 := S2;
    S2 := S1 + 1/sqr(i);
    i := i+1;
   Until Sqrt(6*S2)- Sqrt(6*S1) < Epsilon;

   Write('La valeur approchée de Pi trouvée est : ',Sqrt(6*S2):10:6);

End.
```

Ce document PDF a été édité via **Icecream PDF Editor**.
Passez à la version PRO pour retirer le filigrane.

c) Applications :

Application 1 :

Copiez le tableau suivant sur votre cahier, puis exécutez le programme Pi_Euler, et remplissez le tableau par les valeurs approchées de π trouvées :

Epsilon	Valeur approchée de π
10^{-6}	
10^{-7}	
10^{-8}	
10^{-9}	
10^{-10}	

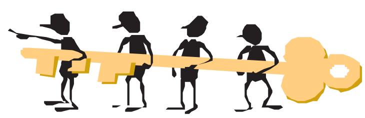
Application 2 :

Proposez une solution **récursive** pour le problème du calcul de la valeur approchée de π par la formule d'Euler.

d) Valeur approchée par la formule de Wallis :

Nous proposons de calculer une valeur approchée de π, en utilisant la formule de Wallis : π/2 = (2/1) * (2/3) * (4/3) * (4/5) * (6/5) * (6/7) * (...)

a) Proposez une analyse au problème,
b) Déduisez l'algorithme correspondant,
c) Traduisez et testez la solution obtenue. Enregistrez votre programme sous le nom **Pi_Wallis**



i) Analyse du problème

Résultat : Ecrire ("La valeur approchée de Pi trouvée est : ", **2*P2**)

Traitement : P2 ← 2, i ← 2, Num ← 2, Den ← 3

```
    Répéter
        P1 ← P2
        P2 ← P1 * (Num/Den)
        Si i Mod 2 = 0 Alors Num ← Num + 2
        Sinon Den ← Den + 2

        i ← i+1
    Jusqu'à |2*P2-2*P1| < Epsilon
```

ii) Algorithme du programme principal et codification des objets

0) Début Pi_Wallis

1) P2 ← 2, i ← 2, Num ← 2, Den ← 3

Ce document PDF a été édité via **Icecream PDF Editor**.
Passez à la version PRO pour retirer le filigrane.

Répéter

P1 ← P2

P2 ← P1 * (Num/Den)

Si i Mod 2 = 0 **Alors** Num ← Num + 2

Sinon Den ← Den + 2

FinSi

i ← i+1

Jusqu'à Abs(2*P2-2*P1) < Epsilon

2) Ecrire ("La valeur approchée de Pi trouvée est : ", **2*P2**)

3) Fin Pi_Wallis

Tableau de codification des objets

Objets	Type / Nature	Rôle
i	Entier	Compteur
P1, P2	Réel	Deux termes consécutifs
Epsilon	Constante = 10^{-4}	Erreur de l'approximation
Num	Entier	Représente le numérateur d'un terme du produit
Den	Entier	Représente le dénominateur d'un terme du produit

iii) Traduction en Pascal

```
Program Pi_Wallis;
Uses Crt;
Const
   Epsilon = 10E-4;
Var
  i, Num, Den : integer;
  P1, P2 : Real;

Begin
   P2:= 2;
   Num := 2;
   Den := 3;
   i := 2;
   Repeat
      P1 := P2;
      P2 := P1 * (Num /Den);
      If i mod 2 = 0
      Then  Num := Num+2
      Else  Den := Den+2 ;
      i := i+1;
   Until abs(2*P2 - 2*P1) < Epsilon;
   Write('La valeur approchée de Pi trouvée est : ',2*P2:10:6);
End.
```

Ce document PDF a été édité via **Icecream PDF Editor**.
Passez à la version PRO pour retirer le filigrane.

e) Application :

Copiez le tableau suivant sur votre cahier, puis exécutez le programme Pi_ Wallis, et remplissez le tableau par les valeurs approchées de π trouvées :

Epsilon	Valeur approchée de π
10^{-4}	
10^{-5}	
10^{-6}	
10^{-7}	
10^{-8}	
10^{-9}	

2) Valeur approchée de e :

a) Présentation :

Le nombre e (nom donné par **Euler**), appelé aussi nombre exponentiel ou nombre de Neper (Napier's number) est une constante représentant la base du logarithme népérien. Elle est égale à 2,7182818284 5904523536 0287471352 6624977572 4709369995 9574966967 …

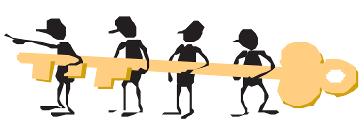
C'est un nombre **irrationnel**, sa valeur a été approchée par la formule suivante : 1 + (1/1!) + (1/2!) + ...

b) Valeur approchée avec les factorielles :

Nous voulons calculer une valeur approchée de e, à 10^{-4} en utilisant la formule suivante :

e = 1 + (1/1!) + (1/2!) + (1/3!) + (1/4!) + (1/5!) + (1/6!) + ...

a) Proposez une analyse au problème,
b) Déduisez l'algorithme correspondant,
c) Traduisez et testez la solution obtenue. Enregistrez votre programme sous le nom **e_Fact**



i) Analyse du problème

Résultat : Ecrire ("La valeur approchée de e trouvée est : ", **S2**)

Traitement :

S2 ← 1, i ← 0

Répéter

S1 ← S2

i ← i + 1

S2 ← S2 + 1/ FN Fact(i)

Jusqu'à S2 - S1 < Epsilon

Ce document PDF a été édité via **Icecream PDF Editor**.
Passez à la version PRO pour retirer le filigrane.

ii) Algorithme et codification des objets

0) Début e_Fact
1) S2 ← 1, i ← 0
Répéter
S1 ← S2
i ← i + 1
S2 ← S2 + 1/ FN Fact(i)
Jusqu'à S2 - S1 < Epsilon
2) Ecrire ("La valeur approchée de e trouvée est : ", **S2**)
3) Fin e_Fact

Tableau de codification des objets globaux

Objets	Type / Nature	Rôle
i	Entier Long	Compteur
S1, S2	Réel	Deux termes consécutifs de la somme
Fact	Fonction	Retourne la factorielle d'un entier
Epsilon	Constante = 10^{-4}	Erreur de l'approximation

iii) Traduction en Pascal de la fonction e

