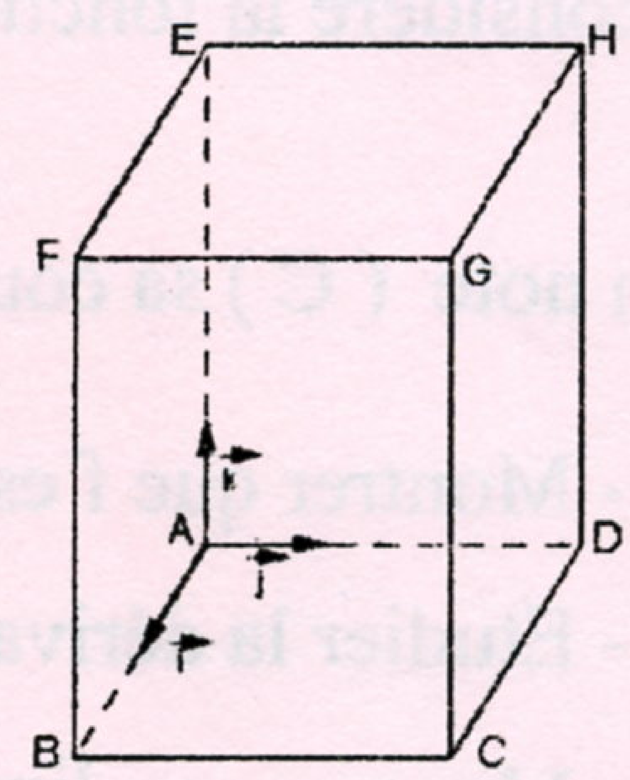
RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ***** EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Épreuve : **MATHÉMATIQUES** Section : **Sciences techniques** Durée : **3 h** — Coefficient : **3**
SESSION **2016**	Session **de contrôle**

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 1point, une réponse fausse ou l'absence d'une réponse vaut 0 point.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\left(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH tel que : $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}$, $\overrightarrow{AD}=3\vec{j}$, $\overrightarrow{AE}=4\vec{k}$.



1) Le produit vectoriel $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AE}$ est égal à :

a) $-8\,\vec{k}$ b) $-8\,\vec{i}$ c) $-8\,\vec{j}$

2) Soit P le plan (FHC). La droite (BD) est :

a) Strictement parallèle à P b) Perpendiculaire à P c) Contenue dans P

3) Le produit mixte $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EG}\right)$ est égal à :

a) 0 b) -24 c) 24

4) L'intersection de la sphère S de centre A et de rayon 4 avec le plan Q d'équation cartésienne $y=3$ est le cercle :

a) de centre C et de rayon $\sqrt{7}$. b) de centre D et de rayon $\sqrt{7}$. c) de centre D et de rayon 4.

Exercice 2 (5 points)

Soit dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) : $z^2-\left(1+i(2+\sqrt{3})\right)z-2(\sqrt{3}-i)=0$.

1) a - Vérifier que $2i$ est une solution de (E).

b - Déterminer l'autre solution de (E).

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on note A, B et I les points du plan d'affixes respectives $z_A=1+i\sqrt{3}$, $z_B=2i$ et $z_I=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}+2}{2}$.

a – Mettre les nombres complexes z_A et z_B sous la forme exponentielle.

b - Vérifier que A et B sont deux points du cercle (C) de centre O et de rayon 2.

c - Vérifier que I est le milieu du segment $[AB]$.

d - Construire le cercle (C) ainsi que les points A, B et I.

3) a - Justifier que la demi-droite $[OI)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.

b - Vérifier que $(\overrightarrow{OA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$..

c - Montrer que $(\vec{u}\,\hat{,}\,\overrightarrow{OI}) = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

d - En déduire que $z_I = \sqrt{2+\sqrt{3}}\ e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

4) Donner alors les valeurs exactes de $\cos(\frac{5\pi}{12})$ et $\sin(\frac{5\pi}{12})$.

Exercice 3 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = -x + 2x\ln x & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$

et on note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a - Montrer que f est continue à droite en 0.

b - Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a - Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b - Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) a - Montrer que pour tout réel $x \in]0,+\infty[$ on a $f'(x) = 1 + 2\ln x$.

b - Dresser le tableau de variations de f.

c - Vérifier que $f(\sqrt{e}) = 0$.

d - Déterminer le deuxième point d'intersection autre que O de la courbe (C) et de la droite Δ d'équation cartésienne $y = x$.

e - Tracer la droite Δ et la courbe (C). (On prendra $e \simeq 2{,}7$)

4) Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $[\sqrt{e},+\infty[$ et (C_1) sa représentation graphique dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b- Tracer dans le même repère la courbe (C_2) de g^{-1}.

5) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire, en u.a, de la partie (E) du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \sqrt{e}$ et $x = e$ et par $\mathcal{A}'$ l'aire, en u.a, de la partie (E') limitée par les courbes (C_1), (C_2) et les axes des abscisses et des ordonnées.

a - Justifier que $\mathcal{A}' = e^2 - 2\mathcal{A}$.

b - Montrer que $\int_{\sqrt{e}}^{e} (x \ln x)\, dx = \frac{1}{4} e^2$.

c - En déduire la valeur de $\mathcal{A}'$.

Exercice 4 (5 points)

Lors d'une session de baccalauréat, une étude faite sur les résultats des élèves admis à l'examen montre que :

60 % des élèves admis sont des filles.

30 % parmi les filles admises sont rachetées.

45 % parmi les garçons admis sont rachetés.

Parmi les relevés de notes des élèves admis, on choisit un relevé de notes au hasard.

On considère les évènements suivants :

F « le relevé de notes choisi est celui d'une fille ».

R « le relevé de notes choisi est celui d'un élève admis avec rachat ».

1) Traduire par des probabilités, les pourcentages donnés ci-dessus.

2) Construire un arbre pondéré décrivant la situation précédente.

3) a- Quelle est la probabilité que le relevé de notes choisi soit d'un garçon admis sans rachat.

b- Montrer que $p(R) = 0,36$.

c- Le relevé de notes choisi est celui d'un élève admis avec rachat, quelle est la probabilité que ce relevé de notes soit celui d'un garçon.

4) On prélève au hasard vingt relevés de notes, d'élèves admis, portant le numéro d'inscription. Comme le nombre d'élèves réussis est assez important alors on peut assimiler ce prélèvement à un tirage successif avec remise de vingt relevés.

a - Quelle est la probabilité p_1 que deux exactement de ces élèves soient admis avec rachat.

b - Quelle est la probabilité p_2 qu'au moins un de ces élèves soit admis avec rachat.