```
Program e_Fact;
Uses Crt;
Const
   Epsilon = 10E-4;
var
  i : Longint;
  S1, S2 : Real;
  Function Fact (Nb : Longint):Longint;
  Var
     j, F : Longint;
  Begin
    F := 1;
    For j := 1 To Nb Do
       F := F * j;
    Fact := F;
  End;

{Programme Principal}
Begin
    S2:= 1;
    i := 0;
    Repeat
         S1 := S2;
         i := i + 1;
         S2 := S2 + 1/Fact(i);
    Until S2-S1 < Epsilon;
    Write('La valeur approchée de e trouvée est : ',S2:12:11);

End.
```

Ce document PDF a été édité via **Icecream PDF Editor**.
Passez à la version PRO pour retirer le filigrane.

c) Applications :

Application 1 :

Copiez le tableau suivant sur votre cahier, puis exécutez le programme *e*_Fact, et remplissez le tableau par les valeurs approchées de e trouvées :

Epsilon	Valeur approchée de *e*
10^{-4}	
10^{-5}	
10^{-6}	
10^{-7}	
10^{-8}	
10^{-9}	

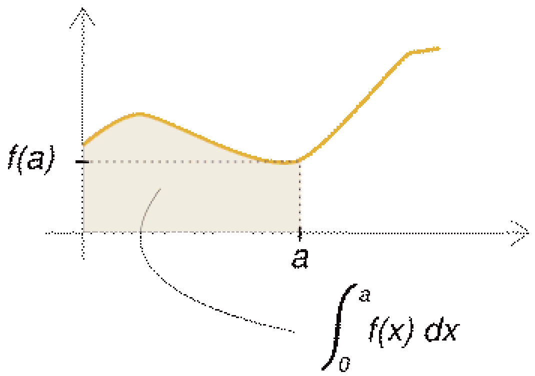
Application 2 :

Proposez une solution **récursive** pour le problème de calcul de la valeur approchée de ***e*** par la formule des factorielles.

IV. Calcul d'aires

1) Introduction :

Soit une fonction f continue et croissante dans l'intervalle [a,b].
Si nous ne connaissons pas de primitive de la fonction f, nous ne pouvons pas calculer $\int_a^b f(t)dt$. Nous chercherons alors, à en déterminer une valeur approchée.



Représentation graphique d'une intégrale

En mathématiques, l'intégrale d'une fonction réelle positive est la valeur de l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses et la courbe représentative de la fonction.
Pour les fonctions qui prennent des valeurs réelles négatives (gardant un signe constant par intervalles), une définition d'aire algébrique rend possible une aire négative.
Pour les calculs d'aires, des méthodes d'intégration numérique sont utilisées. L'objectif donc, est d'approcher la valeur de $\int_a^b f(t)dt$. La plupart des méthodes d'intégration numérique fonctionnent suivant le même principe :

Ce document PDF a été édité via **Icecream PDF Editor**.
Passez à la version PRO pour retirer le filigrane.

Nous commençons par subdiviser l'intervalle [a, b] en n intervalles $[a_i, a_{i+1}]$ de diamètres égaux à $\frac{b-a}{n}$, avec a_1 = a et a_{n+1} = b. La subdivision est régulière et plus n est grand, plus la longueur de chacun des intervalles devient petite. Le diamètre de chaque intervalle, c'est à dire sa longueur, est notée : $h = a_{i+1} - a_i$

Puis, pour chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$, nous essayons d'approcher $\int_{ai}^{ai+1} f(t)dt$.
C'est à dire que l'idée est de faire l'approximation suivante : sur chaque intervalle nous remplaçons l'aire sous la courbe qui représente la fonction f par une aire plus simple à calculer.

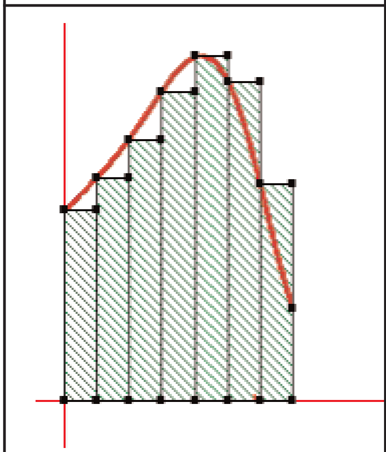
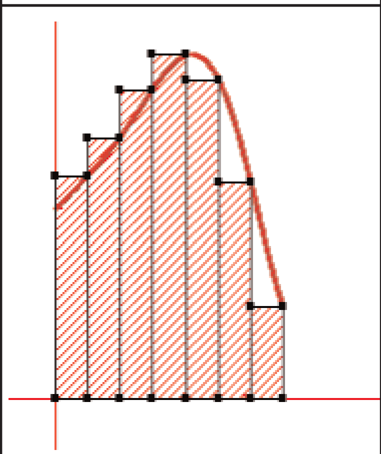
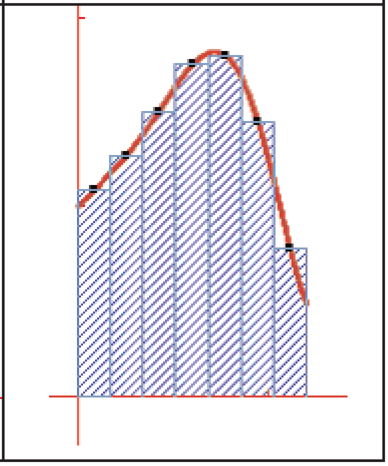
Plus nous augmentons le nombre de sous intervalles du segment [a,b], plus la valeur de l'intégrale approchée converge vers la vraie valeur de l'intégrale.

Les méthodes les plus utilisées sont : la méthode des rectangles, la méthode des trapèzes, la méthode de Simpson, la méthode de Romberg, etc.

2) Méthode des rectangles :

a) Principe :

Sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ est représenté un rectangle de largeur $a_{i+1} - a_i$ et d'hauteur :

Soit $f(a_i)$: Rectangles à gauche,	Soit $f(a_{i+1})$: Rectangles à droite,	Soit $f((a_i + a_{i+1})/2)$: Rectangles du point milieu,
		

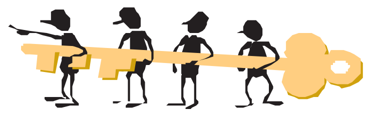
La méthode des rectangles consiste à remplacer " l'aire sous la courbe " par la somme des aires des rectangles obtenus.

Ce document PDF a été édité via **Icecream PDF Editor**.
Passez à la version PRO pour retirer le filigrane.

b) Application :

Nous proposons de calculer, en utilisant la méthode des rectangles, l'aire résultante de la courbe de la fonction f : $x \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$ sur un intervalle [a, b]

a) Proposez une analyse modulaire au problème,
b) Déduisez les algorithmes correspondants,
c) Traduisez et testez la solution obtenue. Enregistrez votre programme sous le nom **Meth_Rec**



Analyse du problème

Résultat : Ecrire ("Le calcul de l'aire par la méthode des rectangles = ", FN Rectangles (a, b, n))

Traitement : Rectangles est une fonction permettant de calculer l'aire par la méthode des rectangles.

Données : Deux réels a et b représentant les bornes du grand intervalle et un entier n, représentant le nombre d'intervalles après la subdivision. Leur lecture sera la tâche de la procédure Lecture

Algorithme du programme principal et codification des objets

0) Début Meth_Rec
1) Proc Lecture (a, b, n)
2) Ecrire ("Le calcul de l'aire par la méthode des rectangles = ", FN Rectangles (a, b, n))
3) Fin Meth_Rec

Tableau de codification des objets globaux

Objets	Type / Nature	Rôle
a, b	Réel	Bornes de l'intervalle initial
n	Entier	Nombre de sous intervalles
Lecture	Procédure	Permet de lire a, b et n
Rectangles	Fonction	Retourne une valeur approchée de l'aire à calculer.

Analyse de la fonction Rectangles

Résultat : Rectangles

Traitement :

➢ Rectangles ← Somme * h

➢ Somme ← 0, h ← $\frac{b1-a1}{n1}$, x ← a1 + h/2

Pour k de 1 à n1 **Faire**
Somme ← Somme + f(x)
x ← x + h {avancement}

Ce document PDF a été édité via **Icecream PDF Editor**.
Passez à la version PRO pour retirer le filigrane.

Algorithme de la fonction Rectangles

0) Fonction Rectangles (a1, b1 : Réel ; n1 : Entier) : Réel

1) Somme $\leftarrow$ 0

   h $\leftarrow \dfrac{b1 - a1}{n1}$

   x $\leftarrow$ a1 + $\dfrac{h}{2}$

   Pour k de 1 à n1 Faire

   Somme $\leftarrow$ Somme + f(x)

   x $\leftarrow$ x + h

   FinPour

2) Rectangles $\leftarrow$ Somme * h

3) Fin Rectangles

Tableau de codification des objets locaux

Objets	Type / Nature	Rôle
Somme, x	Réel	Variables intermédiaires
h	Réel	Largeur d'un sous intervalle
k	Entier	Compteur
f	Fonction	La fonction à intégrer

Traduction en Pascal

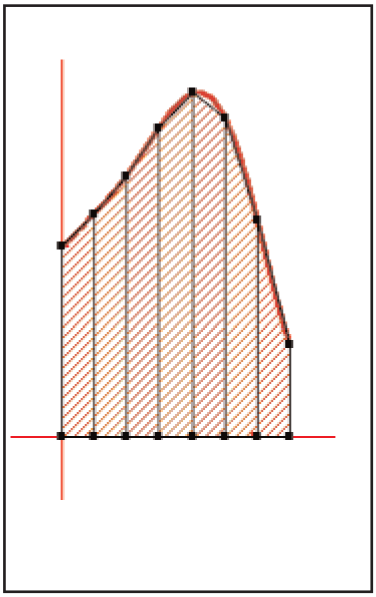
```
Program Meth_rectangles;
Uses crt;
Var  a, b : Real; n : Integer;

Procedure Lecture (Var a1, b1 : Real ; Var n1 : Integer) ;
Begin
  Write ('Donner la borne inférieure : '); Readln (a1);
  Repeat
  Write ('Donner la borne supérieure : '); Readln (b1);
  Until b1>a1;
  Repeat
  Write ('Donner le nombre d''intervalles : '); Readln (n1);
  Until n1>0;
End ;

Function Rectangles (a1, b1 : Real; n1 : Integer) : Real;
Var
  k : Integer;
  h, x, somme : Real;

  Function f (x1 : Real) : Real;
  Begin
      f := 1/(1+ sqr (x1));
  End;

Begin {Début de la fonction Rectangles}
    somme := 0;
    h := (b1 - a1 ) / n1;
    x := a1+ h / 2;
    For k := 1 To n1 Do
    Begin
       somme := somme + f (x);
       x := x + h
    End;
    rectangles := somme * h;
End;
```

Ce document PDF a été édité via **Icecream PDF Editor**.
Passez à la version PRO pour retirer le filigrane.

```
{Programme Principal_ Méthode du point milieu}
Begin
  Lecture (a, b, n) ;
  Write ('Le calcul de l''aire par la méthode des rectangles = ',
  Rectangles (a, b, n));
End.
```

3) Méthode des trapèzes :

a) Principe :



Dans cette méthode, nous subdivisons l'intervalle [a, b] en n sous-intervalles, de même largeur h = (b-a)/n. Nous notons $a_i = a + i * h$.

Par linéarité de l'intégrale, nous savons que l'intégrale globale correspond à la somme des intégrales de f sur chaque sous-intervalle de [a,b]. Soit $[a_0, a_1]$ un de ces sous-intervalles, nous approchons l'intégrale de f sur cet intervalle par l'aire du trapèze reliant les points $(a_0, 0)$, $(a_0, f(a_0))$, $(a_1, f(a_1))$ et $(a_1, 0)$. Cette aire vaut

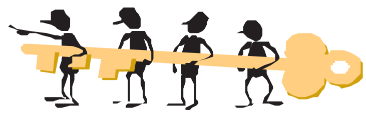
$h * ((f(a_0) + f(a_1)) / 2)$

L'intégrale globale s'obtient donc en additionnant ces n aires, c'est à dire la somme des $h * ((f(a_i) + f(a_{i+1})) / 2)$.

b) Application :

Utilisez la méthode des trapèzes, pour calculer l'aire résultante de la courbe de la fonction $f : x \longrightarrow \dfrac{1}{1 + x^2}$ sur un intervalle [a, b]

a) Proposez une analyse modulaire au problème,
b) Déduisez les algorithmes correspondants,
c) Traduisez et testez la solution obtenue. Enregistrez votre programme sous le nom **Meth_Tra**



Ce document PDF a été édité via **Icecream PDF Editor**.
Passez à la version PRO pour retirer le filigrane.

i) Analyse du problème

Résultat : Ecrire ("Le calcul de l'aire par la méthode des trapèzes = ", FN Trapezes (a, b, n))

Traitement : Trapezes est une fonction permettant de calculer l'aire par la méthode des trapèzes.

Données : Deux réels a et b représentant les bornes du grand intervalle et un entier n, représentant le nombre d'intervalles après la subdivision. Leur lecture sera la tâche de la procédure Lecture

ii) Algorithme du programme principal et codification des objets

0) Début Meth_Trap
1) Proc Lecture (a, b, n)
2) Ecrire ("Le calcul de l'aire par la méthode des trapèzes = ", FN Trapezes (a, b, n))
3) Fin Meth_Trap

Tableau de codification des objets globaux

Objets	Type / Nature	Rôle
a, b	Réel	Bornes de l'intervalle initial
n	Entier non signé	Nombre de sous intervalles
Lecture	Procédure	Permet de lire a, b et n
Trapezes	Fonction	Retourne une valeur approchée de l'aire à calculer.

iii) Analyse de la fonction Trapezes

Résultat : Trapezes

Traitement :

- Trapezes ← Somme * h
- h ← (a1 + b1/ n1), Somme ← (f(a1) + f(a1+h)) / 2, x ← a1

  Pour k de 1 à n1-1 **Faire**

  x ← x + h {avancement}

  Somme ← Somme + (f(x) + f(x+h)) / 2

iiii) Algorithme de la fonction Trapezes

0) Fonction Trapezes (a1, b1 : Réel ; n : Entier non signé) : Réel
1) h ← (a1+b1)/n1
   Somme ← (f(a1)+f(a1+h))/2
   x ← a1
   Pour k de 1 à n1-1 **Faire**
      x ← x + h
      Somme ← Somme + (f(x)+f(x+h))/2
   FinPour
2) Trapezes ← Somme*h
3) Fin Trapezes

Ce document PDF a été édité via **Icecream PDF Editor**.
Passez à la version PRO pour retirer le filigrane.

Tableau de codification des objets locaux

Objets	Type / Nature	Rôle
Somme, x	Réel	Variables intermédiaires
h	Réel	Largeur d'un sous intervalle
k	Entier non signé	Compteur
f	Fonction	La fonction à intégrer

iiiii) Traduction en Pascal

```
Function Trapezes (a1, b1 : Real; n1 : Word) : Real;
Var
  k : Word;
  h, x, somme : Real;
  Function f (x1 : Real) : Real;
  Begin
     f := 1/(1 + Sqr (x1));
  End;

Begin
  h := (b1-a1)/n1;
  somme := (f(a1)+f(a1 + h))/2;
  x := a1;
  For k := 1 To n1-1 Do
  Begin
    x := x+h;
    somme := somme + (f(x)+ f(x+h))/2;
  End;
  trapezes := somme *h;
End;
```

Questions :

Copiez le tableau suivant sur votre cahier, puis exécutez les deux programmes Meth_rec et Meth_tra, et remplissez le tableau par les résultats trouvés, sachant que a = 1 et b = 5 :

n	Meth_rec	Meth_tra
2		
4		
5		
6		
7		
8		

Que remarquez-vous ?

Ce document PDF a été édité via **Icecream PDF Editor**.
Passez à la version PRO pour retirer le filigrane.

Retenons

A) Un **algorithme d'approximation** calcule une solution approximative d'un problème en un temps raisonnable (en général polynomial).

B) Les racines d'une équation de la forme f(x) = x sont appelées des **points fixes**. En faisant varier x, nous pouvons déterminer une approximation du point fixe.

C) π est un nombre irrationnel. En effet, il est impossible de l'exprimer avec un nombre fini d'entiers, de fractions rationnelles et de leurs racines.

Il n'y a donc pas de développement décimal simple de π.

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{5} + \ldots\ldots$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots. + \frac{1}{k^2} + \ldots. \quad \text{(formule d'Euler)}$$

Nous appelons constante de Neper, et nous notons e, l'unique réel tel que ln e = 1. C'est la base des logarithmes naturels. Il est appelé nombre exponentiel par Euler en 1761 et il vaut approximativement : $e \approx 2{,}718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 4\ldots$

La formule la plus connue approchant la valeur de e est : 1 + (1/1!) + (1/2!) + (1/3!) + …

D) La mesure de **l'aire algébrique** se trouvant entre la courbe f(x), les droites x = a, x = b et y = 0, est représentée par **l'intégrale** "de a à b" de f(x).

Ce document PDF a été édité via **Icecream PDF Editor**.
Passez à la version PRO pour retirer le filigrane.

Retenons

1- **La méthode des rectangles** consiste à approcher l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ par la somme des aires des n rectangles de base $[a_i, a_{i+1}]$ et de hauteur $f(a_i)$, i variant de 0 à n-1. Nous appelons aussi cette formule : formule du "point gauche".

2 - **La méthode des trapèzes** consiste à remplacer les arcs de courbe (M_iM_{i+1}) par les segments $[M_iM_{i+1}]$. Nous obtenons, sur $[a_i , a_{i+1}]$, une approximation de l'aire sous la courbe par l'aire du trapèze : de hauteur $(a_{i+1} - a_i)$ et de bases $f(a_i)$ et $f(a_{i+1})$.

Citation du Chapitre

« Bien que cela puisse paraître paradoxal, toute science exacte est dominée par la notion d'approximation »

Bertrand Russel (1872 - 1970)

Ce document PDF a été édité via **Icecream PDF Editor**.
Passez à la version PRO pour retirer le filigrane.

Exercice 1

La valeur de $\pi/4$ peut être approchée comme la somme des n premiers termes de la suite suivante :

$U_n = (-1)^n / (2n + 1)$

$U_0 = 1$

1/ Proposez une analyse puis déduisez l'algorithme de la fonction Un qui renvoie le $n^{ème}$ terme de la suite.

2/ Proposez une analyse puis déduisez l'algorithme de la fonction app_pi(n) qui renvoie l'approximation de π calculée à partir des n premiers termes de la suite.

Exercice 2 Bac Tp 2001

Sachant que $\sin(x) = x + (x^3/3!) + (x^5/5!) + (x^7/7!) + ...$
Pour x très proche de zéro, Ecrire un programme Pascal qui permet d'afficher sin(x) en utilisant la formule ci-dessus.
Le calcul s'arrête quand la différence entre deux termes consécutifs devient inférieure ou égale à 10^{-4} . La dernière somme calculée est une valeur approchée de sin(x).
Le candidat pourra utiliser la fonction FACT(a) suivante qui permet de calculer la factorielle de a (a !).

```
1. DEFFN FACT (a : entier) : entier
2. F ← 1
3. Pour i de 1 à a répéter
        F ← F * i
   Fin pour
4. FACT ← F
5. Fin FACT
```

Ce document PDF a été édité via **Icecream PDF Editor**.
Passez à la version PRO pour retirer le filigrane.

Exercice 3 : Bac Tp 2001

Soit l'expression mathématique suivante : $\pi/4 = 1-1/3+1/5-1/7+1/9-\ldots\ldots\ldots$

Ecrire un programme Pascal qui utilise l'expression ci-dessus pour déterminer et afficher une valeur approchée de π à 10^{-4} prés.

- Le calcul s'arrête quand la différence entre deux valeurs consécutives de cette expression devient strictement inférieure à 10^{-4}.

Pour chacun des exercices suivants :

a) Proposez une analyse modulaire au problème,

b) Déduisez les algorithmes correspondants.

Exercice 4

Soit U_n une suite de nombres avec $U_0 = 1$ et $U_1 = 1$, puis les suivants définis par $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$.

1) Calculez les n premiers termes de U_n et donnez une valeur approchée des quotients U_{n+1}/ U_n.
2) Que remarquez-vous en liaison avec le nombre d'or $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$?

Exercice 5

Cherchez le point fixe de la fonction $f(x) = \sqrt{1+x}$

Traduisez et testez la solution obtenue.

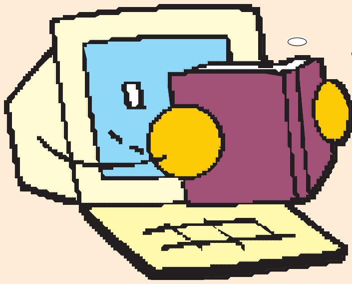
Enregistrez votre programme sous le nom **Pt_fixe2**

Exercice 6

Calculez une valeur approchée de : $\int_1^5 (x + 3 \sin x)dx$ en utilisant la méthode des trapèzes.

Traduisez et testez la solution obtenue. Enregistrez votre programme sous le nom **Trapeze.**

Ce document PDF a été édité via **Icecream PDF Editor**.
Passez à la version PRO pour retirer le filigrane.



Lecture

L'historique de π

Le nombre pi est connu depuis l'antiquité, évidemment, pas au sens où nous l'entendons maintenant (notion abstraite de constante mathématique) mais en tant que rapport entre la longueur du cercle et son diamètre et d'ailleurs surtout en tant que méthode de calcul du périmètre du cercle (ou de l'aire du disque).

- **En 2000 avant J.C**, les Babyloniens connaissaient Pi (comme le rapport constant entre la circonférence d'un cercle et son diamètre, mais pas comme objet mathématique). Ils avaient comme valeur 3 + 7/60 + 30/3600 (ils comptaient en base 60) soit 3 + 1/8 = 3,125.
- **Vers 1650 avant J.C**, les Egyptiens avaient comme valeur $(16/9)^2$ qui vaut environ 3,16. Cette valeur a été retrouvée sur le fameux papyrus de Rhind, écrit par le scribe Ahmès, acheté par un Ecossais qui s'appelle ... Henry Rhind. Il est conservé au British museum.

Ensuite, pi apparaît :

- **En Chine vers 1200 avant J.C**, avec pour valeur 3.
- **Dans la Bible vers 550 avant J.C**, avec pour valeur 3.
- **En Grèce,** avec en particulier Archimède en 250 av. JC qui donne l'encadrement 223/71 < pi < 22/7 et Ptolémée en 150 qui utilise 3 + 8/60 + 30/3600 = 3,1416666.
- **En Chine** au V$^{\text{ème}}$ siècle, avec pour valeur 355/113.
- **En Inde** : 3 + 177/1250 = 3,1416 en 380 puis 3,16227 (racine carrée de 10) avec Brahmagupta en 640
- **Au Moyen-Orient** avec Al Khwarizmi en 800 (Ouzbekistan) et Al Kashi en 1429 (Turkestan) qui calcule 14 décimales de pi.
- **En Europe** : l'italien Fibonacci, en 1220, trouve la valeur 3,141818; au Pays-Bas avec Van Ceulen (20 décimales en 1596 puis 34 décimales en 1609 !), en France avec Viète (9 décimales en 1593).

Ensuite vint le développement des techniques de calculs avec l'analyse (dérivée, intégrales, sommes de séries, produits infinis, ...), Wallis en 1655, Newton (16 décimales en 1665), Gregory, Leibniz, Machin (100 décimales en 1706), puis Euler (20 décimales calculées en une heure !) vers 1760 et beaucoup d'autres.

Les champions contemporains sont les **frères Chudnovsky** avec 4 milliards de décimales en 1994 et **Kanada** et **Tamura** dont le dernier record datait de 1999 avec 206 milliards de décimales (en environ 33 heures de calculs).

Kanada a battu son propre record le 6 décembre 2002 avec une équipe de neuf autres chercheurs : 1 241 100 000 000 décimales ont été calculées à l'aide d'un super calculateur (400 heures de calculs !) en utilisant un algorithme que l'équipe a mis cinq ans à mettre au point.

Ce document PDF a été édité via **Icecream PDF Editor**.
Passez à la version PRO pour retirer le filigrane.

La notation π

π est la première lettre du mot “périmètre” en grec. Il y a plusieurs versions sur l'apparition du symbole, mais l'époque est toujours la même : **vers 1600.**

Euler, utilise la lettre π, dans un ouvrage sur les séries, publié en latin en 1737 puis, en 1748, dans son "Introduction à l'analyse infinitésimale", ce qui imposa définitivement cette notation

Nature algébrique de π

- π **n'est pas un nombre décimal**, c'est-à-dire que les chiffres après la virgule ne sont pas en nombre fini (π a une infinité de décimales).

- π **est un nombre irrationnel**, c'est-à-dire qu'il ne peut pas s'écrire comme une fraction de deux nombres entiers. Autrement dit, cela signifie aussi que les chiffres de π ne sont pas prévisibles. On ne peut pas deviner une décimale sans la calculer explicitement, comme qu'on peut le faire avec le nombre 1/7 = 0,14285714285714... par exemple.

L'irrationalité de π fut démontrée en 1761 par l'Allemand Lambert.

- π **est un nombre transcendant** c'est-à-dire qu'il n'est solution d'aucune équation à coefficients rationnels. Cela fut démontré en 1881 par Lindemann.

Des décimales du nombre π

Depuis le 6 décembre 2002, il est connu 1 241 100 000 000 (plus de 1200 milliards !) de décimales du nombre pi ...

A quoi cela sert-il de connaître tant de décimales de pi ?

- Le calcul de décimales de pi est un très bon test pour vérifier la précision des calculs des ordinateurs (deux erreurs graves furent ainsi détectées sur les super-ordinateurs IBM 590 et R8000)
- Mais la motivation la plus importante n'est pas de connaître de plus en plus de décimales de pi mais bel et bien de les calculer. En effet, le calcul d'un si grand nombre de chiffres demande des algorithmes de calculs très perfectionnés et a permis de très grand progrès dans ce domaine

Les 100 premières décimales de pi :

3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 169 399 375 105 820 974 944 592 307 816 406 286 208 998 628 034 825 342 117 067

Valeurs approchées de π

Voici des éclaircissements sur quelques valeurs approchées célèbres de π :

Tout d'abord, AUCUNE des valeurs données ci-dessous n'est LA valeur du nombre π.

- **"Trois quatorze"** (3,14) : la plus connue. Valeur approchée de π avec deux chiffres exacts après la virgule. C'est une très bonne valeur pour la plupart des calculs.

Ce document PDF a été édité via **Icecream PDF Editor**.
Passez à la version PRO pour retirer le filigrane.

- **"Vingt-deux septièmes"** (22/7) : il y en a régulièrement qui soutiennent que c'est LE nombre π.

  En réalité, c'est la fraction la plus simple qui approche le mieux π. C'est la première fraction réduite du développement de pi en fraction continue : 3 + 1/7 = 21/7 + 1/7 = 22/7. A noter que c'est une valeur qu'Archimède avait calculée aux environs de 250 avant JC pour encadrer π. 22/7 vaut 3,142 857 142 857 142 ... et donne une valeur approchée de π avec deux chiffres exacts après la virgule.
- **355/113 :** moins connue mais c'est une très bonne approximation rationnelle de π. C'est une réduite du développement de pi en fraction continue : 3 + 1 / (7 + 1 / (15 + 1/ 1).

  355 / 113 vaut environ 3,141 592 92 qui est une valeur de π avec 6 chiffres exacts après la virgule (3,141592)…

http://trucsmaths.free.fr

Ce document PDF a été édité via **Icecream PDF Editor**.
Passez à la version PRO pour retirer le filigrane.

Constantes

Liste des principales constantes mathématiques

Nom	**Valeur à 4 déci-males**	**Description**
i	√-1	Base des nombres imaginaires
0	0	Elément neutre de l'addition
Nombre de Champernowne ou Nombre de Mahler	0,1234	Suite des nombres entiers accolés
Constante de Copeland - Erdös	0,2357	Succession des nombres premiers qui sont consécutifs
Constante de Artin	0,3739	Proportion de nombres premiers longs parmi les nombres premiers
Constante de Thue-Morse	0,4124	Nombre formé d'une suite binaire
Constante oméga	0,5671	Arithmétique
Constante d'Euler	0,5772	1/1 + 1/2 +1/3 + 1/4 + ... - log n
Constante de Gompertz	0,5963	Fractions continues
Constante de Ramanujan	0,7642	Quantité de nombres décomposables en somme de deux carrés
Constante de Catalan	0,9159	$1/1^2 - 1/3^2 + 1/5^2 - 1/7^2 + \ldots$
1	1	Élément neutre de la multiplication
Constante de la lemniscate	1,3110	Même rôle que π pour cette figure
Nombre d'or φ	1,6180	Divine proportion
Constante de Pythagore √2	1,4142	Diagonale du carré unité
√3	1,7320	Diagonale du cube unité
e	2,7182	Base du calcul exponentiel
π	3,1416	Aire du cercle de rayon unité
Nombre d'argent	3,246	Racine polynômes chromatiques
Valeurs de Feigenbaum	2,5029 et 4,6692	Valeur d'étirement des figures fractales.

Ce document PDF a été édité via **Icecream PDF Editor**.
Passez à la version PRO pour retirer le filigrane.

Liste d'autres constantes

1- Accélération normale de la pesanteur	g = 9,8066	m/s^2	
2 - Constante gravitationnelle	G = 6,6725 10^{-11}	$m^3/(s^2.kg)$	
3- Pression normale	H = 1,0132 10^5	Pa	
4- Zéro de l'échelle Celsius des températures	T_0 = 2,7315 10^2	K	
5- Vitesse de la lumière dans le vide	c = 2,9979 10^8	m/s	par définition
6 - Nombre d'Avogadro	N = 6,0221 10^{23}	atomes/atome-gramme ou $gmol^{-1}$	± 0,0004
7 - Rayon classique de l'électron	r_e = 2,8179 10^{-15}	m	
8- Charge de l'électron	e = 1,6021 10^{-19}	coulombs	± 0,000007
9- Masse de l'électron au repos	m_e = 9,1095 10^{-31}	kg	± 0,00005
10- Masse du neutron au repos	m_n =1,6749 10^{-27}	kg	± 0,00001
11- Masse du proton au repos	m_p = 1,6726 10^{-27}	kg	± 0,00001
12- Facteur de conversion de la masse en énergie	1 g = 5,6100 10^{26}	MeV	± 0,00011
13- Constante de Planck	h = 6,62606876 10^{-34}		± 0,00000052
14- Constante de Dirac	hbar = 1,0545 10^{-34}	joules x seconde	
15- Constante de structure fine	α = 0,0072	sans dimension	≅ 1/137
16- Constante de Boltzmann	k =1,380662 10^{-23}	joules /degré absolu	
17- Volume molaire	V_m = 22,4141	l/gmol	
18- Constante universelle des gaz	R = 8,3145	J/(gmol.k)	

Perso.orange.fr

Ce document PDF a été édité via **Icecream PDF Editor**.
Passez à la version PRO pour retirer le filigrane.